丢番图问题, Arakelov 几何与凸几何

陈华一
巴黎大学 Jussieu-Paris Rive Gauche 数学研究所
huayi.chen@imj-prg.fr

2021 年 9 月 22 日

目录

1 前言

丢番图问题可以说是数学中最古老而又最常新的领域之一. 传统上讲, 丢番图问题研究的是丢番图方程, 即整系数多项式方程. 丢番图方程这一术语和《算术》(Ἀριθμητικά, 即 Arithmetica) 一书的作者亚历山大港的丢番图 (Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς, 即 Diophantus of Alexandria) 有关. 丢番图的生平今已大多不可考, 只知道他生活在亚历山大港 (今埃及北部), 活跃的时代介于公元前一世纪与公元四世纪之间[1], 历史上属于希腊化时代 (Hellenistic period) 和罗马管辖时期. 其时亚历山大港是古希腊文化的中心, 世界上最大的犹太人城市, 以及欧洲与东方贸易和文化交流的枢纽; 拥有当时世界上藏书最多书目最完备的图书馆和古希腊最好的大学. 文化的繁荣推动了科学与哲学的进步, 孕育了一大批优秀的数学家.

丢番图的《算术》一书有十三卷, 原书应该是用古希腊语写成的, 古希腊文版今有七卷散佚, 现存最早的版本是十三世纪发现的拜占庭六卷抄本. 1971 年 Rashed 在伊朗马什哈德 (Meshhed) 的阿斯坦 · 库兹 · 拉扎维 (Astan Quds Razavi) 中央图书馆发现了 1198 年版巴勒贝克[2]的卢卡之子康斯坦丁 (Qusṭā ibn Lūqā al-Ba'labakkī) 翻译的阿拉伯文七卷, 其中四卷不存在于拜占庭抄本之中[3]. 《算术》是一部问题和解法集, 绝大部分是整系数多项式方程和方程组; 现存的十卷中, 古希腊文六卷有 189 个问题, 阿拉伯文四卷则有 101 个. Ἀριθμητικά 一词源于 ἀριθμός (arithmos), 在古希腊语中是数的意思. 古希腊文化中 ἀριθμητικά 指的是数的性质的研究, 而运算方法则视为一门单独的学问——λογιστικός (计算术)[4]. 自文明之起源, 人类便思考、研究和运用数学. 在丢番图之前, 古老文献中出现的一些数学问题已可以归结为多项式方程的求解. 古埃及的纸莎草书中出现了一些线性方程和一元二次方程的例子; 古巴比伦泥板中记载了一元二次方程和某些一元三次方程的解法, 以及一些勾股数组; 欧几里得的《原本》(Στοιχεία, 即 Elements) 和中国的《九章算术》更提出了勾股数问题的通解公式. 然而丢番图的问题却脱离了测量和几何的背景, 以抽象的代数方程为主, 并用符号来代替一些文字; 另

---

[1]丢番图在一部关于多边形数的著作中引用了公元前二世纪数学家伊普西克里斯 (Ὑψικλῆς, 即 Hypsiclis) 的工作 (见 [117] 第 470 和 472 页); 生活在公元四世纪的亚历山大港的希恩 (Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς, 即 Theon of Alexandria) 在针对托勒密 (Κλαύδιος Πτολεμαῖος, 即 Claudius Ptolemy) 所著《至大论》(Almagestum) 的评论中提到了丢番图 (见 [118] 第 35 页).

[2]巴勒贝克遗址位于黎巴嫩的贝卡谷地.

[3]见 [112] 第 v 页.

[4]数学大百科全书第一卷, 科学出版社 1994 年版, 第 226 页.

外, 丢番图只考虑方程的正有理数解, 这样的设定也使得《算术》的行文远离了数值计算和几何直观, 呈现出与前人迥然不同的风格. 正因如此, 今天数学中的丢番图问题通常是指和丢番图方程的有理数解或整数解相关的问题. 比方说中国古算中的同余方程组就可以看成是一种关于线性丢番图方程的丢番图问题. 从方法论上讲, 丢番图并不拘泥于算式的检验而是力求给出"形式证明", 也就是说综合运用变量替换、代入、消元、消项等方法将问题通过一系列步骤转化成一个已经解决的问题: 虽然丢番图分析不是一个公理化系统, 但其演绎模式却与古希腊几何学传统一脉相承[5].

从公元三世纪开始, 基督化、地震、海啸、迫害异教徒、波斯占领、阿拉伯占领等历史事件轮番摧残了亚历山大港璀璨的文化. 亚历山大图书馆浩如烟海的藏书也逐渐湮灭在历史长河之中. 然而对知识的追求终究战胜了迷信和野蛮. 随着东西方的交流, 丢番图的著作传播到了阿拉伯世界, 丢番图分析的方法也被阿拉伯数学家所研究和发扬, 最终又在文艺复兴时期重新传回到西方, 对数学的发展产生了深远的影响. 后世对于丢番图的《算术》有两种解读[6]. 第一种是代数[7]解读, 旨在对丢番图的表述进行符号化并用代数方法对其结果进行整理、分类和推广; 从这样的角度出发, 很自然地将丢番图方程按照多项式方程的次数和形态来分类, 并试图确定每个问题的解集. 数学史学家长期以来也是将丢番图的《算术》看成代数领域的一个开山之作. 然而从代数的观点来看丢番图的解法似乎并无明显的章法可循. Hankel 说: "《算术》的每个问题都有特定的解法, 经常不能适用于邻近的其它问题. 因此对于当代数学家来说, 即便是研究了 100 个题以后, 去解第 101 题时仍然感到困难; 作了几个失败的尝试以后再去读丢番图的解答, 会惊叹于他如何能够做到突然离开大路而抄近道达到他的目的".[8]可以想见丢番图应该是掌握了一些一般的手段, 使得他可以设计和解决如此纷繁复杂的问题. 随着现代数学的进步, 数学界逐渐形成了对《算术》一书的第二种解读: 代数几何解读. 事实上, 虽然丢番图只感兴趣方程的正有理数解, 但是他的解法却适用于任意的域, 从而也适用于几何问题. 这个隐含的联系被 Fermat 敏锐地察觉, 他说: "几乎没有真正的数论问题, 也没有蕴含了数论的问题. 难道不是说到目前为止算术是从几何的角度而不是从数论的角度来研究的? 从

[5]见 [113] 第 29-30 页.

[6]这里参考了 Rashed 和 Hozel 的观点, 见 [113] 第 35–37 页.

[7]代数一词来自阿拉伯语单词 al-djabr, 原意是指重组及合并, 阿拉伯数学语境下指移项或合并同类项等方程求解技巧. 这里使用的"代数"一词指其古典含义而并非现代数学中的代数结构.

[8]见 [66] 第 164–165 页.

古到今的文献无不如此. 丢番图自己也不例外, 即便是他的分析只考虑有理数而显得更远离几何一些; 然而 Viète[9]的《*Zetetica*》[10] 将丢番图的方法拓展到连续量, 也就是说几何情形, 这充分地证明了几何在丢番图分析中并未真正缺失."[11] 丢番图方程可以在任意的交换幺环中求解. 特别地, 丢番图方程组的复数解构成了一个复代数簇, 丢番图方程组可以按其定义的复代数簇的几何性质来分类. 在丢番图方程组的几何分类方面, Poincaré 是一个先驱者. 他认为有理系数的双有理变换群自然地作用在丢番图方程上, 从而丢番图方程可以按这个群作用的轨道来分类, 就象二次型可以按整系数线性群的作用来分类那样. 在 [109] 中 Poincaré 考虑了亏格为 0 或 1 的曲线, 也就是有理曲线和椭圆曲线的情形. 事实上, 丢番图经常使用有理变换, 尤其是双有理变换的技巧, 而亏格正是代数曲线的一个基本的双有理不变量. Weil 说: "至于方程的分类, 丢番图完全没有提及, Viète, Fermat 甚至是 Euler 在研究丢番图问题时也没有考虑过分类的问题. 然而在丢番图的著作中却大量出现了相应于亏格为 0 或 1 的代数曲线的方程组, 而且对于这些问题丢番图总是运用同样的方法来解决, 这不得不让人感到惊叹."[12] Bachmakova 认为, 尽管《算术》中没有真正意义上的几何, 但是其间却蕴含了代数几何的概念和方法, 她甚至大胆地猜测丢番图掌握了一些代数几何的结论, 只是局限于纯代数和数论的框架, 而没有进行几何解释[13]. 如果说将代数几何这一学科溯源到丢番图的工作也许是对历史的一种过度解读, 代数几何却是理解丢番图分析最有效也最自然的工具.

从代数几何的观点来看, 丢番图方程对应于有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的代数簇, 丢番图方程的有理数解则对应于代数簇的有理点, 从而丢番图问题就相当于研究 $\mathbb{Q}$ 上的代数簇有理点集的性质. 给定 $\mathbb{Q}$ 上的代数簇 X, 关于 X 典型的丢番图问题包括: X 是否有有理点? X 的有理点集是否是有限集? X 的有理点在复数点集中如何分布? 等等.

假设 X 是 $\mathbb{Q}$ 上至少含有一个有理点的代数曲线. 当 X 的亏格为 0 时, 它双有理等价于射影直线, 从而具有无穷多个有理点. 至于亏格为 1, 即椭圆曲线的情形, Poincaré 运用了椭圆函数来构造曲线的参数方程, 用切割线法 (tangent and secant method)[14] 从一些有理点出发利用椭圆函数参数的加法

[9] 中译韦达.

[10] 见 [123].

[11] 见 [52].

[12] 见 [128] 第 398 页.

[13] 见 [6, §7] 和 [7] 第 28 页.

[14] 感兴趣的读者可以阅读 Rashed 和 Hozel 的数学史著作 [113].

运算生成新的有理点. 之后 Mordell [94] 进一步证明了椭圆曲线的有理点构成一个有限生成 Abel 群, 他还猜测当亏格大于或等于 2 的时候曲线的有理点集是有限集 (Mordell 猜想). 从此, 丢番图方程所对应的代数簇的几何性质决定该方程的算术性质逐渐成为普遍接受的一种观点.

将丢番图方程按几何不变量来分类是丢番图问题研究上的重大革新. 同样亏格的代数曲线, 甚至是同构的代数曲线, 其对应的丢番图方程可以具有非常不同的形式; 反过来, 看起来非常相似的丢番图方程, 定义的代数曲线可以具有非常不同的算术性质. 比如著名的费马大定理断言, 对任意整数 $n \geqslant 3$, 射影空间 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ 中的曲线

$$X_n = \{(x:y:z) \mid x^n + y^n = z^n\}$$

没有非平凡[15]的有理点. 注意到 Fermat 曲线 X_n 的亏格等于

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

所以 Mordell 猜想推出, 当 $n \geqslant 4$ 时 X_n 只有有限多个有理点. 当 $n = 1$ 或 2 时曲线 X_n 的亏格为 0, 所以同构于射影直线而具有无穷多个有理点. 费马大定理这个命题来自 Fermat 阅读《算术》第二卷时的旁注[16]:“*将立方数分解成两个立方数之和, 或更一般地将高于二次的幂数分解成两个同次幂数之和, 都是不可能的. 我确信找到了一个美妙的证法, 但页边的空白太窄, 容纳不下.*”但 Fermat 传世的资料中只有 $n = 4$ 时命题的证明. 由于大于 2 的自然数要么被 4 整除, 要么具有一个奇素因子. Fermat 的结果说明, 要证明费马大定理, 只需要验证对任意奇素数 p, 曲线 X_p 没有非平凡有理点. Fermat 的旁注困扰了数学界三百余年: 命题提出后的两个世纪之内只有 $p = 3, 5, 7$ 的情形得到了解决; 1983 年 Faltings [47] 证明了 Mordell 猜想; 1987 年 Adleman, Heath-Brown [2] 和 Fouvry [54] 证明了对无穷多个奇素数 p 曲线 X_p 没有非平凡有理点; 最终费马大定理迟至二十世纪末才由 Wiles [129] 所证明 (Taylor 和 Wiles 合作弥补了原证的一个漏洞 [120]). Mordell 猜想和费马大定理的证明结合了代数几何、代数数论、Arakelov 理论, Galois 表示理论等学科深刻的概念和方法, 属于算术几何 (arithmetic geometry) 领域的高峰之作. 毫不夸张地说, 是人类对丢番图问题孜孜不倦的追求推动了算术几何领域的诞生和发展.

---

[15] 即射影坐标不含有 0.

[16] Fermat 的手迹如今已经遗失了, 这个记载来自于 Pierre de Fermat 的儿子 Samuel de Fermat 1670 年编辑的其父对《算术》一书的注记.

今天回过头来看 Fermat 的观点, 似乎觉得几何方法在数论中的应用应该是水到渠成的事情. 然而算术几何作为一个学科的产生却是相当晚的: 其始于二十世纪初, 成型于二十世纪中叶, 以后逐渐繁盛而成为数学的一个主流领域. Geometry 一词来自古希腊语 γεωμέτρης, 原意是指测地术. 徐光启和利玛窦 (Matteo Ricci) 翻译的欧几里得《原本》, 中译版包含前六卷, 恰是平面几何部分, 因此定名为《几何原本》, 这是 geometry 翻译成几何的由来. 中国古算中常用"几何"一词来就数量提问, 这个翻译恰与古希腊文原意暗合. 然而历史上 geometry 一词的含义却随着数学的发展不断丰富, 欧几里得《原本》中的几何已脱离了数量而代之以公理体系和逻辑推导[17], Descartes 的坐标法又反过来建立了欧几里得几何的实数模型. 作为学科名称, 算术几何学中的"几何"不仅仅是象 Fermat 指出的那样将连续量引入丢番图分析, 它指的是数系及其衍生集合的结构和体系.

Neukirch 在《代数数论》[18]一书的前言中说: "*数论在数学中占有一个理想的地位, 就象数学在科学中一样. 没有任何义务去满足外来的需求, 确立目标的过程完全是自主的, 从而可以保护其不受干扰的和谐.*" 事实上, 正如数学为自然科学和社会科学提供了模拟的手段, 数系及其衍生的集合为数学的各个分支提供了模型. 然而科学发展的客观规律却是实践先于理论, 现象先于模型. 科学与数学的关系不仅仅是科学利用数学方法来构造模型解释自然和社会现象并推导其规律, 很多时候科学的问题和方法也为数学的发展提供动力和灵感. 没有测量和天文学的需求, 几何学就不会得到发展; 没有经典物理学的兴起, 就难以想象微积分的诞生. 数论大抵也是如此, 与数学的各个分支有着千丝万缕的联系, 给别的学科提供模型的同时也受到别的学科的启发. 所谓"不受干扰的和谐", 也仅限于问题的提出, 一旦尝试解决问题, 必然受到数学各个分支发展的影响. 算术几何的产生, 有几个机缘: 一、群论和近世代数的兴起为代数数论和代数几何的发展铺平道路, 这个过程从十八世纪开始一直延续到二十世纪初; 二、微分几何和多复变函数论的发展为代数簇的解析性质研究提供了必要的工具, 这个过程从十八世纪开始一直延续到二十世纪中叶; 三、层论和同调代数的发展和完善为概形论的产生创造条件, 这个过程从十九世纪末一直延续到二十世纪中叶; 四、二十世纪中叶 Grothendieck 概形论的产生, 为有理数域及整数环上的代数簇的研究提供了合适的框架. 可以看到, 算术几何的萌芽, 产生和兴起正是伴随着这些学科

[17] 中华文化圈普遍采用了徐光启和利玛窦的翻译, 唯越南语意译成 hình học (形学).

[18] 见 [98].

的发展和完善的.

作为一个新兴分支, 算术几何是如何做到在短短半个世纪之内一蹴成为数学的主流方向之一? 要回答这个问题, 还得从数学这个学科自身的特点说起. 通常认为数学是研究数与形的学科, 这个说法言简而意赅: 数, 可以认为是计数, 数量, 代数, 也可以理解成数系及其衍生集合; 形, 可以认为是形状, 空间, 几何, 也可以理解成函数、关系和结构. 数形结合是数学的基本思想, 数学中几乎每一个重大突破都伴随着新结构的发现, 而这些新结构的基础模型往往是数系及其衍生集合. 关于数形结合华罗庚有一个非常生动的描述: "*数与形, 本是相倚依, 焉能分作两边飞. 数缺形时少直觉, 形少数时难入微. 数形结合百般好, 隔离分家万事非. 切莫忘, 几何代数统一体, 永远联系, 莫分离!*"[19] 如今基础数学的研究, 最引人入胜之处就在于纷繁复杂的数学对象背后所隐藏的结构. 而算术几何的基本方法正是发掘和研究数域及其衍生集合的新结构, 这和数形结合的先进数学思想高度吻合.

算术几何的萌芽可以追溯到十九世纪晚期 Dedekind, Weber [41] 和 Kronecker [80] 的工作. 他们注意到了有理函数域和代数数域之间奇妙的相似性. Dedekind 和 Weber 工作的一个主要动机是黎曼曲面论的代数化. 黎曼曲面这个概念最早是由 Riemann 引进的, 用来研究全纯函数解析延拓的奇点与分支. 在 Riemann 之前的时代, 代数几何的研究往往集中在复射影平面中的曲线之上, 主要使用射影几何的方法. 黎曼曲面论将复射影曲线看作实曲面用分析的方法来研究, 并与 Abel, Jacobi, Weierstrass 和 Riemann 等人发展的代数函数论联系起来, 在当时是全新的思想. Riemann 的方法考虑一般的解析函数, 这些函数通常是超越函数. 但用超越方法却可以得到一些深刻的纯代数结论, 比如 Riemann-Roch 定理等等, 这在当时的射影曲线论中属于革新性的成果. 这些代数结果研究方法的代数化要等到 Dedekind 和 Weber 的工作 [41] 才算是真正完成. Bourbaki 数学史一书中说[20]:"*即使对于现代人来讲, Riemann 的超越化方法 (尤其是他对拓扑概念和 'Dirichlet 原则' 的运用) 似乎是建立在不确定的基础之上的; 尽管 Brill 和 Noether*[21]*比大部分现代 '综合' 几何学家要认真, 他们的分析几何推理仍不能说是无懈可击的. 正是为了给平面代数曲线论建立一个严格的基础, Dedekind 和 Weber 才在 1882 年发表了关于这个论题的大作......他们的工作最本质的想法是在一元代数函数论中模仿 Dedekind 之前刚刚发展的代数数论. 为达到这个目*

[19] 见 [71] 第 37 页.
[20] 见 [25] 第 133 页.
[21] 见 [28].

的, 他们首先采用了 '仿射' 的观点 (与之相反, 他们的同代人总是将代数曲线浸入复射影空间来考虑), 然后他们从有理函数域 $\mathbb{C}(X)$ 的某个有限扩张 K 和 K 中的 '整代数函数' 环 A, 也就是说在多项式环 $\mathbb{C}[X]$ 上是整元的那些代数函数组成的环出发, 绕开了所有的拓扑方法, 得到了他们的主要结果: A 是 Dedekind 环. 所有 '附注 XI'[22] 中的结果, 经过适当改动后都能适用 (甚至更为简单, Dedekind 和 Weber 意识到了这一点 (见 [42] 第一卷第 268 页), 即便并不确切地知道其原因). 这样他们证明了他们的定理是双有理不变的 (也就是说仅依赖于域 K), 从而不依赖于一开始选取的无穷远线[23]. 对我们来说更有意思的是, 为了定义相应于 K 的 '黎曼曲面' (特别是不能对应于 A 的理想的 '无穷远点'), 他们引进了域 K 的位这一概念: 这样他们便面临 1940 年 Gelfand 创造赋范代数论时的局面, 也就是说域 K 中的元素不是预先定义的函数, 但希望将它们看作是某个空间上的函数; 为了得到这些假想函数的定义空间, 他们首次将传统的习惯反过来, 对一个点 x 赋以一个集合 E, 并对从 E 到某个集合 G 的一些映射组成的集合 $\mathscr{F}$ 赋以从 $\mathscr{F}$ 到 G 的映射 $f \mapsto f(x)$, 即将 f 看成变量而将 x 看成函数 (这个思想被 Gelfand 重新运用, 如今已成为当代数学中司空见惯的方法)." 正是这个思想上的革新将数论和代数几何的研究联系在了一起.

函数域与数域的相似性迅速引起了数学界的兴趣. Hilbert 在 1900 年数学家大会上提出了二十三个问题, 其中第十二问题的表述中提到: "问题和函数论有关的部分, 研究人员将在这个因发现了一元代数函数论和代数数论之间显著的相似性而格外引人入胜的领域中自由地探索. Hensel 建立并研究了数论中类似于代数函数级数展开的构造[24]; 而 Landsberg 则研究了代数函数论中的 Riemann-Roch 定理[25]. 接下来 Riemann 面的亏格与代数数域的理想类数显然是相似的…… 我们看到, 在上述问题中基础数学的三个分支, 即数论、代数和函数论, 是紧密联系着的."[26] Hilbert 敏锐地感觉到了 Landsberg 对 Riemann-Roch 定理的代数证明中的算术意味反过来暗示了代数整数环之上应该具有一些之前没有发现的几何结构. 其后 Weil [124] 用赋值理论刻画了一元有理函数论和代数数论之间的平行对应关系, 从而在代数数域上真正确立了新的几何结构. 他在 1950 年世界数学家大会上说: "我

[22] 这是 Dedekind 对 Dirichlet 的著作 *Vorlesungen über Zahlentheorie* 的重版和附注, 见 [42] 第 III 卷第 1-222 页.

[23] 这是射影几何的标准技巧.

[24] 即 p-进数域.

[25] 见 [83].

[26] 见 [68] 第 89–90 页.

们是时候意识到在《*Grundzüge*》中 Kronecker 不仅仅是想对 Dedekind 终身致力研究的理想理论中的基础问题给出自己的论述, 他的立意更为高远. 他实际上是试图描述和开始建立数学的一个新学科, 同时以数论和代数几何为其特例."[27] Weil 还研究了有限域上光滑射影簇的 zeta 函数并猜想它是有理函数, 而且和 Riemann ζ-函数具有类似的性质, 比如解析延拓、函数方程和 Riemann 假设等. 注意到 Weil 的 zeta 函数是用光滑射影簇取值在一些有限域中的点的个数来定义的, 因而具有很强的丢番图问题的意味. 更重要地, Weil 猜测, 如果该代数簇 X 是某个代数整数环上定义的光滑射影簇 $\mathscr{X}$ 的约化, 那么 X 的 zeta 函数可以写成一些多项式的交错积

$$\prod_{i=0}^{d} P_i(T)^{(-1)^{i+1}},$$

其中 P_i 的次数即是 $\mathscr{X}$ 对应的复流形的第 i 个 Betti 数, 这便将代数拓扑、代数几何和数论三个学科联系在了一起[28]. Weil 提出用一套纯代数的语言将复流形和微分几何的构造推广到一般的域, 甚至是一般的交换幺环上. Weil 的这个纲领直接推动了 Grothendieck 概形论的产生. *Éléments de géométrie algébrique* 的前言中说: "至于 A. Weil 的影响, 只须说这部著作的主要动机是发展定义最一般的 'Weil 上同调' 所需要的工具集, 并试图建立证明他在丢番图几何中的著名猜想所需要的所有形式性质."[29]

数学上新结构的发现并非易事, 需要多代数学家持续不懈的努力, 往往还要耐心等待数学语言的成熟. Grothendieck 在《收获与播种》中说:"事物的结构不是可以被人们 '发明' 的东西. 我们只能耐心地去更新 (自己的认识), 谦卑地去认识它, 去 '发现' 它. 如果说在这个过程中创造性发挥了作用, 或者说有时我们需要象铁匠或不知疲倦的建筑者那样工作, 也不过是 '锻造' 或 '装配' 一些 '结构'. 这些结构从来没有等着我们来赋予其生命, 再活成它们应该有的样子. 只是在我们想要尽可能准确地描述我们所发现和探查的事物的时候, 如果这个结构犹抱琵琶半遮面, 我们会试图去感受并用也许更为生涩的语言去描绘其轮廓. 由是我们需要不断 '创造' 新的语言去越来越精确地描述数学对象所具有的隐秘结构, 并用这个语言去一块块地逐渐 '构造' 出可以概括所理解到和看到的那些东西的理论. 在这个过程中有一个理解事物和所理解的事物之表达之间连续不断的来回往复, 其媒介正是工作中在现

[27] 见 [126] 第 90 页.
[28] 见 [125].
[29] 见 [63] 第 I 卷第 9 页.

时需求的常态压力下不断完善和重构的语言."[30]

概形论产生的另一个重要动力是层论. 层论是 Leray [87] 在代数拓扑中引进的一个工具, 用来内蕴地构造拓扑空间的上同调. 层这个概念的原型来自拓扑空间上连续函数的构造. 给定拓扑空间的一些开集上的连续函数族, 在重叠之处相同, 那么通过粘贴的方法可以构造这些开集的并集上的唯一的连续函数延拓前述连续函数族中的每一个函数. 具有类似的唯一粘贴性质的代数构造叫做拓扑空间上的层. 从这样的观点出发用同调代数方法可以直接构造拓扑空间各种系数的上同调, 而不需要借助于单纯形分解等外蕴工具. 之后层的概念被 Henri Cartan [30] 应用在复解析几何上. 他研究了复解析空间上的模层和理想层, 提出了凝聚层的概念. 1955 年, Serre 发表了 *Faisceaux algébriques cohérents* 一文 [115], 将凝聚层的概念应用在代数簇上.

为什么说层论对于概形论来说是关键的语言工具? 在概形论产生之前, 代数几何的研究对象主要是代数闭域上的代数簇. 在这样的框架下, Hilbert 零点定理建立了代数簇的点与其坐标环的极大理想之间的一一对应关系, 然而在一般交换幺环的情形, 仅用极大理想构成的拓扑空间来模拟的话会丢失一部分信息. 熟悉微分流形的读者知道, 相同的拓扑空间上可以具有不同的微分结构, 对应于不同的光滑函数层; 反过来给定一个环层空间, 即带一个环层的拓扑空间, 如果这个环层局部同构于欧氏空间开集上的光滑函数层的话, 那么它便决定了拓扑空间上的一个微分结构. Grothendieck 正是用局部环层空间作为框架来研究代数几何. 和经典的连续函数层或解析函数层相比, 一般的局部环层可以描述在不同的点处取值在不同的域中的 "函数", 这对于概形的构造来说是至关重要的.

在 Grothendieck 看来, 数学中的对象和问题应该将看成一个整体放在合适的范畴论框架中去研究. 范畴是和集合类似的一种结构, 由一些对象组成, 但范畴比集合多一层结构: 对象之间允许定义一些态射. 比方说交换幺环的整体和它们之间的环同态就构成一个范畴, 集合和它们之间的映射也构成一个范畴. 范畴之间也有类似于集合映射的概念, 在范畴论中叫做函子. 丢番图方程就是一个例子. 给定一个带 n 个变量的丢番图方程组 F, 对任意交换幺环 A, 用 $F(A)$ 表示方程组在 A^n 中的解集; 如果 $f: A \to B$ 是环同态, 那么 f 诱导从 A^n 到 B^n 到映射, 将 $F(A)$ 中的元素映成 $F(B)$ 的元素. 这样就定义了一个从交换幺环范畴到集合范畴的函子. 通过这样的方法可以

[30] 见 [64] §2.9

将丢番图问题抽象出来: 从交换幺环范畴到集合范畴的函子实际上可以看作是论域为交换幺环的数学问题.

Grothendieck 的函子化思想和丢番图方程的几何化有什么关系呢? 事实上, 从交换幺环的范畴到集合范畴的函子也构成一个范畴, 态射是函子间的自然变换. 从这个函子范畴到由一些几何实体 (比如微分流形、解析流形、局部环层空间和拓扑空间等) 组成的范畴的每一个函子都决定了论域为交换幺环的数学问题的一种几何实现. 不同的函子对应于不同角度的几何实现, 这就好比摄影师手中的相机, 从不同的角度去记录这个世界, 得到的影像千差万别, 可谓 "横看成岭侧成峰, 远近高低各不同". 概形论就是函子范畴在局部环层空间范畴中的一种几何实现, 对一大类函子 (包括所有丢番图方程决定的函子) 来说, 这种几何实现是满忠实的, 也就是说这些函子间的自然变换一一对应于相应的局部环层空间的态射. 对于这些函子来说, 它们对应的局部环层空间就好比是全息影像, 既不丢失也不增加信息. 另外, 概形论并非是唯一的几何实现, 纷繁复杂的各种几何实现中体现出来的共性可以在函子范畴中找到共同的根源. Grothendieck 提出了一整套纲领来重建代数几何的基础, 在 Bures-sur-Yvette 的法国高等科学研究所 (IHÉS) 组织了 Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 讨论班. 他的学说给代数几何带来了革命性的影响, 促成了 Deligne 对 Weil 猜想的证明 [43, 44]. Grothendieck 的思想并非真正来自于虚空. 人类在数学上的许多重大突破都来自于研究对象和研究问题的拓展. 研究对象的拓展, 有助于建立新的数学结构; 研究问题的拓展, 有助于将研究问题纳入合适的框架进行分类. 负数、分数、无理数、复数、Galois 理论、Banach 空间、分布、拟微分算子等等无不如此.

丢番图几何的另一个重要工具是高度理论. 高度这个概念可以追溯到 Cantor [29]. 他将代数数的高度 (Höhe) 定义成其整系数极小既约多项式系数绝对值的和加上该极小多项式的次数减 1, 并用高度函数将代数数按复杂度排列来证明代数数集是可数集. 二十世纪初 Borel [14] 对有理数组定义了高度的概念. 但高度函数真正用于丢番图几何的研究却是始于二十世纪中叶 Northcott [99, 100] 和 Weil [127] 的工作. 他们对于有理数域上射影空间的代数点定义了高度函数, 这样可以将许多丢番图问题转化成高度估计的问题.

概形论在代数几何中奠定基础地位的同时, 丢番图问题的几何理论也自然地开始成形和发展. Lang 在 [84] 的前言中说: "对于代数几何来说丢番图

问题是审美上最具有吸引力的部分. 它旨在提出代数方程组在环或域中有解的或者解的多少的判据. 丢番图问题感兴趣的基本环是整数环 $\mathbb{Z}$, 基本域是有理数域 $\mathbb{Q}$. 人们很快发现, 要获得研究一般的问题所需要的技术自由度, 就必须考虑整数环或有理数域上的有限生成代数或有限扩张. 另外还需要考虑有限域, $\mathfrak{p}$-进数域 (包括实数域和复数域), 用来表示问题的局部化.” 概形论为丢番图几何提供了合适的框架, 使得几何方法和思想真正可以应用于丢番图方程算术性质的研究.

回到 Weil 刻画的算术几何图景, 代数曲线和代数数域应该是同一个几何理论不同角度的体现. 特别地, 代数曲线上的闭点对应于代数数域的绝对值. 用概形论的语言来讲, 代数曲线对应于代数整数环的素谱, 因此算术几何应该类似于相对于代数曲线的代数几何. 这个解释有一个缺陷: 代数整数环的极大理想只能代表代数数域的非阿基米德绝对值, 也就是说代数整数环的素谱对应于仿射曲线, 而在概形范畴中没有合适的算术对象对应于射影曲线. 然而代数数域上的乘积公式说明了阿基米德绝对值在数域与函数域的类比中起到重要的作用. 二十世纪七十年代, Arakelov [4, 5] 提出用复解析流形来 “紧化” 概形, 并在算术曲面上建立了算术相交理论, 和射影代数曲面上的相交理论类似. 其后 Gillet 和 Soulé [58] 将算术相交理论推广到一般维数的算术射影簇之上. 自此 Weil 的算术与几何的统一纲领迈出了坚实的一步. 利用算术相交理论, Faltings [49] 将高度的概念推广到算术射影簇子簇的情形, 同时 Philippon [106] 用周形式 (Chow form) 的方法提出了算术射影簇子簇高度的一个等价构造. 之后 Arakelov 理论成为了 Faltings 证明 Mordell 猜想的重要工具.

经过半个世纪的发展, 算术几何成为了枝繁叶茂的数学领域, 取得了令人瞩目的成就. 篇幅所限, 不能在前言中详细讲述这个领域的历史, 但希望可以让读者对其起源有一个初步的了解. 算术几何的特点决定了其与数学其它领域的紧密联系, 这个年轻而充满活力的领域期待着各领域的数学工作者去合作探索. 以下各章中将阐述 Arakelov 几何的背景、语言和基础工具, 并结合作者的研究成果介绍凸几何在 Arakelov 几何中的应用. 第二章讲述连通紧黎曼曲面的代数性质. 通过这些代数性质读者可以了解 Dedekind 和 Weber 用数论方法研究黎曼曲面的动机. 第三章在有理函数域的框架下引入 Arakelov 几何的一些基础构造和方法, 以及 Riemann-Roch 定理的数论解释. 第四章讨论域扩张的算术, 对于非阿基米德绝对值采取了与经典分析类似的 Banach 空间微分学的处理方法. 第五章介绍代数数域上的向量丛并

从博弈论的角度讲述向量丛的 Harder-Narasimhan 理论. 第六章阐述算术射影簇的几何以及 Arakelov 高度. 第七章解释凸分析与代数几何和算术几何的联系. 最后, 在第八章中介绍随机耦合与测度传输在算术几何中的两个应用.

本讲义是在中国科学院数学所讲座 "丢番图问题、算术几何和凸几何" 讲稿的基础上编写的. 数学所讲座面向的是各个不同数学方向的研究生, 我所讲述的内容又涉及到算术几何与凸几何、随机耦合和最优传输等学科的交叉, 因此在篇幅允许的范围内, 写作中力求做到详细而精炼地介绍所用到的大学本科数学基础知识之外的概念和结果, 与经典教科书处理方法不同的地方适当地介绍了一些细节. 前五章的内容只假定读者具有大学数学本科知识背景. 后三章的部分内容要求读者了解概形理论的基本概念. 为方便非基础数学专业的读者, 讲义中用到的交换代数和域扩张论的知识放在附录之中. 希望可以促进不同学科研究生之间的相互了解与合作. 非常感谢讲座组织者的邀请, 以及讲座系列丛书的编委对我的写作工作的理解与支持. 另外, 我之前指导和正在指导的部分博士和硕士研究生校阅了讲义的初稿, 在此一并向他们致谢.

2 紧黎曼曲面的代数性质

算术几何起源于连通紧黎曼曲面整体不变量研究的数论化. 黎曼曲面是微分几何和复解析几何中重要的研究对象. 从复解析几何的角度来看, 黎曼曲面指的是一维复解析流形. 如果不考虑黎曼曲面的复解析结构而只考虑微分结构, 那么黎曼曲面是实二维微分流形, 这也正是 "曲面" 一词的由来. 黎曼曲面和一般的实二维微分流形最本质的区别在于其全纯结构. 最简单的黎曼曲面是复平面 $\mathbb{C}$ 中的开集. 从拓扑学或实分析的角度来讲, 这和 Euclid 空间 $\mathbb{R}^2$ 中的开集并没有本质区别; 然而从复分析的角度来看, 复平面中开集上的全纯函数环与光滑函数环具有非常不同的性质. 比方说, 全纯函数在连通开集上的解析延拓具有唯一性, 而光滑函数单位分解定理则说明了光滑函数的延拓具有相当的任意性. 所以复解析流形和微分流形区别的关键就在于研究的函数空间不同. 本章将简介黎曼曲面的定义及其一些代数性质, 为后文中函数域与数域的算术理论的介绍作铺垫. 对黎曼曲面论感兴趣的读者可以参考以下著作. 首先是 Guenot 和 Narasimhan 的文章 [65], 在微分几何和复分析的框架下用浅显易懂的语言来阐述黎曼曲面论的一些深刻

结果, 比如 Riemann-Roch 定理和 Behnke-Stein 定理 (开黎曼曲面是 Stein 流形). Riemann 曲面论更系统的介绍可以参考 Jost 的教材 [72], 从多个角度 (代数拓扑, 黎曼几何, 椭圆微分方程, 泛函分析等等) 系统介绍了黎曼曲面论研究的各种方法和一些重要结论, 比如单值化定理, Teichmüller 定理, Riemann-Roch 定理等等. Riemann 曲面的代数方法可以参考 Miranda [93] 的著作.

2.1 全纯函数芽

若 U 是复平面 $\mathbb{C}$ 的非空开子集, 用 $\mathcal{O}(U)$ 表示 U 上的全纯函数组成的集合. 在函数的加法和乘法运算下 $\mathcal{O}(U)$ 构成一个交换幺环. 另外, 从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathcal{O}(U)$ 将 $w \in \mathbb{C}$ 映为恒取值 w 的全纯函数的映射是环同态, 从而赋予了 $\mathcal{O}(U)$ 一个 $\mathbb{C}$-代数结构.

对任意 $z_0 \in \mathbb{C}$, 令 $\mathcal{O}_{z_0}$ 为 z_0 处的**全纯函数芽**组成的集合. 更具体地讲, 在无交并集

$$\coprod_{z_0\ \text{的开邻域}\ U} \mathcal{O}(U)$$

上考虑等价关系 $\sim$, 使得 $(f \in \mathcal{O}(U)) \sim (g \in \mathcal{O}(V))$ 当且仅当存在 z_0 的开邻域 W 满足 $W \subset U \cap V$ 且 $f|_W = g|_W$, 那么 $\mathcal{O}_{z_0}$ 便定义为商集

$$\coprod_{z_0\ \text{的开邻域}\ U} \mathcal{O}(U) \Big/ \sim .$$

如果 U 是 z_0 的开邻域且 f 是 U 上的全纯函数, 用 f_{z_0} 来表示 f 在 $\mathcal{O}_{z_0}$ 中的等价类.

全纯函数环 $\mathcal{O}(U)$ (U 取遍 z_0 的开邻域) 上的 $\mathbb{C}$-代数结构自然地诱导了 $\mathcal{O}_{z_0}$ 上的 $\mathbb{C}$-代数结构. 对任意 z_0 的开邻域 U, 从 $\mathcal{O}(U)$ 到 $\mathcal{O}_{z_0}$ 的将全纯函数 $f \in \mathcal{O}(U)$ 映为其等价类 f_{z_0} 的映射是 $\mathbb{C}$-代数同态. 解析延拓的唯一性说明, 如果 U 是 z_0 的连通开邻域, 那么这个同态是单同态. 特别地, 从一元多项式代数 $\mathbb{C}[T]$ 到 $\mathcal{O}_{z_0}$ 将 $P \in \mathbb{C}[T]$ 映为全纯函数

$$(z \in \mathbb{C}) \longrightarrow P(z - z_0)$$

在 $\mathcal{O}_{z_0}$ 中等价类的映射是 $\mathbb{C}$-代数的单同态. 另外, 全纯函数在 z_0 点的幂级数展开定义了从 $\mathcal{O}_{z_0}$ 到形式幂级数环 $\mathbb{C}[\![T]\!]$ 的 $\mathbb{C}$-代数单同态, 将全纯函数

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

的等价类映为形式幂级数

$$a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n + \cdots .$$

从而全纯函数芽环 $\mathcal{O}_{z_0}$ 是整环.

2.2 全纯函数芽的赋值

上节中介绍了全纯函数芽环的概念. 如果考虑复平面开集上的其他函数, 比如连续函数, 光滑函数等, 也可以类似地考虑连续函数芽, 光滑函数芽等等. 但全纯函数芽环的特殊之处在于, 全纯函数零点的阶数定义了全纯函数芽环上的离散赋值. 事实上, 若 $z_0 \in \mathbb{C}$, 从全纯函数芽环 $\mathcal{O}_{z_0}$ 到 $\mathbb{C}$ 有自然的 $\mathbb{C}$-代数满同态 ev_{z_0}, 将全纯函数 f 的等价类映为 $f(z_0)$, 从而 $\mathfrak{m}_{z_0} = \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_{z_0})$ 是 $\mathcal{O}_{z_0}$ 的一个极大理想. 如果 f 是 z_0 的某个开邻域上的全纯函数, 在 z_0 点处的值非零, 那么 f 在 $\mathcal{O}_{z_0}$ 中的等价类可逆, 这说明了 $\mathfrak{m}_{z_0}$ 是 $\mathcal{O}_{z_0}$ 唯一的极大理想, 也就是说 $\mathcal{O}_{z_0}$ 是局部环. 另外, 如果 f 是 z_0 的某个开邻域上的全纯函数, 使得 $f(z_0) = 0$, 那么 f 的形式幂级数展开形如

$$f(z) = a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots .$$

这说明 f 可以写成 $f(z) = (z - z_0)g(z)$ 的形式, 其中 g 是 z_0 的某个开邻域上的全纯函数. 从而 $\mathfrak{m}_{z_0}$ 是主理想, 其一个生成元是多项式函数 $z \mapsto (z - z_0)$ 的等价类. 所以 $\mathcal{O}_{z_0}$ 是离散赋值环[31].

设 z_0 为复平面 $\mathbb{C}$ 的元素. 令 $\mathscr{M}_{z_0}$ 为 $\mathcal{O}_{z_0}$ 的分式域并用

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{z_0} : \mathscr{M}_{z_0} &\longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \\ \alpha &\longmapsto \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid \alpha \in \varpi_{z_0}^n \mathcal{O}_{z_0}\} \end{aligned}$$

来表示 $\mathcal{O}_{z_0}$ 所对应的离散赋值, 其中 ϖ_{z_0} 是主理想 $\mathfrak{m}_{z_0}$ 的一个生成元. 赋值的基本性质说明, 对任意 $\mathscr{M}_{z_0}$ 中的两个元素 α 和 β 有

$$\mathrm{ord}_{z_0}(\alpha\beta) = \mathrm{ord}_{z_0}(\alpha) + \mathrm{ord}_{z_0}(\beta),$$
$$\mathrm{ord}_{z_0}(\alpha + \beta) \geqslant \min\{\mathrm{ord}_{z_0}(\alpha), \mathrm{ord}_{z_0}(\beta)\}.$$

若 f 是定义在 z_0 的某个开邻域上的全纯函数, 用 $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$ 来简记 $\mathrm{ord}_{z_0}(f_{z_0})$ 并称之为 f 在 z_0 处的**阶**. 注意到 $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$ 总取非负值, $\mathrm{ord}_{z_0}(f) \geqslant 1$ 当且仅当 $f(z_0) = 0$, 而 $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = +\infty$ 当且仅当 f 在 z_0 的某个开邻域中恒取零值.

[31] 见 [24] Chapitre VI, §3, no.6, Proposition 9 或 [92, Theorem 11.1].

2.3 局部环层空间

复平面的开集及其上的全纯函数实际上构成了一个所谓局部环层空间的结构. 设 X 为拓扑空间. 如果对任意 X 的开子集 U 给定一个交换幺环 $\mathcal{O}_X(U)$, 并对 X 的任意一对满足包含关系 $U \supset V$ 的开子集 U 和 V 指定一个幺环同态 (称为**限制同态**)

$$R_{U,V} : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V),$$

使得 $R_{V,W} \circ R_{U,V} = R_{U,W}$ 对于任意满足关系 $U \supset V \supset W$ 的 X 的开子集 U, V 和 W 成立, 那么称 $\mathcal{O}_X$ 为 X 上的**环预层**. 倘若 U 和 V 是 X 的开集, 使得 $U \supset V$, 且 s 是 $\mathcal{O}_X(U)$ 中的元素, 那么 s 在映射 $R_{U,V}$ 下的像一般简记成 $s|_V$. 给定 X 上的环预层, 如果对于任意 X 中的开集 U 以及 U 的任意开覆盖 $(U_\ell)_{\ell \in I}$, 映射

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \left\{ (s_\ell)_{\ell \in I} \in \prod_{\ell \in I} \mathcal{O}_X(U_\ell) \,\middle|\, \forall\, (j,k) \in I^2,\, s_j|_{U_j \cap U_k} = s_k|_{U_j \cap U_k} \right\},$$

$s \mapsto (s|_{U_\ell})_{\ell \in I}$ 是双射 (该条件称为**粘贴性质**), 则称 $\mathcal{O}_X$ 为 X 上的**环层**, 并称 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为**环层空间**. 注意到空集 $\varnothing$ 也是 X 的开子集, 约定 $\mathcal{O}_X(\varnothing)$ 为零环, 也就是说只含有一个元素的环. 熟悉范畴论的读者知道, 零环是交换幺环范畴的终对象, 也就是说从任意一个交换幺环到零环有唯一的幺环同态.

例 2.3.1. 不难看出, 复平面开子集上的全纯函数环便构成一个环层结构, 从而可以将复平面的开子集看作是环层空间. 更一般地, Euclid 空间开子集上各式各样的函数环, 比如连续函数环, 可微函数环等等, 也构成一些环层结构, 这些环层蕴含了拓扑空间的几何信息.

给定一个环层空间 $(X, \mathcal{O}_X)$, 环层 $\mathcal{O}_X$ 具有类似于全纯函数芽环的构造, 对任意 $x \in X$ 可定义一个交换幺环

$$\mathcal{O}_{X,x} := \coprod_{x\text{ 的开邻域 }U} \mathcal{O}(U) \Big/ \sim,$$

其中 $\sim$ 是上式中无交并集合上的等价关系, 使得

$$(a \in \mathcal{O}(U)) \sim (b \in \mathcal{O}(V))$$

当且仅当存在 x 的开邻域 W 满足 $W \subset U \cap V$ 且 $a|_W = b|_W$. 如果对于任意 $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ 都是局部环, 也就是说 $\mathcal{O}_{X,x}$ 具有唯一的极大理想, 就说

$(X, \mathcal{O}_X)$ 是**局部环层空间**. 复平面的开集 X 及其上的全纯函数环层便构成一个局部环层空间, 称为 X **决定的局部环层空间**.

设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为局部环层空间. 对任意 $x \in X$, 用 $\mathfrak{m}_{X,x}$ 表示 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的极大理想, $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ 表示其剩余类域. 设 U 为 X 的开集, $s \in \mathcal{O}_X(U)$, 对任意 $x \in X$, 用 s_x 表示 s 在局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 中的像, 用 $s(x) \in \kappa(x)$ 表示 s_x 模 $\mathfrak{m}_{X,x}$ 的剩余类. 这样便可以将 s 看作定义在 U 上并取值在各个剩余类域中的 "函数".

注 2.3.2. 在复平面的情形, 每个点处全纯函数芽环的剩余类域都等于复数域 $\mathbb{C}$. 相应地, 全纯函数都是复值函数. 在代数几何或非阿基米德赋值域的解析几何中, 仅用取值在同一个域中的函数难以刻画所研究的对象的全部几何性质, 因此局部环层空间的概念是这些几何对象研究中的必要工具.

给定两个环层空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{O}_Y)$, 所谓从 $(X, \mathcal{O}_X)$ 到 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 的**态射**, 是指如下结构:

(1) 拓扑空间 X 和 Y 之间的连续映射 $f : X \to Y$,

(2) 对任意 Y 的开子集 U, 从 $\mathcal{O}_Y(U)$ 到 $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ 的幺环同态 $f_U^\sharp$, 使得对于任意满足 $U \supset V$ 的 Y 的开子集 U 和 V 有

$$\forall\, s \in \mathcal{O}_Y(U), \quad f_U^\sharp(s)|_{f^{-1}(V)} = f_V^\sharp(s|_V),$$

也就是说使得下列图表交换.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f_U^\sharp"] \arrow[d, "R_{U,V}"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d, "R_{f^{-1}(U),f^{-1}(V)}"] \\ \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f_V^\sharp"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \end{tikzcd}$$

注 2.3.3. 在描述环层空间的时候, 通常用代表拓扑空间部分的符号来简记整个环层空间, 需要标记结构环层的时候往往用符号 $\mathcal{O}$ 加上代表拓扑空间部分的符号作为下标来表示. 在描述环层空间的态射时, 通常用代表拓扑空间连续映射部分的符号来简记态射的整个结构. 比方说上述环层空间的态射简记为 $f : X \to Y$.

设 $f : X \to Y$ 为环层空间的态射. 如果 f 作为拓扑空间之间的映射是同胚, 而且对任意 Y 的开子集 U, 环同态 $f_U^\sharp$ 都是同构, 就说 f 是环层空间

的**同构态射**. 如果环层空间 X 和 Y 之间存在一个同构态射, 就说它们**同构**. 给定一个环层空间 S, 如果 $f: X \to S$ 是环层空间的态射, 就说 (X, f) 是**S 上的环层空间**. 当关于态射 f 没有歧义的时候也可以简单地说 X 是 S 上的环层空间并将 f 称为 X 的**结构态射**. 如果 (X, f) 和 (Y, g) 是 S 上的环层空间, 所谓从 X 到 Y 的 **S-态射**, 是指使得图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

交换 (也就是说, 使得 $g \circ \varphi = f$) 的环层空间态射 $\varphi: X \to Y$.

设 $f: X \to Y$ 为环层空间的态射, 对任意 $x \in X$, 环同态族

$$f_U^\sharp: \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)), \quad U \text{ 为 } f(x) \text{ 的开邻域}$$

诱导了从 $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ 到 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的环同态, 记作 $f_x^\sharp$. 依定义, $f_x^\sharp$ 将 $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ 在 $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ 中的等价类映为 $f_U^\sharp(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ 在 $\mathcal{O}_{X,x}$ 中的等价类. 如果 X 和 Y 都是局部环层空间, 而且对任意 $x \in X$ 有

$$f_x^\sharp(\mathfrak{m}_{Y,f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X,x},$$

就说 f 是**局部环层空间的态射**. 注意到此时 $f_x^\sharp$ 诱导了剩余类域的同态

$$\kappa(f(x)) \longrightarrow \kappa(x),$$

记作 $f^\sharp(x)$.

例 2.3.4. 一类常见的环层空间由单点集和一个域 k 构成, 记作 $\operatorname{Spec} k$. 作为拓扑空间来说这样的局部环层空间之间并没有区别, 它们是由其环层结构来区分的:

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} k) = k.$$

设 X 为环层空间, 从 X 到 $\operatorname{Spec} k$ 的态射相当于指定从 k 到 $\mathcal{O}_X(X)$ 的一个环同态, 也就是说指定 $\mathcal{O}_X(X)$ 上的一个 k-代数结构. 此时对于每个 X 的开子集 U, 复合环同态

$$k \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{R_{X,U}} \mathcal{O}_X(U)$$

确定了 $\mathcal{O}_X(U)$ 上的一个 k-代数结构. 所有的限制同态

$$R_{U,V}: \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V), \quad \text{其中 } U \text{ 和 } V \text{ 是 } X \text{ 的开子集}, U \supset V,$$

都是 k-代数同态. 由于 k 是一个域, 如果 X 是局部环层空间, 那么所有从 X 到 $\operatorname{Spec} k$ 的环层空间态射都是局部环层空间态射. 特别地, 若 X 是复平面的开子集, 那么从 X 决定的局部环层空间到 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ 有自然的态射.

注 2.3.5. 设 X 和 Y 为复平面的开子集决定的局部环层空间, $f: X \to Y$ 为局部环层空间的 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$-态射. 倘若 U 是 Y 的开子集, $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, 那么

$$\forall\, z \in f^{-1}(U), \quad f_U^\sharp(s)(z) = s(f(z)). \tag{2.1}$$

这说明了这个局部环层空间的 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$-态射是被其拓扑空间连续映射的部分所决定的. 当然并非所有的连续映射都能决定从 X 到 Y 的局部环层空间 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$-态射. 事实上, 连续映射 $f: X \to Y$ 决定了局部环层空间的一个 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$-态射当且仅当它是全纯函数.

2.4 黎曼曲面

所谓**黎曼曲面**, 是指局部同构于复平面开集的 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ 上的局部环层空间. 换句话说, 黎曼曲面是一个 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ 上的局部环层空间 X, 使得对任意 $x \in X$ 都存在 x 的一个开邻域 U, 作为 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ 上的局部环层空间与复平面的某个开子集同构. 如果 X 和 Y 是两个黎曼曲面, 从 X 到 Y 的局部环层空间 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$-态射称为从 X 到 Y 的**全纯映射**. 如果两个黎曼曲面之间的某个全纯映射是 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ 上局部环层空间的同构, 则说它是**双全纯映射**.

设 X 为黎曼曲面, U 为 X 的开子集, $\mathcal{O}_X(U)$ 通常简记为 $\mathcal{O}(U)$, 其中的元素称为 U 上的**全纯函数**. 类似地, 若 $x \in X$, 那么 $\mathcal{O}_{X,x}$ 通常简记为 $\mathcal{O}_x$. 由于黎曼曲面局部同构于复平面的开集, 由 §2.2 知 $\mathcal{O}_x$ 是离散赋值环. 我们用 $\mathfrak{m}_x$ 来表示 $\mathcal{O}_x$ 唯一的极大理想并用 ϖ_x 来表示主理想 $\mathfrak{m}_x$ 的一个生成元. 令 $\mathscr{M}_x$ 为离散赋值环 $\mathcal{O}_x$ 的分式域并用 $\operatorname{ord}_x: \mathscr{M}_x \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ 来表示 $\mathcal{O}_x$ 对应的离散赋值, 也就是说

$$\forall\, \alpha \in \mathscr{M}_x, \quad \operatorname{ord}_x(\alpha) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid \alpha \in \varpi_x^n \mathcal{O}_x\}.$$

如果 $f: X \to Y$ 是两个黎曼曲面之间的全纯映射, $x \in X$, $y = f(x)$, 那么 $\mathbb{C}$-代数同态

$$f_x^\sharp : \mathcal{O}_y \longrightarrow \mathcal{O}_x$$

满足关系 $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_y) \subset \mathfrak{m}_x$ (依定义全纯映射是局部环层空间态射). 令

$$\operatorname{mult}_x(f) := \operatorname{ord}_x(f_x^\sharp(\varpi_y)),$$

称为 f 在 x 点的**分歧重数**. 特别地, 当 Y 是复平面的开集时, 由 (2.1) 知对任意 $x \in X$ 有

$$\mathrm{mult}_x(f) = \mathrm{ord}_x(f - f(x)). \tag{2.2}$$

注 2.4.1. 与复平面开子集的情形类似, 全纯映射作为局部环层空间的态射是由其拓扑空间连续映射的部分所决定的. 特别地, 从黎曼曲面 X 到复平面 $\mathbb{C}$ 的全纯映射集与 $\mathcal{O}(X)$ 之间有自然的一一对应, 将全纯映射 $f : X \to \mathbb{C}$ 对应于 $f_X^\sharp(\mathrm{Id}_\mathbb{C}) \in \mathcal{O}(X)$. 正因如此, 我们将 $\mathcal{O}(X)$ 中的元素称为 X 上的**全纯函数**.

通常的教科书里, 黎曼曲面是定义为一种复解析流形的. 注意到 x 的开邻域和复平面的开子集之间的环层空间同构实际上定义了 x 附近的一个坐标卡. 坐标变换的全纯性由复平面开子集的局部环层空间的 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$-态射的全纯性来保证.

复平面的连通开子集上定义的非零函数, 其零点的集合是复平面的离散子集. 以下命题是这个结论在黎曼曲面论中的版本.

命题 2.4.2. *设 X 和 Y 为黎曼曲面, f 和 g 为从 X 到 Y 的全纯映射. 假设 X 是连通的. 那么集合 $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ 要么是离散集合, 要么等于整个 X.*

证明: 如果 x 是该集合的聚点, 取 x 和 $f(x)$ 适当的连通开邻域并将之等同于复平面的连通开集, 由非零单复变函数零点的离散性知 f 和 g 在 x 的某个开邻域上相等. 这说明了集合

$$\{x \in X \,|\, f \text{ 和 } g \text{ 在 } x \text{ 的某个开邻域上相等}\}$$

是 X 的闭子集, 而按定义它又是开集. 所以它要么是空集, 要么等于 X. 如果这个集合等于 X, 那么 $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ 也等于 X; 否则集合 $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ 没有聚点, 也就是说它是离散集合. □

设 X 和 Y 为黎曼曲面, $f : X \to Y$ 为全纯映射, $x \in X$. 从上述命题可以推出, $\mathrm{mult}_x(f) = +\infty$ 当且仅当 f 在 x 的某个邻域上取常值, 或等价地, f 在 x 所在的连通分支上取常值. 当 $\mathrm{mult}_x(f) < +\infty$ 时, $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{f(x)} \to \mathcal{O}_x$ 是单射. 事实上, 不妨假设 X 和 Y 都是复平面的开集. 若 g 是定义在 $f(x)$ 的某开邻域 U 上的全纯函数, 使得 g 在 $\mathcal{O}_{f(x)}$ 中的等价类非零, 那么函数 g 可以写成

$$g(z) = g_0(z)(z - f(x))^n$$

的形式, 其中 g_0 是使得 $g_0(f(x)) \neq 0$ 的全纯函数. 从而

$$\operatorname{ord}_x(f_U^\sharp(g)) = \operatorname{ord}_x(f_U^\sharp(g_0)) + n \operatorname{ord}_x(f - f(x)) = n \operatorname{mult}_x(f) \neq +\infty,$$

也就是说 $f_x^\sharp(g)$ 是 $\mathcal{O}_x$ 中的非零元. 上述推理说明了, 当 f 在 x 所在的连通分支上不是常值映射时, $f_x^\sharp$ 诱导了分式域的同态

$$\mathscr{M}_{f(x)} \longrightarrow \mathscr{M}_x.$$

我们仍将它记为 $f_x^\sharp$. 另外, 全纯映射 f 在 x 的附近构成一个 $\operatorname{mult}_x(f)$ 叶的分歧覆叠映射.

定理 2.4.3. 设 $f : X \to Y$ 是黎曼曲面之间的全纯映射, $x \in X$. 假设 $\operatorname{mult}_x(f) < +\infty$. 那么存在 x 的开邻域 U, $f(x)$ 的开邻域 U', $0 \in \mathbb{C}$ 的两个开邻域 V 和 V', 以及双全纯映射 $\varphi : U \to V$ 和 $\psi : U' \to V'$ 使得 $\varphi(x) = \psi(f(x)) = 0$ 且

$$\forall\, z \in V, \quad \psi(f(\varphi^{-1}(z))) = z^m \in V',$$

其中 m 是 f 在 x 点的分歧重数.

证明: 不妨假设 X 是 $\mathbb{C}$ 中的单位开球

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

$x = 0$, Y 是 0 在 $\mathbb{C}$ 中的开邻域, 且 $f(0) = 0$. 这样便存在正整数 m 以及 D 上的全纯函数 g, 使得 $g(0) \neq 0$ 且

$$\forall\, z \in D, \quad f(z) = z^m g(z).$$

注意到 $\operatorname{ord}_x(f) = m$, 从而由公式 (2.2) 知 m 等于 f 在 x 处的分歧重数. 由于 $g(0) \neq 0$, 存在 $r \in \,]0,1[$ 以及 $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ 上的全纯函数 h, 使得

$$\forall\, z \in D_r, \quad g(z) = h(z)^m.$$

令 $\varphi : D_r \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) := zh(z)$, 这样便有 $f(z) = \varphi(z)^m$. 而

$$\varphi'(z) = zh'(z) + h(z).$$

所以 $\varphi'(0) = h(0) \neq 0$. 由反函数定理知道 φ 是局部双全纯映射. 在合适的开邻域上等式

$$f(\varphi^{-1}(z)) = z^m$$

成立. $\square$

注 2.4.4. 由于分歧覆叠映射是开映射, 从定理 2.4.3 可以推出, 如果 $f: X \to Y$ 是从连通黎曼曲面 X 到黎曼曲面 Y 的非常值全纯映射, 那么 f 是开映射, 也就是说 X 的开子集在 f 下的像是开集. 另外, 如果 f 是单映射, 那么 f 是从 X 到 $f(X)$ 的双全纯映射; 如果 X 是紧的且 Y 是连通的, 那么 Y 也是紧的, 并且 f 是满射. 将这些拓扑性质应用于 $Y = \mathbb{C}$ 的情形便得到黎曼曲面上全纯函数的**最大值原理**. 设 $f: X \to \mathbb{C}$ 是某连通黎曼曲面 X 上的全纯函数. 如果 f 不是常值函数, 那么 $|f|$ 在 X 上不能取到最大值. 事实上, 假设 $|f|$ 在 $x \in X$ 处取最大值, 那么 $f(X)$ 包含在闭球

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant |f(x)|\}$$

之中, 并含有该闭球边界上的一个点. 然而 $f(X)$ 又是 $\mathbb{C}$ 的开集, 矛盾. 从最大值原理推出, 如果 X 是连通紧黎曼曲面, 那么 f 只能是常值函数.

例 2.4.5. 连通紧黎曼曲面的一个基本的例子是黎曼球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. 作为拓扑空间, 黎曼球面可以用两个复平面的粘贴来构造. 更确切地说, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 等于 $\mathbb{C}^2$ 的子集

$$(\mathbb{C} \times \{1\}) \cup (\{1\} \times \mathbb{C})$$

模去使得

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^\times, \quad (z, 1) \sim (1, z^{-1})$$

的最小的等价关系 $\sim$. 由于映射 $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto z^{-1}$ 是双全纯映射, 将两个复平面决定的局部环层空间粘贴起来便得到一个黎曼曲面. 另一个等价的观点是将 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 看成 $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 模去 $\mathbb{C}^\times$ 的作用而得到的商集, 通常将 $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 的等价类记作 $(z : w)$. 特别地, 我们将形如 $(z : 1)$ 的点看作复平面上的点 z, 而将 $(1 : 0)$ 记作 ∞. 这样也可以将黎曼球面等同于 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 也就是复平面的单点紧化.

考虑从 $\mathbb{R}^3$ 的单位球面

$$S^2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$$

到 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 映射, 将 $(a, b, c) \in S^2$ 映为

$$\Big(\frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c} : 1\Big) \text{ 若 } c \neq 1,$$

映为

$$\Big(1 : \frac{a}{1+c} - i\frac{b}{1+c}\Big) \text{ 若 } c \neq -1.$$

注意到当 $c \notin \{-1, 1\}$ 时有

$$\left(\frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}\right)\left(\frac{a}{1+c} - i\frac{b}{1+c}\right) = \frac{a^2+b^2}{1-c^2} = 1.$$

可以验证这个映射 $S^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 是同胚. 正因如此, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 称作黎曼球面.

命题 2.4.6. 设 X 为连通紧黎曼曲面, $f : X \to Y$ 为从 X 到某黎曼曲面的非常值全纯映射. 对任意 $y \in f(X)$, $f^{-1}(\{y\})$ 是有限集, 并且

$$d_y(f) := \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathrm{mult}_x(f)$$

的值与 $y \in f(X)$ 的选择无关.

证明: 由定理 2.4.2 知, $f^{-1}(\{y\})$ 是紧集 X 的离散子集, 从而是有限集. 由于 X 是连通紧黎曼曲面, $f(X)$ 是 Y 的连通分支. 为证明 $d_y(f)$ 与 $y \in f(X)$ 的选择无关, 只需验证 $y \mapsto d_y(f)$ 是局部常值函数. 不妨设 Y 是 $\mathbb{C}$ 的开子集且 $y = 0$. 设 $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. 对任意 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 令 $m_j = \mathrm{mult}_{x_j}(f)$. 由定理 2.4.3 知存在 $r > 0$ 以及从

$$D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$$

到 X 的全纯映射 φ_j, 满足以下条件:

(1) φ_j 是从 D_r 到 $\varphi_j(D_r)$ 的双全纯映射,

(2) $\varphi_j(0) = x_j$,

(3) $f(\varphi_j(z)) = z^{m_j}$

(4) $\varphi_1(D_r), \ldots, \varphi_n(D_r)$ 两两不交.

由于 X 是紧集, 知

$$f\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \varphi_j(D_r)\right)$$

是 Y 的不包含 y 的闭子集. 从而存在 y 在 Y 中的邻域 V, 使得

$$f^{-1}(V) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \varphi_j(D_r).$$

注意到 $z \mapsto z^{m_j}$ 在 $D_r \setminus \{0\}$ 上是局部双全纯映射, 这说明了对任意 $x \in \varphi_j(D_r) \setminus \{x_j\}$ 有 $\mathrm{mult}_x(f) = 1$. 对任意 $y' \in V \setminus \{y\}$ 有

$$f^{-1}(y') = \bigcup_{j=1}^{n} \{\varphi_j(z_j), \varphi_j(z_j \mathrm{e}^{(2\pi i/m_j)}), \ldots, \varphi_j(z_j \mathrm{e}^{(2\pi(m_j-1)i/m_j)})\},$$

其中 z_j 是 $\varphi_j(D_r)$ 中任意一个使得 $f(z_j) = y'$ 的元素. 从而

$$d_{y'}(f) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=0}^{m_j-1} 1 = \sum_{j=1}^{n} m_j = d_y(f).$$

□

注 2.4.7. 上述命题的证明说明了集合

$$\{x \in X \mid \mathrm{mult}_x(f) > 1\}$$

是离散集合, 从而是 x 的有限子集.

定义 2.4.8. 设 X 为连通紧黎曼曲面, $f : X \to Y$ 为从 X 到某黎曼曲面的非常值全纯映射. 用 $\deg(f)$ 来表示 $d_y(f)$, 其中 y 是 $f(X)$ 中任一元素. 注意到 f 是从 X 到 $f(X)$ 的双全纯映射当且仅当 $\deg(f) = 1$.

命题 2.4.9. *设 X 是连通紧黎曼曲面, $f : X \to Y$ 是从 X 到某黎曼曲面的非常值全纯映射, $x \in X$, $y = f(x)$ 且 $m = \mathrm{mult}_x(f)$. 那么 $f_x^\sharp : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ 定义了 $\mathcal{O}_x$ 上一个有限 $\mathcal{O}_y$-代数结构, 并且 $\mathcal{O}_x$ 作为 $\mathcal{O}_y$-模是秩为 m 的自由模. 另外, $\mathscr{M}_x$ 是 $\mathscr{M}_y$ 的有限扩张, 并且 $[\mathscr{M}_x : \mathscr{M}_y] = m$.*

证明: 由定理 2.4.3, 不妨假设 X 和 Y 都是复平面的开子集, $x = y = 0$, 且 $f(z) = z^m$. 令 ϖ 表示函数 Id_X 在 $\mathcal{O}_x$ 中的等价类. 设 φ 是 0 的邻域上的全纯函数, 其幂级数展开形如

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots.$$

对任意 $j \in \{0, \ldots, m\}$, 令

$$\varphi_j(z) = a_j + a_{m+j} z + \cdots + a_{nm+j} z^n + \cdots.$$

这决定了 0 的某邻域上的全纯函数. 注意到

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \varphi_j(z^m) z^j.$$

这说明了

$$\varphi_x = \sum_{j=0}^{m-1} f_x^\sharp(\varphi_{j,x})\varpi^j.$$

从而 $\mathcal{O}_x$ 作为 $\mathcal{O}_y$-模是由 $(\varpi^j)_{j=0}^{m-1}$ 生成的. 另外, 如果 $(\psi_j)_{j=0}^{m-1}$ 是一族 0 的邻域上的全纯函数, 使得

$$\sum_{j=0}^{m-1} \psi_j(z^m)z^j = 0.$$

在 0 点处形式幂级数展开后便得到 ψ_j 在 0 的某邻域上恒取零值. 所以 $\mathcal{O}_x$ 是自由 $\mathcal{O}_y$-模, $(\varpi^j)_{j=0}^{m-1}$ 是其一组基.

作为 $\mathscr{M}_y$-代数, $\mathscr{M}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x$ 等同于 $\mathcal{O}_x$ 对于乘法子幺半群 $f_x^\sharp(\mathcal{O}_y \setminus \{0\})$ 的局部化, 所以可以将它看作 $\mathscr{M}_x$ 的子环. 另外, 由于 $\mathcal{O}_x$ 是秩为 m 的自由 $\mathcal{O}_y$-模, $\mathscr{M}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x$ 是维数为 m 的 $\mathscr{M}_y$-线性空间. 对任意 $\mathscr{M}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x$ 中的非零元 φ, $\mathscr{M}_y$-线性映射

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x &\longrightarrow \mathscr{M}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x, \\ \psi &\longmapsto \varphi\psi \end{aligned}$$

是单射 (因为 $\mathscr{M}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x$ 是整环), 所以是双射 (因为 $\mathscr{M}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x$ 是有限维 $\mathscr{M}_y$-线性空间). 这说明 $\mathscr{M}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{O}_x$ 是一个域, 从而等于 $\mathscr{M}_x$. 因此 $[\mathscr{M}_x : \mathscr{M}_y] = m$. □

2.5 亚纯函数

设 X 为黎曼曲面, 所谓 X 上的**亚纯函数**, 是指从 X 到黎曼球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 在 X 的每个连通分支上均不恒取 ∞ 为其值的全纯映射. 用 $\mathscr{M}(X)$ 表示 X 上所有亚纯函数构成的集合. 若 f 是 X 上的亚纯函数, $f^{-1}(\{0\})$ 中的元素称为 f 的**零点**, $f^{-1}(\{\infty\})$ 中的元素称为 f 的**极点**.

注 2.5.1. 注意到从 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 到自身有一个对合的全纯映射 τ, 将 $(z:w)$ 映为 $(w:z)$. 如果 f 是 X 上的亚纯函数, 在每个连通分支上均不恒以 0 为其值, 那么 $\tau\circ f$ 也是 X 上的亚纯函数.

设 $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 为 X 上的亚纯函数, $x \in X$. 如果 $f(x) \neq \infty$, 那么 f 在 x 的某个开邻域上是全纯函数, 此时用 f_x 来表示 f 在 $\mathcal{O}_x$ 中的像; 如果 $f(x) = \infty$, 那么 $\tau\circ f$ 是在 x 所在的连通分支上定义的全纯函数, 并且在

$\mathcal{O}_x$ 中的像非零, 此时便用 f_x 来表示

$$\frac{1}{(\tau \circ f)_x} \in \mathscr{M}_x,$$

其中 $\mathscr{M}_x$ 是 $\mathcal{O}_x$ 的分式域. 这样便构造了一个从 $\mathscr{M}(X)$ 到 $\mathscr{M}_x$ 的映射. 我们用 $\mathrm{ord}_x(f)$ 来简记 $\mathrm{ord}_x(f_x)$. 注意到 $\mathrm{ord}_x(f) > 0$ 当且仅当 $f(x) = 0$, $\mathrm{ord}_x(f) < 0$ 当且仅当 $f(x) = \infty$, $\mathrm{ord}_x(f) = +\infty$ 当且仅当 f 在 x 的连通分支上恒取零值. 另外, 如果 x 不是 f 的极点, 那么

$$\mathrm{mult}_x(f) = \mathrm{ord}_x(f - f(x)),$$

如果 x 是 f 的极点, 那么

$$\mathrm{mult}_x(f) = -\mathrm{ord}_x(f).$$

若 f 和 g 为 X 上的两个亚纯函数, 对任意 $x \in X$, 可以在分式域中计算 $f_x + g_x$. 如果计算的结果在赋值环 $\mathcal{O}_x$ 中, 就用 $(f+g)(x)$ 表示 $f_x + g_x$ 在 $\mathbb{C}$ 中的剩余类; 否则便令 $(f+g)(x) = \infty$. 这样就得到从 X 到 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 的映射. 不难验证这个映射是 X 上的亚纯函数, 且对任意 $x \in X$ 有 $(f+g)_x = f_x + g_x$. 类似地可以定义 X 上的亚纯函数 fg, 使得

$$\forall\, x \in X, \quad (fg)_x = f_x g_x.$$

这样便在 $\mathscr{M}(X)$ 上定义了一个交换幺环的结构. 如果 X 是连通的, 那么 X 上任何不恒取零值的亚纯函数 f 在环 $\mathscr{M}(X)$ 中可逆, 其逆元就是 $\tau \circ f$. 所以在这样的情形下 $\mathscr{M}(X)$ 构成一个域.

设 X 为黎曼曲面. 由于环层空间之间的态射满足粘贴条件,

$$(X \text{ 的开子集 } U) \longmapsto \mathscr{M}(U)$$

定义了 X 上的一个环层. 我们将这个环层记作 $\mathscr{M}_X$ 并称之为 X 上的**亚纯函数层**. 注意到局部上亚纯函数可以写成两个全纯函数的商, 这说明了亚纯函数层 $\mathscr{M}_X$ 在 $x \in X$ 点的芽环同构于全纯函数芽环 $\mathcal{O}_x$ 的分式域 $\mathscr{M}_x$.

例 2.5.2. 设 X 为连通黎曼曲面. 由于全纯函数都是亚纯函数, 知 $\mathcal{O}(X) \subset \mathscr{M}(X)$. 所以 $\mathscr{M}(X)$ 包含 $\mathcal{O}(X)$ 的分式域. 然而并非所有的亚纯函数在整体上都可以写成两个全纯函数的商. 考虑 X 是黎曼球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 的情形. 由于 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 是连通紧黎曼面, 其上的全纯函数都是常值函数, 从而 $\mathcal{O}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}$. 然而所有 $\mathbb{C}$ 上的多项式函数都可以延拓为 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上的亚纯函数. 设

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

为 $\mathbb{C}$ 上的多项式函数. 如果 f 是常值函数, 令 $f(\infty)=a_0$, 否则令 $f(\infty)=\infty$. 注意到当 $a_n\neq 0$ 时

$$\forall\, z\in\mathbb{C},\quad (\tau\circ f\circ\tau)(z)=\frac{z^n}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}.$$

所以 $\tau\circ f\circ\tau$ 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数. 这说明了 f 是从 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 到自身的全纯映射, 也就是说 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上的亚纯函数. 这样便证明了 $\mathscr{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ 包含 $\mathbb{C}$ 上的有理函数域 $\mathbb{C}(z)$, 即多项式环 $\mathbb{C}[z]$ 的分式域. 可以证明 $\mathscr{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))=\mathbb{C}(z)$. 事实上, 如果 f 是 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上的非常值亚纯函数, 那么由定理 2.4.2 知 f 的零点和极点集都是离散集合. 而 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 又是紧集, 所以 f 的零点和极点集都是有限集. 设 $\{z_1,\ldots,z_n\}$ 是 f 在 $\mathbb{C}$ 中的零点和极点组成的集合. 令 P_f 为有理函数

$$P_f(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{-\operatorname{ord}_{z_j}(f)}.$$

这样 fP_f 在 $\mathbb{C}$ 上既没有零点又没有极点, 而它在 ∞ 处只能取一个值, 所以 fP_f 不能是满射. 这样 fP_f 只能是常值亚纯函数, 即 f 属于 $\mathbb{C}(z)$.

定理 2.5.3. 设 X 为连通紧黎曼曲面. 如果 f 是 X 上的非常值亚纯函数, 那么除有限多个 $x\in X$ 外有 $\operatorname{ord}_x(f)=0$. 另外,

$$\sum_{x\in X}\operatorname{ord}_x(f)=0.$$

证明: 如果 x 既不是零点也不是极点, 那么 $\operatorname{ord}_x(f)=0$ (见注 2.5.1). 由命题 2.4.6 知 f 的零点集和极点集都是有限集, 且

$$d_0(f)=\sum_{x\in f^{-1}(\{0\})}\operatorname{mult}_x(f)=\sum_{x\in f^{-1}(\infty)}\operatorname{mult}_x(f)=d_\infty(f).$$

当 x 是零点时 $\operatorname{mult}_x(f)=\operatorname{ord}_x(f)$; 当 x 是极点时 $\operatorname{mult}_x(f)=-\operatorname{ord}_x(f)$. 从而得到

$$\sum_{x\in X}\operatorname{ord}_x(f)=0.$$

□

定义 2.5.4. 设 X 为黎曼曲面, $f:X\to Y$ 为从 X 到某黎曼曲面的非常值全纯映射, $x\in X$, $y=f(x)$. 对任意 $\varphi\in\mathscr{M}_x$, 用 $P_\varphi\in\mathscr{M}_y[T]$ 表示 $\mathscr{M}_y$-线性自同构

$$\mathscr{M}_x\longrightarrow\mathscr{M}_x,\quad \psi\longmapsto\varphi\psi$$

的特征多项式.

注 2.5.5. 由定理 2.4.3, 局部上可以将 f 等同于 $z \mapsto z^m$, 其中 m 是 f 在 x 点的分歧重数. 假设 X 和 Y 都是 $\mathbb{C}$ 的开子集, $f(z)=z^m$, $x=y=0$. 令

$$\zeta_m = \mathrm{e}^{2\pi i/m}$$

考虑域 $\mathscr{M}_x$ 的自同构 $\sigma : \mathscr{M}_x \to \mathscr{M}_x$, 将 x 某邻域上亚纯函数 g 的等价类 g_x 映为亚纯函数 $z \mapsto g(\zeta_m z)$ 的等价类. 由于 $\zeta_m^m = 1$, 知 σ 是 $\mathscr{M}_y$-线性自同构, 且 $\sigma^m = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_x}$. 令 ϖ_x 为全纯函数 Id_X 在 $\mathscr{M}_x$ 中的等价类, φ_y 为全纯函数 Id_Y 在 $\mathscr{M}_y$ 中的等价类. 在命题 2.4.9 的证明中看到 $\mathscr{M}_x$ 作为 $\mathscr{M}_y$ 的扩张是由 ϖ_x 生成的, 并且 ϖ_x 是多项式

$$T^m - f_x^\sharp(\varpi_y)$$

的一个根. 注意到对任意整除 m 并大于 1 的自然数 d, 多项式

$$T^d - \varpi_y$$

在 $\mathscr{M}_y$ 中没有根. 这说明了域扩张 $f_x^\sharp(\mathscr{M}_y) \subset \mathscr{M}_x$ 是 Galois 扩张, 其 Galois 群是循环群 $\{\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_x}, \sigma, \ldots, \sigma^{m-1}\}$. 从而对任意 $\varphi \in \mathscr{M}_x$ 有

$$P_\varphi(T) = (T-\varphi)(T-\sigma(\varphi))\cdots(T-\sigma^{m-1}(\varphi)).$$

假设 φ 是某包含于 X 的开球

$$B(x;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-x| < r\}$$

上亚纯函数 g 的等价类, 并且 g 在

$$B(x;r) \setminus \{x\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-x| < r\}$$

上全纯. 对任意 $w \in \mathbb{C}$, $0 < |w-y| < r^m$, 将

$$\prod_{x \in f^{-1}(\{w\})} (T - g(x))$$

展开得到一个多项式

$$T^m + \lambda_1(w)T^{m-1} + \cdots + \lambda_m(w).$$

这样 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 可以写成 $g(\cdot), g(\zeta_m \cdot), \ldots, g(\zeta_m^{m-1}\cdot)$ 的对称多项式的形式, 所以可以延拓成

$$B(y;r^m) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w-y| < r^m\}$$

上的亚纯函数. 此时便有

$$P_\varphi(T) = T^m + \lambda_{1,y} T^{m-1} + \cdots + \lambda_{m,y}.$$

定理 2.5.6. 设 $f : X \to Y$ 为连通紧黎曼曲面之间的非常值全纯映射. 那么 $\mathscr{M}(X)$ 是 $\mathscr{M}(Y)$ 的有限扩张.

证明: 设 g 为 X 上的亚纯函数. 对任意 $y \in Y$, 令

$$Q_y := \prod_{x \in f^{-1}(\{y\})} P_{g_x} \in \mathscr{M}_y[T].$$

依定义知对于 $x \in f^{-1}(\{y\})$ 有

$$Q_y(g_x) = 0.$$

由命题 2.4.6 和 2.4.9 知道 Q_y 是 $\mathscr{M}_y[T]$ 中次数为 $d = \deg(f)$ 的首一多项式. 而由注 2.5.5 知存在 Y 上的亚纯函数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, 使得

$$\forall\, y \in Y, \quad Q_y(T) = T^d + \lambda_{1,y} T^{d-1} + \cdots + \lambda_{d,y}.$$

令

$$Q(T) = T^d + \lambda_1 T^{d-1} + \cdots + \lambda_d \in \mathscr{M}(Y)[T].$$

那么对任意 $x \in X$ 有

$$Q(g)_x = Q_{f(x)}(g_x) = 0,$$

从而 $Q(g) = 0$. □

2.6 除子

本节中固定一个连通紧黎曼曲面 X, 并用 $\mathscr{M}(X)$ 表示 X 上的亚纯函数域. 用 $\mathrm{Div}(X)$ 表示 X 作为点集生成的自由交换群, 其中的元素称为 X 的**除子**. 若 D 是 $\mathrm{Div}(X)$ 中的元素, 对任意 $x \in X$ 用 $\mathrm{ord}_x(D)$ 表示 D 写成 X 中元素的形式线性组合时 x 的系数, 也就是说

$$D = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(D)\, x.$$

若 $D \in \mathrm{Div}(X)$, 令

$$\deg(D) := \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(D),$$

称为 D 的**度数**. 若对任意 $x \in X$ 有 $\mathrm{ord}_x(D) \geqslant 0$, 则记 $D \geqslant 0$. 如果 f 是 X 上的非恒零亚纯函数, 用 $\mathrm{div}(f)$ 表示除子

$$\sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f)\, x.$$

这样便定义了一个群同态

$$\mathrm{div} : \mathscr{M}(X)^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(X).$$

该群同态像集中的除子称为**主除子**.

若 D 是 X 的除子, 定义

$$H^0(X, D) := \{f \in \mathscr{M}(X)^\times \mid D + \mathrm{div}(f) \geqslant 0\} \cup \{0\}.$$

称为除子 D 的**全线性系**.

命题 2.6.1. 设 D 是 X 的除子.

(1) $H^0(X, D)$ 是 $\mathscr{M}(X)$ 的 $\mathbb{C}$-线性子空间.

(2) 若 $\deg(D) < 0$, 那么 $H^0(X, D) = \{0\}$.

(3) 若 $\deg(D) \geqslant 0$, 那么 $H^0(X, D)$ 是维数不超过 $\deg(D) + 1$ 的复线性空间.

证明: (1) X 上的亚纯函数 f 属于 $H^0(X, D)$ 当且仅当对任意 $x \in X$ 有

$$\mathrm{ord}_x(f) \geqslant -\,\mathrm{ord}_x(D).$$

若 f 和 g 是两个亚纯函数, 由于 $\mathrm{ord}_x(\cdot)$ 是离散赋值, 知

$$\mathrm{ord}_x(f + g) \geqslant \min\{\mathrm{ord}_x(f), \mathrm{ord}_x(g)\}.$$

如果 f 和 g 都是 $H^0(X, D)$ 的元素, 那么 $f + g$ 亦然. 类似地, 如果 $f \in H^0(X, D)$ 且 $a \in \mathbb{C}$, 那么

$$\forall\, x \in X, \quad \mathrm{ord}_x(af) = \mathrm{ord}_x(a) + \mathrm{ord}_x(f) \geqslant \mathrm{ord}_x(f) \geqslant -\,\mathrm{ord}_x(D),$$

从而 $af \in H^0(X, D)$.

(2) 如果 f 是 $H^0(X, D)$ 中非恒零亚纯函数, 那么由 $\mathrm{div}(f) + D \geqslant 0$ 得到

$$\deg(\mathrm{div}(f) + D) = \deg(\mathrm{div}(f)) + \deg(D) \geqslant 0.$$

而由定理 2.5.3 知道

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = 0,$$

从而 $\deg(D) \geqslant 0$.

(3) 用归纳法证明当 $\deg(D) \geqslant -1$ 时有

$$\dim_{\mathbb{C}}(H^0(X, D)) \leqslant \deg(D) + 1.$$

$\deg(D) = -1$ 的情形是 (2) 的特例. 以下假设 $\deg(D) \geqslant 0$ 且命题对于度数等于 $\deg(D) - 1$ 的除子成立. 令 x 为 X 中的点, $\alpha = \mathrm{ord}_x(D)$, ϖ_x 为主理想 $\mathfrak{m}_x$ 的一个生成元. 那么对任意 $f \in H^0(X, D)$ 有

$$f_x \in \varpi_x^{-\alpha} \mathcal{O}_x.$$

考虑从 $H^0(X, D)$ 到 $\varpi_x^{-\alpha}\mathcal{O}_x / \varpi_x^{-\alpha+1}\mathcal{O}_x$ 的 $\mathbb{C}$-线性映射, 将 f 映为 f_x 的剩余类. 这个线性映射的核是 $H^0(X, D - x)$. 由于 $\mathcal{O}_x$ 是离散赋值环, 其剩余类域等于 $\mathbb{C}$, 知 $\varpi_x^{-\alpha}\mathcal{O}_x / \varpi_x^{-\alpha+1}\mathcal{O}_x$ 是一维复线性空间. 从而

$$H^0(X, D) \leqslant H^0(X, D - x) + 1.$$

由归纳假设知

$$H^0(X, D - x) \leqslant \deg(D - x) + 1 = \deg(D).$$

这样便得到 $H^0(X, D) \leqslant \deg(D) + 1$. □

3 有理函数域的算术

在上一节中我们了解了连通紧黎曼曲面之间全纯映射的有限性 (定理 2.5.6). 这个有限性证明的关键在于全纯函数芽环上的离散赋值及其扩张. 本节直接从赋值的观点来考虑一般域上的代数函数域并证明代数函数域的 Riemann-Roch 定理. 与 Dedekind 和 Weber 的工作类似, 我们并不借助超越函数和黎曼曲面的拓扑. 然而在推理的过程中我们将 Weil 的赋值观点和线性赋范空间的理论结合起来, 绕过了多项式环的代数方法来构建代数函数域的算术并将有理函数域的各个绝对值放在一个同等的地位去考虑.

如未另行说明, 提及的环都指交换幺环, 环同态都保持幺元. 另外, 在讨论整环和域的时候, 总是假定加法零元与乘法单位元相异. 若 A 是交换幺环, 用 $A^\times$ 表示 A 中的乘法可逆元组成的乘法群. 特别地, 如果 K 是域, 那么 $K^\times = K \setminus \{0\}$.

3.1 绝对值

设 K 为域. 所谓 K 上的**绝对值**, 是指从 K 到 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 的满足以下条件的映射 $|\cdot|$:

(1) 对任意 $a \in K$, $a = 0$ 当且仅当 $|a| = 0$,

(2) 对任意 $(a, b) \in K \times K$, $|ab| = |a| \cdot |b|$,

(3) 对任意 $(a, b) \in K \times K$, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

条件 (3) 称作**三角形不等式**. 如果 $|\cdot|$ 满足**强三角形不等式**, 也就是说

$$\forall\,(a, b) \in K \times K, \quad |a + b| \leqslant \max\{|a|, |b|\},$$

那么说 $|\cdot|$ 是**非阿基米德绝对值**; 否则说 $|\cdot|$ 是**阿基米德绝对值**.

若域 K 上指定了一个绝对值 $|\cdot|$, 则称 $(K, |\cdot|)$ 为**赋值域**. 如果 K'/K 是域扩张, $|\cdot|'$ 是 K' 上的绝对值, 且在 K 上的限制等于 $|\cdot|$, 则说 $(K', |\cdot|')$ 是赋值域 $(K, |\cdot|)$ 的**扩张**.

3.1.1 通常的绝对值和平凡绝对值

$\mathbb{R}$ 上通常的绝对值就是一个阿基米德绝对值; $\mathbb{C}$ 上的取模函数也是一个阿基米德绝对值 (称为 $\mathbb{C}$ 上**通常的绝对值**). 另外, 任意的域 K 上的函数

$$|\cdot|_0 : K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad |a|_0 = \begin{cases} 0, & a = 0 \\ 1, & a \neq 0 \end{cases}$$

是一个非阿基米德绝对值, 称作 K 上的**平凡绝对值**. 如果 $|\cdot|$ 是域 K 上的绝对值, 对任意 K 的子域 k, $|\cdot|$ 在 k 上的限制是 k 上的绝对值.

3.1.2 离散赋值环决定的绝对值

设 $\mathcal{O}$ 为离散赋值环, $\mathfrak{m}$ 为 $\mathcal{O}$ 的极大理想, ϖ 为 $\mathfrak{m}$ 的一个生成元 (通常称作**单值化子**), K 为 $\mathcal{O}$ 的分式域. 令 $\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}} : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ 为 $\mathcal{O}$ 对应的离散赋值, 即

$$\forall\, a \in K, \quad \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}}(a) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid a \in \varpi^n \mathcal{O}\} \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}.$$

那么对于任意实数 $q > 1$, 函数

$$|\cdot|_{\mathfrak{m},q} = q^{-\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}}(\cdot)}$$

是 K 上的绝对值 (约定 $q^{-\infty} = 0$).

3.1.3 绝对值的性质

域上的绝对值与实数集上通常的绝对值函数具有一些类似的性质. 设 $(K,|\cdot|)$ 为赋值域. 首先 $|1|=1$, 其中等式左边的 1 表示 K 的单位元, 右边的 1 表示实数域的单位元; 其次, 对任意 $a\in K$, $|-a|=|a|$, 其中 $-a$ 表示 a 在 K 中关于加法的逆元; 再次, 对任意 $a\in K^\times$, $|a^{-1}|=|a|^{-1}$, 其中 a^{-1} 表示 a 在 K 中关于乘法的逆元; 最后, 若 $(a,b)\in K\times K$, 那么

$$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|, \tag{3.1}$$

其中不等式左边外侧的 $|\cdot|$ 符号表示实数集上通常的绝对值函数, 其余的 $|\cdot|$ 符号表示所给定的域 K 上的绝对值.

非阿基米德绝对值与实数集上通常的绝对值也有不同之处. 设 $(K,|\cdot|)$ 为赋值域, $f:\mathbb{Z}\to K$ 为从整数环到 K 唯一的环同态. 假设 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值. 对任意正整数 n 有

$$|f(n)|=|\underbrace{f(1)+\cdots+f(1)}_{n\text{ 项}}|\leqslant|f(1)|.$$

从而 $|\cdot|$ 在 $f(\mathbb{Z})$ 上的限制是有界函数. 反过来, 假设 C 是大于 0 的常数, 使得

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad |f(n)|\leqslant C,$$

那么对任意 $(a,b)\in K\times K$ 及任意正整数 n 有

$$|a+b|^n=|(a+b)^n|=\left|\sum_{i=0}^n f\left(\binom{n}{i}\right)a^ib^{n-i}\right|\leqslant(n+1)C\max\{|a|,|b|\}^n.$$

不等式两边开 n 次方后令 n 趋于 $+\infty$, 取极限就得到强三角形不等式

$$|a+b|\leqslant\max\{|a|,|b|\}.$$

3.1.4 非阿基米德赋值域的单位球

假设 $(K,|\cdot|)$ 是非阿基米德赋值域. 用 $K^\circ=\{a\in K\mid |a|\leqslant 1\}$ 表示 $(K,|\cdot|)$ 的单位闭球. 由于 $|1|=1$, 知 $1\in K^\circ$. 若 $(a,b)\in K^\circ\times K^\circ$, 那么

$$|ab|=|a|\cdot|b|\leqslant 1,\quad |a-b|\leqslant\max\{|a|,|-b|\}=\max\{|a|,|b|\}\leqslant 1.$$

所以 $\{ab,a-b\}\subset K^\circ$. 从而 K° 是 K 的子环. 另外, 对任意 $a\in K\setminus K^\circ$, 由 $|a^{-1}|=|a|^{-1}<1$ 知 $a^{-1}\in K^\circ$. 所以 K° 的分式域等于 K.

用 $K^{\circ\circ} = \{a \in K \mid |a| < 1\}$ 表示 $(K, |\cdot|)$ 的单位开球. 如果 $(a, b) \in K^{\circ\circ} \times K^{\circ\circ}$, 那么

$$|a - b| \leqslant \max\{|a|, |-b|\} = \max\{|a|, |b|\} < 1,$$

即 $a - b \in K^{\circ\circ}$. 这说明了 $K^{\circ\circ}$ 是 K° 的加法子群. 另外, 对任意 $(a, b) \in K^{\circ} \times K^{\circ\circ}$,

$$|ab| = |a| \cdot |b| < 1,$$

即 $ab \in K^{\circ\circ}$. 所以 $K^{\circ\circ}$ 是 K° 的理想. 对任意 $a \in K^{\circ} \setminus K^{\circ\circ}$, 有 $|a^{-1}| = |a|^{-1} = 1$, 也就是说 $a^{-1} \in K^{\circ} \setminus K^{\circ\circ}$. 这说明了 $K^{\circ} \setminus K^{\circ\circ}$ 中的元素在 K° 中可逆, 也就是说 K° 是局部环, 其极大理想是 $K^{\circ\circ}$.

设 n 为正整数, $a_1, \ldots, a_n$ 为 K 中 n 个元素, 使得 $|a_1| < \ldots < |a_n|$, 那么 $a_n \neq 0$ 且对任意 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 有 $a_i a_n^{-1} \in K^{\circ\circ}$. 而 $1 \notin K^{\circ\circ}$, 所以

$$1 + (a_1 + \cdots + a_{n-1}) a_n^{-1} \in K^{\circ} \setminus K^{\circ\circ},$$

即 $|1 + (a_1 + \cdots + a_{n-1}) a_n^{-1}| = 1$. 从而

$$|a_1 + \cdots + a_n| = |a_n| \cdot |1 + (a_1 + \cdots + a_{n-1}) a_n^{-1}| = |a_n|. \tag{3.2}$$

3.1.5 赋值域的完备化

设 (K, v) 为赋值域. 为方便理解, 也将绝对值 v 记作 $|\cdot|_v$. 绝对值 v 诱导了 K 上的一个度量

$$d_v : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad (a, b) \longmapsto |a - b|_v.$$

用 $\mathrm{Cau}_v(K)$ 表示 K 中 Cauchy 序列[32]组成的集合. 在集合 $\mathrm{Cau}_v(K)$ 上定义如下的加法和乘法运算

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

[32]即满足

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{\substack{(n,m)\in\mathbb{N}^2 \\ n\geqslant N, m\geqslant N}} |a_n - a_m| = 0$$

的序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

这样便得到一个交换幺环, 其零元是恒取 0 值的序列, 其单位元是恒取 1 值的序列. 注意到从 K 到 $\mathrm{Cau}_v(K)$ 有自然的交换幺环同态, 将 $a \in K$ 映为恒取 a 值的序列.

用 $\mathrm{Cau}_v^0(K)$ 表示收敛到 0 的那些 Cauchy 序列组成的集合. 不难证明, $\mathrm{Cau}_v^0(K)$ 是 $\mathrm{Cau}_v(K)$ 的理想. 它事实上还是一个极大理想. 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 K 中的 Cauchy 序列, 如果 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛到 0, 那么它的任何子列都不收敛到 0. 这样便存在 $\varepsilon > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意不小于 N 的自然数 n, $|a_n|_v \geqslant \varepsilon$ 成立. 令

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant n < N, \\ a_n^{-1}, & n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N. \end{cases}$$

对任意不小于 N 的自然数 n 和 m, 有

$$|b_n - b_m|_v = \frac{|a_n - a_m|_v}{|a_n|_v \cdot |a_m|_v} \leqslant \varepsilon^{-2}|a_n - a_m|_v.$$

从而 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Cauchy 列. 而 $(b_n a_n - 1)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Cau}_v^0(K)$. 这说明了 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 模 $\mathrm{Cau}_v^0(K)$ 可逆.

用 K_v 表示商域 $\mathrm{Cau}_v(K)/\,\mathrm{Cau}_v^0(K)$. 前面提到的交换幺环同态 $K \to \mathrm{Cau}_v(K)$ 诱导了域同态 $K \to K_v$, 将 $a \in K$ 映为取常值 a 的序列的等价类. 通过这个域同态可以将 K 看作是 K_v 的子域. 绝对值函数 $|\cdot|_v : K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 在 K 上一致连续, 故将 K 中的 Cauchy 序列映为 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 中的 Cauchy 序列. 从而对任意 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Cau}_v(K)$, 序列 $(|a_n|_v)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛. 另外, 如果两个 Cauchy 序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n - b_n|_v = 0,$$

那么

$$\lim_{n\to+\infty} \big||a_n|_v - |b_n|_v\big| = 0,$$

从而 $(|a_n|_v)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(|b_n|_v)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到同一个实数. 这样 $|\cdot|_v$ 便诱导一个从 K_v 到 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 的函数, 将 Cauchy 序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的等价类映为

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_v.$$

不难证明这个函数是 K_v 上的绝对值, 在 K 上的限制等于 $|\cdot|_v$. 我们仍用符号 v 来表示这个绝对值函数. 这样就得到赋值域 (K, v) 的一个扩张, 作为度量空间是 (K, d_v) 的完备化空间. 我们将 K_v 称为 (K, v) 的**完备化**. 如果上述域同态 $K \to K_v$ 是同构, 就说赋值域 (K, v) 是**完备的**.

3.1.6 绝对值的等价

给定域 K 上的两个绝对值 $|\cdot|_1$ 和 $|\cdot|_2$. 如果 $|\cdot|_1$ 和 $|\cdot|_2$ 在 K 上诱导相同的拓扑, 则说绝对值 $|\cdot|_1$ 和 $|\cdot|_2$ **等价**.

命题 3.1.1. 设 $|\cdot|_1$ 和 $|\cdot|_2$ 为域 K 上两个绝对值. 假设 $|\cdot|_1$ 不是平凡的绝对值. 则以下命题等价:

(1) 绝对值 $|\cdot|_1$ 和 $|\cdot|_2$ 等价;

(2) 对任意 $x \in K$, $|x|_2 \leqslant 1$ 蕴含 $|x|_1 \leqslant 1$;

(3) 对任意 $x \in K$, $|x|_1 < 1$ 蕴含 $|x|_2 < 1$;

(4) 存在 $\kappa > 0$ 使得 $|\cdot|_2 = |\cdot|_1^{\kappa}$.

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2): 用反证法. 假设存在 $x \in K$, 使得 $|x|_1 > 1$ 且 $|x|_2 \leqslant 1$. 那么序列 $(x^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $|\cdot|_1$ 诱导的度量下收敛到 0, 但在 $|\cdot|_2$ 诱导的度量下与 0 的距离有正的下界, 这与绝对值 $|\cdot|_1$ 和 $|\cdot|_2$ 诱导相同的拓扑的假设矛盾.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 我们证明 (3) 的逆否命题, 即对任意 $x \in K$, $|x|_2 \geqslant 1$ 蕴含 $|x|_1 \geqslant 1$. 若 $|x|_2 \geqslant 1$, 那么 $|x^{-1}|_2 \leqslant 1$. 由 (2) 知 $|x^{-1}|_1 \leqslant 1$, 即 $|x|_1 \geqslant 1$.

(3) $\Longrightarrow$ (4): 任取 K 中某非零元 y, 使得 $|y|_1 > 1$ (这样的非零元的存在性来自 $|\cdot|_1$ 非平凡的假设). 由 (3) 知 $|y|_2 > 1$. 令

$$\kappa = \frac{\ln |y|_2}{\ln |y|_1} > 0.$$

令 x 为 K 中任意非零元并令

$$\lambda = \frac{\ln |x|_1}{\ln |y|_1}.$$

取两个有理数列 $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(c_n/d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 使得

(i) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $(a_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{Z}^4$, $b_n > 0$, $d_n > 0$,

(ii) $a_n/b_n < \lambda < c_n/d_n$,

(iii)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{d_n} = \lambda.$$

这样有

$$\frac{a_n}{b_n}\ln|y|_1 < \lambda\ln|y|_1 = \ln|x|_1, \quad \frac{c_n}{d_n}\ln|y|_1 > \lambda\ln|y|_1 = \ln|x|_1,$$

从而

$$|y^{a_n}x^{-b_n}|_1 < 1 < |y^{c_n}x^{-d_n}|_1.$$

由 (3) 知

$$|y^{a_n}x^{-b_n}|_2 < 1 < |y^{c_n}x^{-d_n}|_2,$$

即

$$|y|_2^{a_n/b_n} < |x|_2 < |y|_2^{c_n/d_n}.$$

令 $n \to +\infty$ 取极限知

$$|x|_2 = |y|_2^{\lambda} = |y_1|^{\kappa\lambda} = |x|_1^{\kappa}.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1): 设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 K 中的序列, $x \in K$. 那么

$$\lim_{n\to+\infty}|x_n - x|_1 = 0$$

当且仅当

$$\lim_{n\to+\infty}|x_n - x|_1^{\kappa} = \lim_{n\to+\infty}|x_n - x|_2 = 0.$$

□

注 3.1.2. 上述命题的证明中, 仅在 (3) $\Longrightarrow$ (4) 的步骤中使用了 $|\cdot|_1$ 非平凡的假设. 在一般的情形, 以下条件仍等价:

(a) 绝对值 $|\cdot|_1$ 和 $|\cdot|_2$ 等价;

(b) 对任意 $x \in K$, $|x|_1 \leqslant 1$ 蕴含 $|x|_2 \leqslant 1$;

(c) 存在 $\kappa > 0$ 使得 $|\cdot|_2 = |\cdot|_1^{\kappa}$.

事实上, 当 $|\cdot|_1$ 是平凡绝对值时, 条件 (b) 说明对任意 $x \in K$ 有 $|x|_2 \leqslant 1$, 这样 $|\cdot|_2$ 也是平凡的绝对值, 从而 $|\cdot|_2 = |\cdot|_1$.

3.2 赋范线性空间

本节中固定一个完备赋值域 $(K,|\cdot|)$. 设 E 为 K-线性空间. 所谓 E 上的**范数**, 是指从 E 到 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 的满足以下条件的映射 $\|\cdot\|$:

(1) 对任意 $s\in E$, $\|s\|=0$ 当且仅当 $s=0$,

(2) 对任意 $(a,s)\in K\times E$, $\|as\|=|a|\cdot\|s\|$,

(3) 对任意 $(s_1,s_2)\in E\times E$, $\|s_1+s_2\|\leqslant\|s_1\|+\|s_2\|$.

条件 (3) 也称作**三角形不等式**. 我们称 $(E,\|\cdot\|)$ 为一个**赋范线性空间**. 如果 $\|\cdot\|$ 还满足**强三角形不等式**, 也就是说

$$\forall\,(s_1,s_2)\in E\times E,\quad \|s_1+s_2\|\leqslant\max\{\|s_1\|,\|s_2\|\},$$

便说 $\|\cdot\|$ 是**超范数** (ultrametric norm), $(E,\|\cdot\|)$ 是**赋超范线性空间**. 由 (1) 和 (2) 知道, 如果某非零线性空间上存在超范数, 那么 $|\cdot|$ 一定是非阿基米德绝对值. 注意到

$$d_{\|\cdot\|}:E\times E\longrightarrow\mathbb{R}_{\geqslant 0},\quad (s_1,s_2)\longmapsto\|s_1-s_2\|$$

是 E 上的度量, 称为**范数 $\|\cdot\|$ 诱导的度量**.

如果 $(E,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, F 是 E 的线性子空间, 那么 $\|\cdot\|$ 在 F 上的限制是 F 上的范数, 称为**限制范数**. 如果 F 是 E 的闭线性子空间, $G=E/F$, 那么映射

$$\|\cdot\|_G:G\longrightarrow\mathbb{R}_{\geqslant 0},\quad (y\in G)\longmapsto\inf_{s\in y}\|s\|$$

是 G 上的范数, 称为 $\|\cdot\|$ 的**商范数**. 如果 x 是 E 中的元素, 那么 x 在 G 中等价类的商范数等于 x 到闭线性子空间 F 的距离:

$$\mathrm{dist}(x,F):=\inf_{x'\in F}\|x-x'\|.$$

3.2.1 向量的放缩

命题 3.2.1. *假设 $|\cdot|$ 是非平凡的绝对值. 令 $\lambda\in\,]0,1]$, 使得*

$$\lambda<\sup\{|a|\mid a\in K^{\times},\ |a|<1\}.$$

设 $(E,\|\cdot\|)$ 为 $(K,|\cdot|)$ 上的赋范线性空间. 若 s 为 E 中的非零元, 那么存在 $b\in K^{\times}$, 使得 $\lambda\leqslant\|bs\|<1$.

证明: 令 a 为 K 中的非零元, 使得 $\lambda < |a| < 1$. 令

$$p = \left\lfloor \frac{\ln(\lambda) - \ln\|s\|}{\ln|a|} \right\rfloor, \quad b = a^p.$$

依定义, 有

$$p \leqslant \frac{\ln(\lambda) - \ln\|s\|}{\ln|a|},$$

所以 $|b| = |a|^p \geqslant \lambda\|s\|^{-1}$, 亦即 $\|bs\| = |b| \cdot \|s\| \geqslant \lambda$. 另外, 由于 $\lambda < |a| < 1$, 有 $\ln(\lambda) < \ln|a| < 0$, 故 $\ln(\lambda)/\ln|a| > 1$. 这说明了 $p > -\ln\|s\|/\ln|a|$. 所以 $|b| = |a|^p < \|s\|^{-1}$, 即 $\|bs\| < 1$. □

3.2.2 超范数的基本性质

命题 3.2.2. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为赋超范线性空间.

(a) 若 $x_1, \ldots, x_n$ 为 E 中有限多个元素, 使得 $\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|$ 两两不等, 那么

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \|x_i\|.$$

(b) 复合映射

$$E \setminus \{0\} \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}_{>0}/|K^\times| \tag{3.3}$$

像的基数不超过 E 在 K 上的维数, 其中 $\mathbb{R}_{>0}$ 视为乘法群, $|K^\times|$ 是 $K^\times$ 在 $|\cdot|$ 下的像, π 是投影映射.

(c) 假设 E 是有限维线性空间且 $|\cdot|$ 是平凡绝对值, 那么 $\|\cdot\|$ 的像是有限集, 其基数不超过 $\dim_K(E) + 1$.

证明: (a) 通过对 n 归纳可以将问题归结为 $n = 2$ 的情形. 不妨设 $\|x_1\| < \|x_2\|$. 由于 $\|\cdot\|$ 是超范数, 知

$$\|x_1 + x_2\| \leqslant \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} = \|x_2\|.$$

另外,

$$\|x_2\| = \|x_1 + x_2 - x_1\| \leqslant \max\{\|x_1 + x_2\|, \|x_1\|\}.$$

由于 $\|x_2\| > \|x_1\|$, 知 $\|x_2\| \leqslant \|x_1 + x_2\|$. 所以等式

$$\|x_1 + x_2\| = \|x_2\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$$

成立.

(b) 设 I 为复合映射 (3.3) 的像. 对任意 $\alpha \in I$, 任选 α 在 $E \setminus \{0\}$ 中的某个原像 x_α. 假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是 I 中有限多个两两不同的元素. 那么对任意 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (K^\times)^n$, 实数 $\|\lambda_1 x_{\alpha_1}\|, \ldots, \|\lambda_n x_{\alpha_n}\|$ 两两不同. 由 (a) 知

$$\|\lambda_1 x_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n x_{\alpha_n}\| = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \|\lambda_i x_{\alpha_i}\| > 0.$$

这说明了 $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是 E 中的线性无关组, 从而 I 的基数不超过 E 的维数.

(c) 当 $|\cdot|$ 是平凡绝对值时 $|K^\times| = \{1\}$. 由 (b) 知道 $\|\cdot\|$ 限制在 $E \setminus \{0\}$ 上的像的基数不超过 $\dim_K(E)$. 所以 $\|\cdot\|$ 的像的基数不超过 $\dim_K(E) + 1$. □

3.2.3 有界线性映射的连续性

引理 3.2.3. *假设 $|\cdot|$ 是平凡的绝对值. 若 $(E, \|\cdot\|)$ 是 $(K, |\cdot|)$ 上的有限维赋范线性空间, 那么函数 $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 有上界. 如果线性空间 E 非零, 那么 $\|\cdot\|$ 在 $E \setminus \{0\}$ 上的限制有大于零的下界.*

证明: 设 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 E 的一组基. 对任意 $(a_1, \ldots, a_r) \in K^r$, 有

$$\|a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r\| \leqslant \sum_{i=1}^r |a_i| \cdot \|e_i\| \leqslant \sum_{i=1}^r \|e_i\|,$$

其中第二个不等式来自 $|\cdot|$ 是平凡绝对值的假设.

用反证法证明第二个命题. 假设存在一列 E 中的非零元 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = 0.$$

由于 E 是有限维线性空间, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 以及 E 的非零线性子空间 F, 使得对任意不小于 N 的整数 n, 等式

$$F = \mathrm{Vect}_K(\{x_\ell \mid \ell \in \mathbb{N},\ \ell \geqslant n\})$$

成立, 其中 $\mathrm{Vect}_K(A)$ 表示 E 的子集 A 生成的 K-线性子空间. 这样由第一个命题的证明知道

$$\sup_{y \in F} \|y\| \leqslant \inf_{n \in \mathbb{N},\, n \geqslant N} \Big(r \sup_{\ell \in \mathbb{N},\ \ell \geqslant n} \|x_\ell\| \Big) = r \limsup_{n \to +\infty} \|x_n\| = 0.$$

这与 F 是非零线性子空间的条件矛盾. 从而 $\|\cdot\|$ 在 $E \setminus \{0\}$ 上的限制有非零的下界. □

命题 3.2.4. 设 $(E_1, \|\cdot\|_1)$ 和 $(E_2, \|\cdot\|_2)$ 为两个赋范线性空间, $f : E_1 \to E_2$ 为 K-线性映射. 如果 f 是有界线性映射, 也就是说存在常数 $C > 0$ 使得

$$\forall\, x \in E_1, \quad \|f(x)\|_2 \leqslant C\|x\|_1,$$

那么映射 f 连续. 当 $|\cdot|$ 是非平凡的绝对值或 E_2 是有限维线性空间时这个命题的逆命题也成立.

证明: 假设 f 是有界线性映射并设 $C > 0$ 使得

$$\forall\, x \in E_1, \quad \|f(x)\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$

那么对任意 $(x, x') \in E_1 \times E_1$ 有

$$\|f(x) - f(x')\|_2 = \|f(x - x')\|_2 \leqslant C\|x - x'\|_1.$$

从而映射 f 一致连续.

以下假设映射 f 连续. 先讨论 $|\cdot|$ 是非平凡绝对值的情形. 由于 f 是连续映射, 知

$$f^{-1}(\{s \in E_2 \mid \|s\|_2 < 1\})$$

是 E_1 中包含零元素的开集. 从而存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$f^{-1}(\{s \in E_2 \mid \|s\|_2 < 1\}) \supset \{x \in E_1 \mid \|x\| < \epsilon\}.$$

由于 $|\cdot|$ 是非平凡的绝对值, 存在 $a \in K$ 使得 $0 < |a| < 1$. 若 x 是 E_1 中的非零元, 那么存在唯一的整数 n 使得

$$\|a^n x\|_1 < \epsilon \leqslant \|a^{n-1}x\|_1 = |a|^{n-1}\|x\|_1.$$

由前一个不等式知 $\|f(a^n x)\|_2 < 1$, 从而

$$\|f(x)\|_2 < |a|^{-n} \leqslant (\epsilon|a|)^{-1}\|x\|_1.$$

所以 f 是有界线性映射.

现在考虑 $|\cdot|$ 是平凡绝对值且 E_2 是有限维线性空间的情形. 由引理 3.2.3 知存在 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得对任意 $x \in E_1 \setminus \{0\}$ 有 $\|x\|_1 \geqslant \delta$, 且对任意 $y \in E_2$ 有 $\|y\|_2 \leqslant M$. 所以对任意 $x \in E_1 \setminus \{0\}$ 有

$$\|f(x)\|_2 \leqslant M \leqslant \frac{M}{\delta}\|x\|_1.$$

$\square$

3.2.4 范数的等价性

定理 3.2.5. 设 E 为有限维 K-线性空间. 若 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|'$ 是 E 上两个范数, 那么存在两个正常数 C 和 C', 使得

$$\forall\, x \in E, \quad C\|x\|' \leqslant \|x\| \leqslant C'\|x\|',$$

也就是说范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|'$ 等价. 特别地, 有限维赋范线性空间是完备度量空间, 有限维 K-线性空间上所有的范数诱导相同的拓扑, 从有限维赋范线性空间到线性赋范空间的线性映射都是有界线性映射.

证明: 对 E 的维数 r 用归纳法. 当 $r = 0$ 时 E 上只有一个范数, 命题显然成立. 当 $r = 1$ 时 E 上两个范数之间只相差一个正因子, 命题也成立 (其中 E 的完备性来自于域 K 的完备性). 以下假设 $r \geqslant 2$, 且命题对于维数不超过 $r-1$ 的 K-线性空间成立.

设 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 E 的一组基. 不妨设 $\|\cdot\|'$ 形如

$$\forall\,(a_i)_{i=1}^r \in K^r, \quad \|a_1e_1 + \cdots + a_re_r\|' = \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} |a_i|.$$

这样就得到, 对任意 $(a_i)_{i=1}^r \in K^r$,

$$\|a_1e_1 + \cdots + a_re_r\| \leqslant \sum_{i=1}^r |a_i| \cdot \|e_i\| \leqslant \|a_1e_1 + \cdots + a_re_r\|' \sum_{i=1}^r \|e_i\|.$$

令 F 为 $e_1, \ldots, e_{r-1}$ 生成的线性子空间, $\|\cdot\|_F$ 和 $\|\cdot\|'_F$ 分别为 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|'$ 在 F 上的限制范数. 由归纳假设知存在 $\lambda > 0$ 使得

$$\forall\, y \in F, \quad \|y\|'_F \leqslant \lambda\|y\|_F.$$

另外, 所有 F 上的范数诱导相同的拓扑, 并且 F 是完备的. 这说明 F 是 $(E, \|\cdot\|)$ 和 $(E, \|\cdot\|')$ 的闭线性子空间. 令 $Q = E/F$ 为商空间并用 $\|\cdot\|_Q$ 和 $\|\cdot\|'_Q$ 分别表示 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|'$ 在 Q 上的商范数. 设 q_r 为 e_r 在 Q 中的等价类. 设 $x \in E$, $b \in K$ 使得 x 在 Q 中的等价类等于 bq_r. 由商范数的定义知 $\|bq_r\|_Q \leqslant \|x\|$, 故

$$|b| \leqslant \frac{\|x\|}{\|q_r\|_Q} \tag{3.4}$$

而 $x - be_r \in F$, 由 $\|\cdot\|'$ 的定义知

$$\begin{aligned}\|x\|' &= \max\{|b|, \|x - be_r\|'_F\} \leqslant \max\{|b|, \lambda\|x - be_r\|_F\} \\ &\leqslant \max\{|b|, \lambda(\|x\| + |b| \cdot \|e_r\|)\} \leqslant \|x\| \max\Big\{\frac{1}{\|q_r\|_Q}, \lambda\Big(1 + \frac{\|e_r\|}{\|q_r\|_Q}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

其中最后一个不等式来自 (3.4). 所以范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|'$ 等价. 最后, 由 $\|\cdot\|'$ 的定义不难证明 $(E, \|\cdot\|')$ 是完备度量空间, 由范数的等价性知道, 对任意范数 $\|\cdot\|$, $(E, \|\cdot\|)$ 也是完备度量空间. □

3.2.5 正交性

设 $(E, \|\cdot\|)$ 为 $(K, |\cdot|)$ 上的有限维赋范线性空间, $\alpha \in]0,1]$. 如果 E 的一组基 $(e_i)_{i=1}^r$ 满足条件

$$\forall\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r, \quad \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\| \geqslant \alpha \max_{i \in \{1,\ldots,r\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|,$$

就说 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 α-**正交基**. 当 $\alpha = 1$ 时, 1-正交基简称为**正交基**. 如果正交基 $(e_i)_{i=1}^r$ 还满足条件

$$\|e_1\| = \cdots = \|e_r\|,$$

就说 $(e_i)_{i=1}^r$ 是**标准正交基**. 以下命题说明了这里正交基的概念在 Euclid 空间或 Hermite 空间的情形下与经典的概念是一致的.

命题 3.2.6. *假设 K 是实数域或复数域, $|\cdot|$ 是 K 上通常的绝对值, $\|\cdot\|$ 是 E 上的内积 $\langle\,,\rangle$ 所诱导的范数. 那么 E 的一组基 $(e_\ell)_{\ell=1}^r$ 是正交基当且仅当对任意 $\{1, \ldots, r\}$ 中相异的两个元素 i 和 j 有 $\langle e_i, e_j\rangle = 0$.*

证明: 假设对任意 $\{1, \ldots, r\}$ 中相异的两个元素 i 和 j 有 $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, 那么对任意 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$ 有

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\|^2 = \sum_{i=1}^r |\lambda_i|^2 \cdot \|e_i\|^2,$$

从而

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\| \geqslant \max_{\ell \in \{1,\ldots,r\}} |\lambda_\ell| \cdot \|e_\ell\|.$$

反过来, 假设 $(e_\ell)_{\ell=1}^r$ 是正交基. 设 i 和 j 是 $\{1, \ldots, r\}$ 中任意两个相异的元素, 并令 $w = \langle e_i, e_j\rangle$. 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}
&\|twe_i + e_j\|^2 = \langle twe_i + e_j, twe_i + e_j\rangle \\
&= t^2|w|^2 \cdot \|e_i\|^2 + t\overline{w}\langle e_i, e_j\rangle + tw\langle e_j, e_i\rangle + \|e_j\|^2 \\
&= t^2|w|^2 \cdot \|e_i\|^2 + 2t|w|^2 + \|e_j\|^2 \geqslant \|e_j\|^2
\end{aligned}$$

其中不等式来自 $(e_\ell)_{\ell=1}^r$ 是正交基的假设. 这样便得到

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad (t^2\|e_i\|^2 + 2t)|w|^2 \geqslant 0.$$

取 $t = -1/\|e_i\|^2$ 代入知 $-|w|^2/\|e_i\|^2 \geqslant 0$. 从而 $w = 0$. □

3.2.6 正交化

定理 3.2.7. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 为有限维赋超范线性空间, $(v_i)_{i=1}^r$ 为 E 的一组基, $\alpha\in\,]0,1[$. 那么存在 E 的一组 α-正交基 $(e_i)_{i=1}^r$, 使得

$$\forall\, i\in\{1,\ldots,r\},\quad e_i\in\mathrm{Vect}_K(\{v_1,\ldots,v_i\}).$$

证明: 对 E 的维数 r 归纳. 当 $r=0$ 或 1 时命题是显然的. 假设 $r\geqslant 2$ 且命题对于维数小于 r 的赋超范线性空间成立. 令 F 为 $v_1,\ldots,v_r$ 生成的线性子空间. 由归纳假设知存在 F 的 $\sqrt{\alpha}$-正交基 $(e_i)_{i=1}^{r-1}$ 使得

$$\forall\, i\in\{1,\ldots,r-1\},\quad e_i\in\mathrm{Vect}_K(\{v_1,\ldots,v_i\}).$$

由于 F 是完备度量空间, 它是 E 的闭线性子空间. 从而 v_r 到 F 的距离非零, 也就是说存在 $y\in F$ 使得

$$\|v_r-y\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{dist}(v_r,F).$$

令 $e_r=v_r-y$. 将证明 $(e_i)_{i=1}^r$ 构成 $(E,\|\cdot\|)$ 的 α-正交基. 设 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in K^r$, $z=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_re_r$. 依定义有

$$\|z\|\geqslant|\lambda_r|\cdot\mathrm{dist}(v_r,F)\geqslant\sqrt{\alpha}\,|\lambda_r|\cdot\|e_r\|,\tag{3.5}$$

所以 $\|z\|\geqslant\alpha|\lambda_r|\cdot\|e_r\|$. 另外, 由归纳假设知

$$\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_{r-1}e_{r-1}\|\geqslant\sqrt{\alpha}\max_{i\in\{1,\ldots,r-1\}}|\lambda_i|\cdot\|e_i\|.$$

如果 $\|\lambda_re_r\|\geqslant\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_{r-1}e_{r-1}\|$, 那么由 (3.5) 知

$$\|z\|\geqslant\alpha\max_{i\in\{1,\ldots,r-1\}}|\lambda_i|\cdot\|e_i\|;$$

如果 $\|\lambda_re_r\|<\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_{r-1}e_{r-1}\|$, 由命题 3.2.2 (a) 知

$$\|z\|=\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_{r-1}e_{r-1}\|,$$

此时仍有

$$\|z\|\geqslant\sqrt{\alpha}\max_{i\{1,\ldots,r-1\}}|\lambda_i|\cdot\|e_i\|\geqslant\alpha\max_{i\{1,\ldots,r-1\}}|\lambda_i|\cdot\|e_i\|.$$

□

注 3.2.8. 上述定理可以看作是有限维赋超范线性空间上的一种弱 Gram-Schmidt 正交化. 假设 $(K,|\cdot|)$ 是球完备的, 也就是说 K 中任意一列单调下降的闭球之交非空, 那么用上述定理证明的方法可以证明 K 上有限维赋超范线性空间上的 Gram-Schmidt 正交化成立 (即在上述定理中可以取 $\alpha=1$), 并且 K 上有限维赋超范线性空间都是球完备的. 特别地, 如果 $|\cdot|$ 是离散绝对值, 也就是说

$$|K^{\times}|=\{|a|\mid a\in K\setminus\{0\}\},$$

是 $\mathbb{R}_{>0}$ 的离散子集, 那么 $(K,|\cdot|)$ 是球完备的, 此时 $(K,|\cdot|)$ 上有限维赋超范线性空间 $(E,\|\cdot\|)$ 中任意一组基都具有 Gram-Schmidt 正交化. 在这个特殊情形也可以利用命题 3.2.2 (b) 推出 $E\setminus\{0\}$ 在 $\|\cdot\|$ 下的像是 $\mathbb{R}_{>0}$ 的离散子集, 从而在定理 3.2.7 中可以取 $\alpha=1$ 并在归纳证明过程中可以取到 $y\in F$ 使得 $\|v_r-y\|$ 等于 v_r 到 F 的距离.

3.2.7 算子范数

设 $(E,\|\cdot\|_E)$ 和 $(F,\|\cdot\|_F)$ 为有限维赋范线性空间. 那么映射

$$\mathrm{Hom}_K(E,F)\longrightarrow\mathbb{R}_{\geqslant 0},\quad f\longmapsto\sup_{x\in E\setminus\{0\}}\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

是 K-线性空间 $\mathrm{Hom}_K(E,F)$ 上的范数, 称为**算子范数**.

3.2.8 对偶范数

定义 3.2.9. 设 E 为 K 上的有限维线性空间, r 为其在 K 上的维数. 用 $E^{\vee}$ 表示 E 的对偶空间, 也就是说从 E 到 K 的 K-线性映射组成的空间. 如果 $\|\cdot\|$ 是 E 上的范数, 用 $\|\cdot\|_*$ 表示如下定义的 $E^{\vee}$ 上的算子范数

$$\forall\,\varphi\in E^{\vee},\quad \|\varphi\|_*:=\sup_{x\in E\setminus\{0\}}\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|},$$

称为 $\|\cdot\|$ 的**对偶范数**.

命题 3.2.10. *假设 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值. 如果 $(E,\|\cdot\|)$ 是有限维赋范线性空间, 那么 $\|\cdot\|_*$ 是超范数.*

证明: 设 φ 和 ψ 为 $E^{\vee}$ 中两个元素. 由于 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值, 对任意 $x\in E$ 有

$$|(\varphi+\psi)(x)|=|\varphi(x)+\psi(x)|\leqslant\max\{|\varphi(x)|,|\psi(x)|\}.$$

所以

$$\|\varphi+\psi\|_* = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{|(\varphi+\psi)(x)|}{\|x\|} \leqslant \max\{\|\varphi\|_*, \|\psi\|_*\}.$$

□

注 3.2.11. 若将双重对偶空间 $E^{\vee\vee}$ 自然等同于 E, 可将 $\|\cdot\|_{**}$ 视为 E 上的范数. 当 $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上通常的绝对值时, 由 Hahn-Banach 定理知道 $\|\cdot\|_{**}=\|\cdot\|$; 而当 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值且 $\|\cdot\|$ 不是超范数的时候, $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{**}$ 并不相同.

命题 3.2.12. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 为有限维赋范线性空间, $\alpha\in\,]0,1]$, $(e_i)_{i=1}^r$ 为 E 的一组 α-正交基, $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ 为 $(e_i)_{i=1}^r$ 在 $E^\vee$ 中的对偶基.

(a) 对任意 $i\in\{1,\ldots,r\}$ 有

$$1\leqslant \|e_i^\vee\|_*\cdot\|e_i\|\leqslant \alpha^{-1}. \tag{3.6}$$

(b) $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ 是 $(E^\vee,\|\cdot\|_*)$ 的 α-正交基.

(c) $(e_i)_{i=1}^r$ 是 $(E,\|\cdot\|_{**})$ 的 α-正交基, 并且

$$\forall\, i\in\{1,\ldots,r\},\quad \alpha\|e_i\|\leqslant\|e_i\|_{**}\leqslant\|e_i\|.$$

证明: (a) 依定义有 $e_i^\vee(e_i)=1$, 所以

$$\|e_i^\vee\|_*\geqslant\|e_i\|^{-1}.$$

另外, 由于 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 α-正交基, 对任意 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in K^r$ 有

$$\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_re_r\|\geqslant\alpha|\lambda_i|\cdot\|e_i\|.$$

所以

$$\begin{aligned}\|e_i^\vee\|_* &= \sup_{\substack{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in K^r\\ \lambda_i\neq 0}} \frac{|e_i^\vee(\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_re_r)|}{\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_re_r\|}\\ &= \sup_{\substack{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in K^r\\ \lambda_i\neq 0}} \frac{|\lambda_i|}{\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_re_r\|}\leqslant\alpha^{-1}\frac{|\lambda_i|}{\|\lambda_ie_i\|}=\frac{1}{\alpha\|e_i\|}.\end{aligned}$$

(b) 设 $\varphi=b_1e_1^\vee+\cdots+b_re_r^\vee$ 为 $E^\vee$ 中的元素. 由于 $\varphi(e_i)=b_i$, 知

$$\|\varphi\|_*\geqslant\frac{|b_i|}{\|e_i\|}\geqslant\alpha|b_i|\cdot\|e_i^\vee\|_*,$$

其中第二个不等式来自于 (a). 所以 $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ 是 α-正交基.

(c) 对 $(E^\vee, \|\cdot\|_*)$ 运用 (b) 的结论知 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 $(E, \|\cdot\|_{**})$ 的 α-正交基. 对 $(E^\vee, \|\cdot\|_*)$ 运用 (a) 的结论得到

$$\frac{1}{\|e_i^\vee\|_*} \leqslant \|e_i\|_{**},$$

再结合 (3.6) 便得到 $\alpha\|e_i\| \leqslant \|e_i\|_{**}$. 最后, 对任意 $\varphi \in E^\vee$, 由对偶范数的定义知

$$|\varphi(e_i)| \leqslant \|\varphi\|_* \cdot \|e_i\|,$$

从而 $\|e_i\|_{**} \leqslant \|e_i\|$. □

注 3.2.13. 从命题 3.2.12 的证明中看出, (3.6) 中的第一个不等式对任意 E 的基 $(e_i)_{i=1}^r$ 成立. 第二个不等式实际与基 $(e_i)_{i=1}^r$ 的 α-正交性等价. 设 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 E 的一组基, 使得

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, r\}, \quad \|e_i^\vee\|_* \leqslant \frac{1}{\alpha\|e_i\|}. \tag{3.7}$$

设 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$. 如果 j 是 $\{1, \ldots, r\}$ 中的元素, 使得

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\| < \alpha|\lambda_j| \cdot \|e_j\|.$$

那么

$$\|e_j^\vee\|_* \geqslant \frac{|\lambda_j|}{\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\|} > \frac{1}{\alpha\|e_j\|}.$$

这与 (3.7) 矛盾. 所以

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\| \geqslant \alpha \max_{i \in \{1, \ldots, r\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|.$$

从上述推理得出, 若 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 E 的任意一组基,

$$\alpha = \min_{i \in \{1, \ldots, r\}} \frac{1}{\|e_i\| \cdot \|e_i^\vee\|_*} \in \left]0, 1\right],$$

那么 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 α-正交基.

3.2.9 行列式范数

定义 3.2.14. 若 E 为有限维 K-线性空间, r 为 E 的维数, 用 $\det(E)$ 来表示外积空间 $\Lambda^r(E)$. 这是一维 K-线性空间, 并且 K-线性映射

$$E^{\otimes r} \longrightarrow \det(E), \quad x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$$

是满射, 称为 $E^{\otimes r}$ 到 $\det(E)$ 的**自然投影映射**. 如果 $\|\cdot\|$ 是 E 上的范数, 用 $\|\cdot\|_{\det}:\det(E)\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 来表示映射

$$(\eta\in\det(E))\longmapsto \inf_{\substack{(e_i)_{i=1}^r\in E^r\\ \eta=e_1\wedge\cdots\wedge e_r}}\|e_1\|\cdots\|e_r\|. \tag{3.8}$$

由于 $\det(E)$ 是一维线性空间, 知对任意 $(a,\eta)\in K\times\det(E)$ 有

$$\|a\eta\|_{\det}=|a|\cdot\|\eta\|_{\det}.$$

特别地, 函数

$$E^r\longrightarrow\mathbb{R}_{\geqslant 0},\quad (x_1,\ldots,x_r)\mapsto\|x_1\wedge\cdots\wedge x_r\|_{\det}$$

是连续函数. 另外, 依定义得到如下不等式, 称为 Hadamard **不等式**:

$$\forall\,(e_i)_{i=1}^r\in E^r,\quad \|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}\leqslant\|e_1\|\cdots\|e_r\|. \tag{3.9}$$

命题 3.2.15. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 为有限维赋范线性空间, r 为 E 的维数. 那么 $\|\cdot\|_{\det}$ 是 $\det(E)$ 上的范数, 并且

$$\sup_{(x_i)_{i=1}^r\in\mathscr{B}_E}\frac{\|x_1\wedge\cdots\wedge x_r\|_{\det}}{\|x_1\|\cdots\|x_r\|}=1, \tag{3.10}$$

其中 $\mathscr{B}_E$ 表示 E 的所有的基组成的集合. 另外, 若 $\alpha\in\,]0,1]$, $(e_i)_{i=1}^r$ 为 E 的一组基, 则以下命题成立.

(a) 如果

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}\geqslant\alpha\|e_1\|\cdots\|e_r\|,$$

那么 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 α-正交基.

(b) 假设 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 α-正交基. 当 $|\cdot|$ 是阿基米德绝对值时

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}\geqslant\frac{\alpha^r}{r!}\|e_1\|\cdots\|e_r\|;$$

当 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值时,

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}\geqslant\alpha^r\|e_1\|\cdots\|e_r\|.$$

(c) 假设下述条件之一成立:

(c.1) $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值,

(c.2) $(K,|\cdot|)$ 是赋通常绝对值的 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 且 $\|\cdot\|$ 是某内积诱导的范数.

那么 $(e_i)_{i=1}^r$ 是正交基当且仅当 $\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}=\|e_1\|\cdots\|e_r\|$. 另外, 如果 $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ 是 $(e_i)_{i=1}^r$ 的对偶基, 那么

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}\cdot\|e_1^\vee\wedge\cdots\wedge e_r^\vee\|_{*,\det}=1. \tag{3.11}$$

证明: 首先由 Hadamard 不等式 (3.9) 知

$$\sup_{(x_i)_{i=1}^r\in\mathscr{B}_E}\frac{\|x_1\wedge\cdots\wedge x_r\|_{\det}}{\|x_1\|\cdots\|x_r\|}\leqslant 1.$$

反过来, 设 $\eta\in\det(E)\setminus\{0\}$. 如果 $\|\cdot\|_{\det}$ 是 $\det(E)$ 上的范数, 那么 $\|\eta\|_{\det}\neq 0$. 从而

$$\sup_{(x_i)_{i=1}^r\in\mathscr{B}_E}\frac{\|x_1\wedge\cdots\wedge x_r\|_{\det}}{\|x_1\|\cdots\|x_r\|}\geqslant\sup_{\substack{(x_i)_{i=1}^r\in\mathscr{B}_E\\ x_1\wedge\cdots\wedge x_r=\eta}}\frac{\|\eta\|_{\det}}{\|x_1\|\cdots\|x_r\|}=1.$$

这样在 $\|\cdot\|_{\det}$ 是 $\det(E)$ 上的范数的前提下等式 (3.10) 成立.

(a) 设 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in K^r$, $x=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_re_r$. 对任意 $i\in\{1,\ldots,r\}$ 有

$$e_1\wedge\cdots\wedge e_{i-1}\wedge x\wedge e_{i+1}\wedge\cdots\wedge e_r=\lambda_ie_1\wedge\cdots\wedge e_r.$$

由 Hadamard 不等式 (3.9) 知

$$|\lambda_i|\cdot\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}\leqslant\|e_1\|\cdots\|e_{i-1}\|\cdot\|x\|\cdot\|e_{i+1}\|\cdots\|e_r\|.$$

如果不等式 $\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}\geqslant\alpha\|e_1\|\cdots\|e_r\|$ 成立, 那么便得到

$$\|x\|\geqslant\alpha|\lambda_i|\cdot\|e_i\|.$$

所以 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 α-正交基.

(b) 设 $(x_i)_{i=1}^r$ 为 E 的任意一组基, 使得 $e_1\wedge\cdots\wedge e_r=x_1\wedge\cdots\wedge x_r$. 令

$$A=(a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2}\in K^{r\times r}$$

为从 $(e_j)_{j=1}^r$ 到 $(x_i)_{i=1}^r$ 的转移矩阵, 也就是说

$$\forall\, i\in\{1,\ldots,r\},\quad x_i=\sum_{j=1}^r a_{i,j}e_j.$$

这样 $\det(A)=1$. 由于 $(e_j)_{j=1}^r$ 是 α-正交基, 知

$$\forall\,(i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2,\quad |a_{i,j}|\leqslant\alpha^{-1}\frac{\|x_i\|}{\|e_j\|}.$$

将矩阵 A 的行列式展开后, 由三角形不等式得到

$$1=|\det(A)|\leqslant r!\alpha^{-r}\frac{\|x_1\|\cdots\|x_r\|}{\|e_1\|\cdots\|e_r\|};$$

当 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值的时候, 由强三角形不等式得到

$$1=|\det(A)|\leqslant\alpha^{-r}\frac{\|x_1\|\cdots\|x_r\|}{\|e_1\|\cdots\|e_r\|}.$$

对 $(x_i)_{i=1}^r$ 取下确界就得到要证的不等式.

由 (b) 可以推出 $\|\cdot\|_{\det}$ 是 $\det(E)$ 上的范数. 事实上, 任取 E 的一组基 $(e_i)_{i=1}^r$, 由注 3.2.13 知存在某 $\alpha\in\,]0,1]$ 使得 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 α-正交基. 这样

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}\geqslant\frac{\alpha^r}{r!}\|e_1\|\cdots\|e_r\|>0.$$

这说明了 $\|\cdot\|_{\det}$ 是 $\det(E)$ 上的范数. 特别地, 等式 (3.10) 总是成立.

(c) 条件 (c.1) 的情形下, 第一个命题是 (a), (b) 和 Hadamard 不等式 (3.9) 的直接推论. 至于第二个命题, 注意到

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}\cdot\|e_1^\vee\wedge\cdots\wedge e_r^\vee\|_{*,\det}$$

的值不依赖于基 $(e_i)_{i=1}^r$ 的选择. 我们将这个常数记作 C. 设 $(e_i)_{i=1}^r$ 为一组 α-正交基, 其中 $\alpha\in\,]0,1[$. 首先由 Hadamard 不等式和 (3.6) 知

$$C\leqslant\prod_{i=1}^r\|e_i^\vee\|_*\cdot\|e_i\|\leqslant\alpha^{-r}.$$

然后由命题 3.2.12 (b) 推出 $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ 是 $(E^\vee,\|\cdot\|_*)$ 的 α-正交基, 又由 (b) 和 (3.6) 得到

$$C\geqslant\alpha^{2r}\prod_{i=1}^r\|e_i^\vee\|_*\cdot\|e_i\|\geqslant\alpha^{2r}.$$

由定理 3.2.7 知, 对任意 $\alpha\in\,]0,1[$, $(E,\|\cdot\|)$ 具有 α-正交基. 所以 $C=1$.

以下假设条件 (c.2). 由 (a), 只须验证, 如果 $(e_i)_{i=1}^r$ 是标准正交基, 那么等式

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}=1$$

成立. 在 K 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的情形等式 (3.10) 等价于

$$\sup_{\substack{(x_i)_{i=1}^r \in E^r \\ \|x_1\|=\cdots=\|x_r\|=1}} \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\|_{\det} = 1$$

由于 E 是局部紧空间, 知存在 E 的一组基 $(x_1, \ldots, x_r)$, 使得

$$\|x_1\| = \cdots = \|x_r\| = 1$$

并且

$$\|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\|_{\det} = 1 = \|x_1\| \cdots \|x_r\|.$$

由 (a) 知 $(x_i)_{i=1}^r$ 是标准正交基. 这样从 $(x_i)_{i=1}^r$ 到 $(e_i)_{i=1}^r$ 的转移矩阵是正交矩阵或酉矩阵, 其行列式的绝对值等于 1. 从而

$$\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{\det} = \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\|_{\det} = 1.$$

另外, $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ 也是标准正交基, 从而等式 (3.11) 成立. □

推论 3.2.16. 设 $(E, \|\cdot\|_E)$ 和 $(F, \|\cdot\|_F)$ 为有限维赋范线性空间, $f : E \to F$ 为 K-线性同构, r 为 E 在 K 上的维数. 那么

$$\|\det(f)\| \leqslant \|f\|^r,$$

其中 $\det(f) : \det(E) \to \det(F)$ 表示将 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ 映为 $f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_r)$ 的 K-线性映射, $\|\det(f)\|$ 和 $\|f\|$ 分别表示 $\det(f)$ 和 f 的算子范数.

证明: 对任意 $\det(E)$ 中的非零元 $x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$, 由 (3.9) 知

$$\begin{aligned}\|\det(f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r)\|_{F,\det} &= \|f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_r)\|_{F,\det} \\ &\leqslant \prod_{i=1}^r \|f(x_r)\|_F \leqslant \|f\|^r \prod_{i=1}^r \|x_i\|_E.\end{aligned}$$

由于 $\det(E)$ 和 $\det(F)$ 都是一维 K-线性空间, 知

$$\|\det(f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r)\|_{F,\det} = \|\det(f)\| \cdot \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\|_{E,\det}.$$

从而

$$\|\det(f)\| \leqslant \|f\|^r \frac{\|x_1\|_E \cdots \|x_r\|_E}{\|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\|_{E,\det}}.$$

对 $(x_1, \ldots, x_r)$ 取下确界, 从 (3.10) 得到不等式 $\|\det(f)\| \leqslant \|f\|^r$. □

命题 3.2.17. 假设 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值. 若 $(E,\|\cdot\|)$ 是有限维赋范线性空间, 那么 $\|\cdot\|_{**}$ 是处处不大于 $\|\cdot\|$ 的最大的超范数. 换句话说, 如果 E 上的超范数 $\|\cdot\|'$ 满足 $\|\cdot\|'\leqslant\|\cdot\|$, 那么有 $\|\cdot\|'\leqslant\|\cdot\|_{**}$. 特别地, 如果 $\|\cdot\|$ 已是超范数, 那么 $\|\cdot\|_{**}=\|\cdot\|$.

证明: 设 $\alpha\in\,]0,1[$. 由命题 3.2.15 知 $(E,\|\cdot\|)$ 具有某 α-正交基 $(e_i)_{i=1}^r$. 令 $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ 为 $(e_i)_{i=1}^r$ 在 $E^\vee$ 中的对偶基. 由命题 3.2.12 (b) 知 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 $(E,\|\cdot\|_{**})$ 的 α-正交基. 对任意 $x=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_re_r\in E$, 有

$$\|x\|_{**}\geqslant\alpha\max_{i\in\{1,\ldots,r\}}|\lambda_i|\cdot\|e_i\|_{**}\geqslant\alpha^2\max_{i\in\{1,\ldots,r\}}|\lambda_i|\cdot\|e_i\|\geqslant\alpha^2\|x\|',$$

其中第二个不等式来自命题 3.2.12 (c). 令 α 趋于 1 便得到 $\|\cdot\|'\leqslant\|\cdot\|_{**}$.

□

3.2.10 张量积

设 $(E,\|\cdot\|_E)$ 为有限维赋范线性空间, $(M,\|\cdot\|_M)$ 为一维赋范线性空间. 由于 M 的维数为 1, 任意 $E\otimes_K M$ 中的元素可以写成 $s\otimes\ell$ 的形式, 其中 $s\in E$, $\ell\in M$. 另外, 如果 $s\otimes\ell=s'\otimes\ell'$ 且 $s\neq0$, 那么存在 K 中的元素 a 使得 $s'=as$ 且 $\ell=a\ell'$, 从而等式

$$\|s\|_E\cdot\|\ell\|_M=\|s'\|_E\cdot\|\ell'\|_M$$

成立. 这样函数

$$E\otimes_K M\longrightarrow\mathbb{R}_{\geqslant0},\quad s\otimes\ell\longmapsto\|s\|_E\cdot\|\ell\|_M$$

是 $E\otimes_K M$ 上的范数, 称为 $\|\cdot\|_E$ 和 $\|\cdot\|_M$ 的**张量积**. 不难证明, 如果 $\|\cdot\|_E$ 是超范数, 那么 $\|\cdot\|_E$ 与 $\|\cdot\|_M$ 的张量积也是超范数.

3.2.11 正交直和

假设 $|\cdot|$ 为非阿基米德绝对值. 令 $(E_i,\|\cdot\|_i)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$ 为一族有限维赋超范线性空间, $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_n$ 为这些线性空间的直和. 考虑 E 上如下定义的超范数 $\|\cdot\|$:

$$\forall\,x=(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\oplus\cdots\oplus E_n,\quad\|x\|=\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\|x_i\|_i.$$

该范数称为 $\|\cdot\|_1,\ldots,\|\cdot\|_n$ 的**正交直和**. 由定义不难看出, 若将 E_i 视为 E 的线性子空间, 那么 $\|\cdot\|$ 在 E_i 上的限制等于 $\|\cdot\|_i$. 另外, 若对任意 $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\boldsymbol{e}_i=(e_{i,j})_{j=1}^{r_i}$ 是 $(E_i,\|\cdot\|_i)$ 的一组 α-正交基, 其中 $\alpha\in\,]0,1]$, 那么 $\bigcup_{i=1}^n\boldsymbol{e}_i$ 是 $(E,\|\cdot\|)$ 的 α-正交基. 这样由命题 3.2.15 推出, 对任意 $(\eta_i)_{i=1}^n\in\det(E_1)\times\cdots\times\det(E_n)$ 有

$$\|\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_n\|_{\det}=\prod_{i=1}^n\|\eta_i\|_{i,\det}. \tag{3.12}$$

另外, 如果将 E 的对偶空间等同于 $E_1^\vee\oplus\cdots\oplus E_n^\vee$, 那么 $\|\cdot\|$ 的对偶范数满足

$$\forall\, f=(f_1,\ldots,f_n)\in E_1^\vee\oplus\cdots\oplus E_n^\vee,\quad \|f\|_*=\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\|f_i\|_{i,*}.$$

事实上, 对任意 $x=(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\oplus\cdots\oplus E_n$,

$$\begin{aligned}|f(x)|=|f_1(x_1)+\cdots+f_n(x_n)|&\leqslant\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}|f_i(x_i)|\\&\leqslant\max_{i\in\{1\ldots,n\}}\|f_i\|_{i,*}\cdot\|x_i\|_i\leqslant\|x\|\cdot\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\|f_i\|_{i,*}.\end{aligned}$$

反过来, 对任意 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 有

$$\|f\|_*\geqslant\sup_{x_i\in E_i\setminus\{0\}}\frac{|f(x_i)|}{\|x_i\|_i}=\sup_{x_i\in E_i\setminus\{0\}}\frac{|f_i(x_i)|}{\|x_i\|_i}=\|f_i\|_{i,*}.$$

注 3.2.18. 假设 $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上通常的绝对值. 设 $(E_i,\|\cdot\|_i)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$ 为一族有限维赋范线性空间, 并假设 $\|\cdot\|_1,\ldots,\|\cdot\|_n$ 都是由内积诱导的范数. 那么 $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_n$ 上如下定义的范数 $\|\cdot\|$ 也是由内积诱导的范数

$$\forall\, x=(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\oplus\cdots\oplus E_n,\quad \|x\|=\sqrt{\|x_1\|_1^2+\cdots+\|x_n\|_n^2}.$$

这个范数是通常意义下 $\|\cdot\|_1,\ldots,\|\cdot\|_n$ 的正交直和. 不难验证, 如果对任意 $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\boldsymbol{e}_i$ 是 $(E_i,\|\cdot\|_i)$ 的标准正交基, 那么 $\bigcup_{i=1}^n\boldsymbol{e}_i$ 是 $(E,\|\cdot\|)$ 的标准正交基. 另外, $\|\cdot\|_*$ 等同于 $\|\cdot\|_{1,*},\ldots,\|\cdot\|_{n,*}$ 的正交直和. 最后, 对于任意 $(\eta_i)_{i=1}^n\in\det(E_1)\times\cdots\times\det(E_n)$ 有

$$\|\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_n\|_{\det}=\prod_{i=1}^n\|\eta_i\|_{i,\det}.$$

3.2.12 纯范数

假设 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值并令 K° 为其赋值环. 若 E 为有限维 K-线性空间, 所谓 E 中的**网格**, 是指 E 的有界[33]并包含 E 的一组基的子 K°-模. 从定义不难看出, 如果 $|\cdot|$ 是非平凡的绝对值并且 $\|\cdot\|$ 是 E 上的超范数, 对任意 $\varepsilon > 0$, 以 ε 为半径的闭球

$$(E, \|\cdot\|)_{\leqslant \varepsilon} := \{s \in E \mid \|s\| \leqslant \varepsilon\}$$

和开球

$$(E, \|\cdot\|)_{< \varepsilon} := \{s \in E \mid \|s\| < \varepsilon\}$$

都是 E 中的网格.

命题 3.2.19. 设 E 为有限维 K-线性空间, $\mathcal{E}$ 为 E 中的网格. 对任意 $s \in E$, 令

$$\|s\|_{\mathcal{E}} := \inf\{|a| \mid a \in K^\times,\ a^{-1}s \in \mathcal{E}\}.$$

那么以下命题成立.

(1) 函数 $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 是 E 上的超范数, 并且 $\mathcal{E} \subset (E, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})_{\leqslant 1}$.

(2) 如果 $\mathcal{E}$ 是有限生成 K°-模, 那么它是自由 K°-模, 并且 $\mathcal{E}$ 在 K° 上的任意一组基都是 $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ 的标准正交基.

(3) 当 $|\cdot|$ 是离散绝对值时 $\mathcal{E}$ 总是有限生成自由 K°-模, 并且 $\mathcal{E} = (E, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})_{\leqslant 1}$.

证明: 当 $|\cdot|$ 是平凡的绝对值时有 $K^\circ = K$ 且 $\mathcal{E} = E$. 此时 $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 在 $E \setminus \{0\}$ 上恒取值 1, 在 0 上取值 0. 从而 $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 是 E 上的超范数, 并且 E 的任意一组基都是 $(E, \|\cdot\|)$ 的标准正交基. 以下假设 $|\cdot|$ 是非平凡的绝对值.

(1) 对任意 $x \in E$, 令

$$A_x = \{a \in K^\times \mid a^{-1}x \in \mathcal{E}\}.$$

设 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 $\mathcal{E}$ 中的元素, 构成 E 在 K 上的一组基. 若 $x = a_1e_1 + \cdots + a_re_r$, 其中 $(a_1, \ldots, a_r) \in K^r$, 那么存在 $b \in K^\times$ 使得 $\{ba_1, \ldots, ba_r\} \subset K^\circ$. 这说明 $b^{-1} \in A_x$. 从而对任意 $x \in E$ 有 $A_x \neq \varnothing$. 所以 $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 是定义在 E 上的非

[33]这里的有界性是指相对于 E 的某个范数来说有界, 由定理 3.2.5 知这也等价于相对于 E 的任意一个范数来说有界.

负实值函数. 另外, 对任意 $a \in K^{\times}$, 映射 $b \mapsto ab$ 是从 A_x 到 A_{ax} 的一一对应, 从而等式 $\|ax\|_{\mathcal{E}} = |a| \cdot \|x\|_{\mathcal{E}}$ 成立.

设 x 和 y 为 E 中两个元素, $a \in A_x$ 且 $b \in A_y$. 那么 $\{a^{-1}x, b^{-1}y\} \subset \mathcal{E}$. 由于 K° 是赋值环, 要么 $b^{-1}a \in K^{\circ}$, 要么 $a^{-1}b \in K^{\circ}$. 从而由等式

$$a^{-1}(x+y) = a^{-1}x + a^{-1}y = a^{-1}x + (a^{-1}b)(b^{-1}y),$$
$$b^{-1}(x+y) = b^{-1}x + b^{-1}y = (b^{-1}a)(a^{-1}x) + b^{-1}y$$

推出 $a \in A_{x+y}$ 或 $b \in A_{x+y}$. 所以强三角形不等式

$$\|x+y\|_{\mathcal{E}} \leqslant \max\{\|x\|_{\mathcal{E}}, \|y\|_{\mathcal{E}}\}$$

成立.

假设存在 $x \in E \setminus \{0\}$ 使得 $\|x\|_{\mathcal{E}} = 0$, 那么存在 A_x 中的序列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0$. 然而 $a_n^{-1}x \in \mathcal{E}$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 这与 $\mathcal{E}$ 有界的假设矛盾. 这样我们证明了 $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 是 E 上的超范数.

如果 x 是 $\mathcal{E}$ 中的元素, 那么 $1 \in A_x$, 从而 $1 = |1| \geqslant \|x\|_{\mathcal{E}}$.

(2) 由于 $\mathcal{E}$ 是 E 的子 K°-模, 它是无挠 K°-模. 如果 $\mathcal{E}$ 是有限生成 K°-模, 由于 K° 是赋值环, 知 $\mathcal{E}$ 是自由模 (见 [24] Chapter VI, §4, no.6, Lemma 1). 设 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 $\mathcal{E}$ 在 K° 上的一组基. 设 x 为 E 中的元素, 形如

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r.$$

若 a 是 A_x 中的元素, 那么对任意 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 有 $a^{-1}\lambda_i \in K^{\circ}$, 即 $|\lambda_i| \leqslant |a|$. 从而 $\max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_r|\} \leqslant \|x\|_{\mathcal{E}}$. 反过来, 如果 $j \in \{1, \ldots, r\}$ 使得

$$|\lambda_j| = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_r|\} > 0,$$

那么对任意 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 有 $\lambda_i \lambda_j^{-1} \in K^{\circ}$. 从而 $\lambda_j^{-1}x \in \mathcal{E}$, 即 $\lambda_j \in A_x$. 这样就得到

$$\|x\|_{\mathcal{E}} \leqslant |\lambda_j| = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_r|\}.$$

从而 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ 的标准正交基.

(3) 如果 $|\cdot|$ 是离散绝对值, 那么 K° 是 Noether 环, 而 $\mathcal{E}$ 的有界性说明了 $\mathcal{E}$ 是某有限生成 K°-模的子模, 从而也是有限生成模. 上一段的证明说明了 $\mathcal{E}$ 是自由 K°-模. 令 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 $\mathcal{E}$ 在 K° 上的一组基, 它是 $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ 的标准正交基. 设 $x \in E$ 形如 $a_1e_1 + \cdots + a_re_r$, 其中 $(a_1, \ldots, a_r) \in K^r$. 如果 $x \in \mathcal{E}$, 那么对任意 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 有 $a_i \in K^{\circ}$. 从而 $x \in \mathcal{E}$. 这说明

$(E, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ 的单位闭球包含在 $\mathcal{E}$ 之中. 前面又证明了反向的包含关系, 从而等式 $\mathcal{E} = (E, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})_{\leqslant 1}$ 成立. □

定义 3.2.20. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为 K 上的有限维赋范线性空间. 假设存在 E 中的网格 $\mathcal{E}$, 使得 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, 那么说 $\|\cdot\|$ 是**纯范数**.

命题 3.2.21. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为 K 上的有限维赋超范线性空间, $\mathcal{E} = (E, \|\cdot\|)_{\leqslant 1}$ 为其单位闭球. 那么对任意 $x \in E$ 有 $\|x\| \leqslant \|x\|_{\mathcal{E}}$. 另外, 以下条件等价:

(1) $\|\cdot\|$ 是纯范数,

(2) $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{E}}$,

(3) $\|\cdot\|$ 的像包含于 $|\cdot|$ 的像的闭包之中.

特别地, 如果 $|\cdot|$ 不是离散的绝对值, 那么 $\|\cdot\|$ 总是纯范数; 如果 $|\cdot|$ 是离散的绝对值, 那么 $\|\cdot\|$ 是纯范数当且仅当 $(E, \|\cdot\|)$ 具有一组标准正交基.

证明: 设 $a \in K^{\times}$ 使得 $a^{-1}x \in \mathcal{E}$, 那么

$$\|a^{-1}x\| = \frac{\|x\|}{|a|} \leqslant 1,$$

即 $\|x\| \leqslant |a|$. 从而不等式 $\|x\| \leqslant \|x\|_{\mathcal{E}}$ 成立.

以下证明三个条件的等价性. 依定义不难看出 (2) 蕴含 (1), 以及 (1) 蕴含 (3). 以下证明 (3) 蕴含 (2). 假设 $\|\cdot\|$ 的像包含于 $|\cdot|$ 的像的闭包之中. 对任意 $x \in E$,

$$\|x\|_{\mathcal{E}} = \inf\{|a| \mid a \in K^{\times},\ a^{-1}x \in \mathcal{E}\} = \inf\{|a| \mid a \in K^{\times},\ |a| \geqslant \|x\|\}.$$

由于 $\|x\|$ 属于 $|\cdot|$ 的像的闭包, 知 $\|x\|_{\mathcal{E}} = \|x\|$.

当 $|\cdot|$ 不是离散绝对值时, $|\cdot|$ 的像在 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 中稠密, 所以 $\|\cdot\|$ 是纯范数. 假设 $|\cdot|$ 是离散绝对值. 如果 $\|\cdot\|$ 是纯范数, $\mathcal{E} = (E, \|\cdot\|)_{\leqslant 1}$, 那么 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{E}}$. 由命题 3.2.19 知 $\mathcal{E}$ 是有限生成自由 K°-模, 并且 $\mathcal{E}$ 的任意一组基都是 $(E, \|\cdot\|)$ 的标准正交基. 反过来, 如果 $(e_i)_{i=1}^{r}$ 是 $(E, \|\cdot\|)$ 的标准正交基, 那么

$$\forall\, (a_1, \ldots, a_r) \in K^r, \quad \|a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r\| = \max_{i \in \{1, \ldots, r\}} |a_i| \in \mathrm{Im}(|\cdot|).$$

这说明了 $\|\cdot\|$ 是纯范数. □

定义 3.2.22. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 为 K 上的有限维赋超范线性空间, $\mathcal{E}=(E,\|\cdot\|)_{\leqslant 1}$ 为 $(E,\|\cdot\|)$ 的单位闭球. 那么范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ 称为 $\|\cdot\|$ 的**纯化**, 通常记作 $\|\cdot\|_{\mathrm{pur}}$. 由命题 3.2.21 知, $\|\cdot\|$ 是纯范数当且仅当其纯化等于自身. 另外, 命题 3.2.19 说明了 $(E,\|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ 的单位闭球等于 $\mathcal{E}$. 另外, 为了叙述方便, 如果 $(E,\|\cdot\|)$ 是某阿基米德赋值域上的有限维线性赋范空间, 约定 $\|\cdot\|_{\mathrm{pur}}:=\|\cdot\|$.

注 3.2.23. 假设 $|\cdot|$ 是离散的绝对值. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 为 K 上的有限维赋超范线性空间并设 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 $(E,\|\cdot\|)$ 的一组正交基. 那么 $(e_i)_{i=1}^r$ 也是 $(E,\|\cdot\|_{\mathrm{pur}})$ 的一组正交基. 事实上, 如果 $x=a_1e_1+\cdots+a_re_r$ 是 E 中的非零元素, 其中 $(a_1,\ldots,a_r)\in K^r$, 那么

$$\|x\|_{\mathrm{pur}}=\min\{|a|\mid a\in K^{\times},\ \|x\|=\max\{\|a_1e_1\|,\ldots,\|a_re_r\|\}\leqslant |a|\}.$$

而对任意 $i\in\{1,\ldots,r\}$ 有

$$\|a_ie_i\|_{\mathrm{pur}}=\min\{|a|\mid a\in K^{\times},\ \|a_ie_i\|\leqslant |a|\}.$$

从而

$$\|x\|_{\mathrm{pur}}=\max_{i\in\{1,\ldots,r\}}\|a_ie_i\|_{\mathrm{pur}}.$$

3.3 有理函数域上的绝对值

本节中固定一个域 k, 用 $k(T)$ 表示多项式环 $k[T]$ 的分式域. 由欧几里得除法知 $k[T]$ 是主理想整环, $k[T]$ 的任意非零理想 I 中都有唯一的首一多项式 ϖ_I 构成理想 I 的生成元. 另外, $k[T]$ 的理想 $\mathfrak{p}$ 是极大理想当且仅当 $\varpi_{\mathfrak{p}}$ 是不可约多项式; $k[T]$ 的非零素理想都是极大理想.

本节中我们考虑限制在 k 上是平凡绝对值的那些 $k(T)$ 上的绝对值. 由于 $\mathbb{Z}\to k(T)$ 的像包含在 k 之中, 这样的绝对值在 $\mathbb{Z}\to k(T)$ 的像上的限制是有界函数, 所以一定是非阿基米德绝对值.

3.3.1 对应于多项式环极大理想的绝对值

定义 3.3.1. 用 $\mathrm{Spm}(k[T])$ 来表示多项式环 $k[T]$ 的所有极大理想构成的集合. 由多项式的唯一分解定理知, $k(T)$ 中的任意非零元 f 可以分解成

$$f=a(f)\prod_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spm}(k[T])}\varpi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)}$$

的形式, 其中 $a(f)\in k^{\times}$, $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)\in\mathbb{Z}$, 而且至多只有有限多个 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spm}(k[T])$ 使得 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)\neq 0$. 约定 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(0)=+\infty$. 这样得到一个函数

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}:k(T)\longrightarrow\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}.$$

由定义不难看出, 对任意 $(f,g)\in k(T)\times k(T)$ 有

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(fg)=\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)+\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(g).\tag{3.13}$$

注意到对任意 $F\in k[T]$ 有 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(F)\geqslant 0$, 并且 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(F)=0$ 当且仅当 $F\in k[T]\setminus\mathfrak{p}$.

命题 3.3.2. 设 $\mathfrak{p}$ 为 $k[T]$ 的极大理想.

(a) 对任意 $(f,g)\in k(T)\times k(T)$ 有

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f+g)\geqslant\min\{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f),\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(g)\}.\tag{3.14}$$

(b) 对任意 $q\in\mathbb{R}_{>1}$, 映射 (约定 $q^{-\infty}=0$)

$$|\cdot|_{\mathfrak{p},q}:k(T)\longrightarrow\mathbb{R}_{\geqslant 0},\quad f\in k(T)\longmapsto|f|_{\mathfrak{p},q}=q^{-\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)\deg(\varpi_{\mathfrak{p}})}$$

是 $k(T)$ 上的非阿基米德绝对值, 其在 k 上的限制是平凡的绝对值.

(c) 对任意 $q\in\mathbb{R}_{>1}$,

$$\mathfrak{p}=\{f\in k[T]\mid |f|_{\mathfrak{p},q}<1\}$$

证明: (a) 依定义, 任意 $k(T)$ 中的非零元 f 可以写成

$$f=\varpi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)}\frac{G_f}{H_f}$$

的形式, 其中 G_f 和 H_f 是 $k[T]\setminus\mathfrak{p}$ 中的元素. 令 f 和 g 为 $k(T)$ 中两个非零元, $a=\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)$, $b=\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(g)$. 不妨设 $a\leqslant b$, 那么

$$f+g=\varpi_{\mathfrak{p}}^{a}\Big(\frac{G_f}{H_f}+\frac{\varpi_{\mathfrak{p}}^{b-a}G_g}{H_g}\Big)=\varpi_{\mathfrak{p}}^{a}\frac{G_fH_g+\varpi_{\mathfrak{p}}^{b-a}G_gH_f}{H_fH_g}$$

由于函数 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\cdot)$ 在 $k[T]$ 上取非负值, 在 $k[T]\setminus\mathfrak{p}$ 上恒取值 1, 由 (3.13) 知

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f+g)\geqslant a.$$

(b) 依定义知, 对任意 $f \in k(T)$, $|f|_{\mathfrak{p},q} = 0$ 当且仅当 $f = 0$. 对不等式 (3.13) 和 (3.14) 取 $q^{\deg(\varpi_{\mathfrak{p}})}$ 的幂便知道 $|\cdot|_{\mathfrak{p},q}$ 是 $k(T)$ 上的非阿基米德绝对值. 最后, 若 $a \in k^{\times}$, 那么 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(a) = 0$, 从而 $|a|_{\mathfrak{p},q} = 1$.

(c) 任意 $k[T]$ 中的非零元 f 可以写成 $\varpi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)} G$ 的形式, 其中 $G \in k[T] \setminus \mathfrak{p}$. 所以 $f \in \mathfrak{p}$ 当且仅当 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f) > 0$, 也就是说 $|f|_{\mathfrak{p},q} < 1$. □

命题 3.3.3. 设 $|\cdot|$ 是 $k(T)$ 上非平凡的绝对值, 在 k 上的限制是平凡绝对值, 并使得 $|T| \leqslant 1$.

(a) 对任意 $F \in k[T]$ 有 $|F| \leqslant 1$.

(b) $\mathfrak{p} = \{F \in k[T] \mid |F| < 1\}$ 是 $k[T]$ 的极大理想.

(c) 对任意 $f \in k(T)$ 有

$$|f| = |\varpi_{\mathfrak{p}}|^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)}.$$

证明: (a) 设 F 形如

$$a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_0,$$

其中 $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in k^{n+1}$. 由于 $|\cdot|$ 在 k 上的限制是平凡绝对值, 知对任意 $i \in \{0, \ldots, n\}$ 有 $|a_i| \leqslant 1$. 另外, 由于 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值,

$$|F| \leqslant \max_{i \in \{0,\ldots,n\}} |a_i| \cdot |T|^i \leqslant 1.$$

(b) 由 (a) 知 $k[T]$ 中的元素 F 属于 $k[T] \setminus \mathfrak{p}$ 当且仅当 $|F| = 1$. 这说明了 $k[T] \setminus \mathfrak{p}$ 中两个多项式的乘积仍属于 $k[T] \setminus \mathfrak{p}$, 也就是说 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 如果 $\mathfrak{p}$ 是零理想, 那么对任意非零多项式 $F \in k[T]$ 有 $|F| = 1$, 从而对任意 $f \in k(T) \setminus \{0\}$ 也有 $|f| = 1$. 这与绝对值 $|\cdot|$ 在 $k(T)$ 上非平凡的假设矛盾.

(c) 不妨设 f 非零. 将 f 写成

$$f = \varpi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)} \frac{G}{H}$$

的形式, 其中 G 和 H 是 $k[T] \setminus \mathfrak{p}$ 中的元素. 由于 $|\cdot|$ 在 $k[T] \setminus \mathfrak{p}$ 上的限制恒取 1 为其值, 知

$$|f| = |\varpi_{\mathfrak{p}}|^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)}.$$

□

3.3.2 “无穷远点” 处的绝对值

定义 3.3.4. 用 $\deg : k[T] \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ 表示多项式的次数函数, 其中约定零多项式的次数等于 $-\infty$. 由于多项式乘积的次数等于次数的乘积, 可以定义映射 $\mathrm{ord}_\infty : k(T) \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, 使得

$$\forall\,(F,G) \in k[T] \times (k[T] \setminus \{0\}), \quad \mathrm{ord}_\infty(F/G) = \deg(G) - \deg(F).$$

这个映射满足以下条件:

$$\forall\,(f,g) \in k(T) \times k(T), \quad \mathrm{ord}_\infty(fg) = \mathrm{ord}_\infty(f) + \mathrm{ord}_\infty(g). \tag{3.15}$$

另外,

$$\mathrm{ord}_\infty(f) = +\infty \text{ 当且仅当 } f = 0. \tag{3.16}$$

命题 3.3.5. (a) 对任意 $(f,g) \in k(T) \times k(T)$ 有

$$\mathrm{ord}_\infty(f+g) \geqslant \min\{\mathrm{ord}_\infty(f), \mathrm{ord}_\infty(g)\}. \tag{3.17}$$

(b) 对任意 $q > 1$, 映射

$$|\cdot|_{\infty,q} : k(T) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad |f|_{\infty,q} := q^{-\mathrm{ord}_\infty(f)}$$

是 $k(T)$ 上的非阿基米德绝对值.

(c) 设 $|\cdot|$ 为 $k(T)$ 上的绝对值, 在 k 上的限制是平凡绝对值, 并使得 $|T| > 1$. 那么对任意 $f \in k(T)$ 有

$$|f| = |T^{-1}|^{-\mathrm{ord}_\infty(f)}.$$

证明: (a) 通过将 f 和 g 通分, 不妨假设 f 和 g 都是多项式. 此时要证的不等式来自

$$\forall\,(F,G) \in k[T] \times k[T], \quad \deg(F+G) \leqslant \max\{\deg(F), \deg(G)\}.$$

(b) 是 (3.16), (3.15) 和 (3.17) 的直接推论.

(c) 设 $F = a_{n_0}T^{n_0} + a_{n_1}T^{n_1} + \cdots + a_{n_\ell}T^{n_\ell}$ 为 $k[T]$ 中的非零元, 其中 $\{a_{n_0}, \ldots, a_{n_\ell}\} \subset k \setminus \{0\}$ 且 $n_0 < n_1 < \ldots < n_\ell$. 由于

$$\forall\, i \in \{0, \ldots, \ell\}, \quad |a_{n_i}T^{n_i}| = |T|^{n_i},$$

知 $|a_{n_0}T^{n_0}| < \ldots < |a_{n_\ell}T^{n_\ell}|$. 从而

$$|F| = |T|^{n_\ell} = |T|^{\deg(F)} = |T^{-1}|^{-\operatorname{ord}_\infty(F)}.$$

对于一般的 $f \in k(T)$, 可以将 f 写成 F/G 的形式, 其中 $(F, G) \in k[T] \times (k[T] \setminus \{0\})$. 这样

$$|f| = \frac{|F|}{|G|} = \frac{|T^{-1}|^{-\operatorname{ord}_\infty(F)}}{|T^{-1}|^{-\operatorname{ord}_\infty(G)}} = |T^{-1}|^{-\operatorname{ord}_\infty(f)}.$$

□

3.3.3 乘积公式

定义 3.3.6. 设 k 为域. 用 $\mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 表示 $k[T]$ 的极大理想组成的集合 $\operatorname{Spm}(k[T])$ 与单点集 $\{\infty\}$ 的无交并.

定理 3.3.7 (**乘积公式**)**.** *令 q 为大于 1 的实数. 对任意 $k(T)$ 中的非零元 f, 存在 $\mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 的有限子集 S_f, 使得对任意 $x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)} \setminus S_f$ 有 $|f|_{x,q} = 1$. 并且以下等式成立*

$$\prod_{x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}} |f|_{x,q} = 1. \tag{3.18}$$

证明: 将 f 写成

$$c(f) \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm}(k[T])} \varpi_{\mathfrak{p}}^{\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f)},$$

的形式, 其中 $c(f) \in k^\times$. 由于只有有限多个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm}(k[T])$ 使得 $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f) \neq 0$, 知除了有限多个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm}(k[T])$ 以外有 $|f|_{\mathfrak{p},q} = 1$. 另外,

$$\operatorname{ord}_\infty(f) = \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm}(k[T])} \operatorname{ord}_\infty(\varpi_{\mathfrak{p}}) \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f) = -\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm}(k[T])} \frac{\ln |f|_{\mathfrak{p},q}}{\ln(q)}.$$

取 q 的幂后便得到等式 (3.18). □

3.4 有理函数域上的算术向量丛

本节中固定一个大于 1 的实数 q. 对任意 $x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}$, 令

$$N_x = \begin{cases} q^{\deg(\varpi_x)}, & \text{若 } x \in \operatorname{Spm}(k[T]), \\ q, & \text{若 } x = \infty, \end{cases}$$

并用 $|\cdot|_x$ 来简记 $k(T)$ 上的绝对值

$$|\cdot|_{x,q} = N_x^{-\operatorname{ord}_x(\cdot)}.$$

令 $k(T)_x$ 为域 $k(T)$ 相对于绝对值 $|\cdot|_x$ 的完备化.

所谓 $k(T)$ 上的**算术向量丛**, 是指如下的数学对象

$$\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_x)_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}}),$$

其中 E 是有限维 $k(T)$-线性空间, $\|\cdot\|_x$ 是 $E_x := E \otimes_{k(T)} k(T)_x$ 上的超范数, 满足以下条件:

(1) 对任意 $x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}$, 赋超范线性空间 $(E_x, \|\cdot\|_x)$ 具有一组标准正交基[34],

(2) 存在 E 的一组基 $(e_i)_{i=1}^r$ 以及 $\operatorname{Spm}(k[T])$ 的有限子集 S, 使得对任意 $x \in \operatorname{Spm}(k[T]) \setminus S$, $(e_i)_{i=1}^r$ 都是 $(E_x, \|\cdot\|_x)$ 的标准正交基.

当 E 是一维 $k(T)$-线性空间时, 也说 $\overline{E}$ 是**算术线丛**.

例 3.4.1. 设 $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_x)_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}})$ 为 $k(T)$ 上的算术向量丛.

(1) 由命题 3.2.12 知 E 的对偶空间 $E^\vee$ 以及对偶范数族 $(\|\cdot\|_{x,*})_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}}$ 构成一个 $k(T)$ 上的算术向量丛, 记作 $\overline{E}^\vee$.

(2) 设 $\overline{M} = (M, (\|\cdot\|'_x)_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}})$ 为 $k(T)$ 上的算术线丛. 对任意 $x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}$, 令 $\|\cdot\|''_x$ 为 $E_x \otimes M_x$ 上的超范数, 使得

$$\forall\,(s,\ell) \in E_x \times M_x, \quad \|s\otimes\ell\|''_x = \|s\|_x \cdot \|\ell\|'_x.$$

那么

$$\overline{E}\otimes\overline{M} := (E\otimes M, (\|\cdot\|''_x)_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}})$$

是 $k(T)$ 上的算术向量丛.

(3) 由命题 3.2.15 (c) 知

$$\det(\overline{E}) := (\det(E), (\|\cdot\|_{x,\det})_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}})$$

是 $k(T)$ 上的算术向量丛.

[34] 由于 $|\cdot|_x$ 是离散绝对值, 这个条件也等价于要求 $\|\cdot\|_x$ 是纯范数, 见命题 3.2.21.

3.4.1 算术向量丛的正交直和分解

引理 3.4.2. 设 $(V, \|\cdot\|)$ 为 $(k(T)_\infty, |\cdot|_\infty)$ 上有限维赋超范线性空间, r 为 V 的维数, 且 $\mathrm{GL}_r(k[T])$ 是由系数在 $k[T]$ 中且行列式属于 $k^\times$ 的那些 $r \times r$ 方阵组成的集合. 假设 $(V, \|\cdot\|)$ 具有一组标准正交基. 若

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_r(k[T])$$

且 $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^r$ 是 V 的一组基, 用 $A\boldsymbol{v}$ 来表示如下 V 的基

$$(A\boldsymbol{v})_i := a_{i,1}v_1 + \cdots + a_{i,r}v_r, \quad i \in \{1, \ldots, r\}.$$

那么对于 V 的任意一组基 $\boldsymbol{v}$, 存在 $A_0 \in \mathrm{GL}_r(k[T])$, 使得 $A_0\boldsymbol{v}$ 是 $(V, \|\cdot\|)$ 的正交基.

证明: 假设 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 V 的一组标准正交基. 那么对任意 $k(T)_\infty^r$ 中的非零元 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ 有

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\| = \max_{i \in \{1, \ldots, r\}} |\lambda_i| \in \{q^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

换句话说, $\|\cdot\|$ 在 $V \setminus \{0\}$ 上的限制取值在 $\{q^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 中. 固定 V 的一组基 $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^r$. 考虑映射

$$\Psi : \mathrm{GL}_r(k[T]) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad A \longmapsto \sum_{i=1}^r \frac{\ln \|(A\boldsymbol{v})_i\|}{\ln(q)}.$$

注意到由 (3.9) 知

$$\prod_{i=1}^r \|(A\boldsymbol{v})_i\| \geqslant \|(A\boldsymbol{v})_1 \wedge \cdots \wedge (A\boldsymbol{v}_r)\|_{\det} = |\det(A)|_\infty \cdot \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_r\|_{\det}.$$

由于 $\det(A) \in k^\times$, 知 $|\det(A)|_\infty = 1$. 所以函数 Ψ 有正的下界, 从而在某 $A_0 \in \mathrm{GL}_r(k[T])$ 处取到最小值. 将 $\boldsymbol{v}$ 换成 $A_0\boldsymbol{v}$ 后不妨设 A_0 是单位矩阵. 交换 $\boldsymbol{v}$ 中向量的次序后不妨设

$$\|v_1\| \leqslant \ldots \leqslant \|v_r\|.$$

设 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ 为 $k[T]^r$ 中的非零元, $s=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_rv_r$,

$$b=\max_{i\in\{1,\ldots,r\}}\|\lambda_iv_i\|,\quad J=\{i\in\{1,\ldots,r\}\mid\|\lambda_iv_i\|=b\}.$$

将 J 中的元素写成一个升链

$$i_1<\ldots<i_n$$

并令

$$z=\lambda_{i_1}v_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_n}v_{i_n}.$$

由于

$$\|v_{i_1}\|\leqslant\ldots\leqslant\|v_{i_n}\|,$$

知

$$\deg(\lambda_{i_1})\geqslant\ldots\geqslant\deg(\lambda_{i_n}).$$

从而由欧几里得除法知存在 $k[T]$ 中的元素 $a_1,\ldots,a_n$, 使得 $a_n=1$ 且

$$\forall\, j\in\{1,\ldots,n\},\quad \deg(\lambda_{i_j}-a_j\lambda_{i_n})<\deg(\lambda_{i_j}).$$

将 z 写成

$$z=\lambda_{i_n}(a_1v_{i_1}+\cdots+a_nv_{i_n})+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{i_j}-a_j\lambda_{i_n})v_{i_j}$$

的形式. 注意到系数在 $k[T]$ 中且对角线上元素均为 1 的 $r\times r$ 下三角矩阵是 $\mathrm{GL}_r(k[T])$ 中的元素. 考虑下三角矩阵 A, 使得对任意 $j\in\{1,\ldots,r\}\setminus\{i_n\}$ 有 $(Av)_j=v_j$ 且

$$(Av)_{i_n}=a_1v_{i_1}+\cdots+a_nv_{i_n}.$$

由 $\Psi(A)\geqslant\Psi(I_r)$ 知

$$\|a_1v_{i_1}+\cdots+a_nv_{i_n}\|\geqslant\|v_{i_n}\|.$$

所以

$$\begin{aligned}\|\lambda_{i_n}(a_1v_{i_1}+\cdots+a_nv_{i_n})\|&=|\lambda_{i_n}|_\infty\cdot\|a_1v_{i_1}+\cdots+a_nv_{i_n}\|\\&\geqslant|\lambda_{i_n}|_\infty\cdot\|v_{i_n}\|=b.\end{aligned}$$

由于 $\|\cdot\|$ 是超范数, 知

$$\|\lambda_{i_n}(a_1v_{i_1}+\cdots+a_nv_{i_n})\|\leqslant|\lambda_{i_n}|_\infty\cdot\|a_nv_{i_n}\|=b,$$

从而

$$\|\lambda_{i_n}(a_1 v_{i_1} + \cdots + a_n v_{i_n})\| = b.$$

而对于 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ 有

$$\|(\lambda_{i_j} - a_j \lambda_{i_n}) v_j\| = |\lambda_{i_j} - a_j \lambda_{i_n}|_\infty \cdot \|v_j\| < b.$$

从而由命题 3.2.2 (a) 知 $\|z\| = b$, 进而 $\|s\| = b$. 最后, 由范数的数乘法则和 $k(T)$ 在 $k(T)_\infty$ 中的稠密性知

$$\forall\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in k(T)_\infty^r, \quad \|\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r\| = \max_{i \in \{1, \ldots, r\}} |\lambda_i|_\infty \cdot \|v_i\|,$$

即 $(v_i)_{i=1}^r$ 构成 $(V, \|\cdot\|)$ 的正交基. □

定理 3.4.3. *设 $\overline{E}$ 为 $k(T)$ 上的算术向量丛, $r = \dim_{k(T)}(E)$. 令*

$$\mathcal{E} = \{s \in E \mid \forall\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(k[T]),\ \|s\|_\mathfrak{p} \leqslant 1\}.$$

那么如下命题成立.

(a) *$\mathcal{E}$ 是 E 的秩为 r 的自由子 $k[T]$-模.*

(b) *存在 E 在 $k(T)$ 上的一组基 $(s_i)_{i=1}^r$, 在 $(E_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 中是正交基, 并在每个 $(E_\mathfrak{p}, \|\cdot\|_\mathfrak{p})$ 中是标准正交基, 其中 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(k[T])$.*

证明: (a) 若 $(s, t) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $(a, b) \in k[T] \times k[T]$, 那么对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(k[T])$ 有

$$\|as + bt\|_\mathfrak{p} \leqslant \max\{|a|_\mathfrak{p} \cdot \|s\|_\mathfrak{p}, |b|_\mathfrak{p} \cdot \|t\|_\mathfrak{p}\} \leqslant 1,$$

从而 $as + bt \in \mathcal{E}$. 这说明了 $\mathcal{E}$ 是 E 的子 $k[T]$-模. 令 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 E 的一组基, S 为 $\mathrm{Spm}(k[T])$ 的有限子集, 使得对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(k[T]) \setminus S$, $(e_i)_{i=1}^r$ 是 $(E_\mathfrak{p}, \|\cdot\|_\mathfrak{p})$ 的标准正交基. 由定理 3.2.5, 知对任意 $\mathfrak{p} \in S$, 存在 $c_\mathfrak{p} > 0$ 使得

$$\forall\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in k(T)_\mathfrak{p}^r, \quad \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\|_\mathfrak{p} \geqslant c_\mathfrak{p} \max_{i \in \{1, \ldots, r\}} |\lambda_i|_\mathfrak{p}.$$

对任意 $\mathfrak{p} \in S$, 令 $n_\mathfrak{p}$ 为非负整数, 使得

$$|\varpi_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}} \leqslant c_\mathfrak{p},$$

并取

$$f = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \varpi_\mathfrak{p}^{-n_\mathfrak{p}}.$$

那么有

$$\mathcal{E} \subset fk[T]e_1 + \cdots + fk[T]e_r.$$

这样便知道 $\mathcal{E}$ 是有限生成无挠 $k[T]$-模. 而 $k[T]$ 又是主理想整环, 所以 $\mathcal{E}$ 是有限秩自由 $k[T]$-模. 最后, 由于 E 是由 $\mathcal{E}$ 生成的 $k(T)$-线性空间, 知 $\mathcal{E}$ 的秩等于 E 的维数.

(b) 令 $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^r$ 为 $\mathcal{E}$ 在 $k[T]$ 上的一组基. 设 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in k[T]^r$ 使得 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 的最大公因式为 1. 由于 $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \in \mathcal{E}$, 对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(k[T])$ 有

$$\|\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r\|_{\mathfrak{p}} \leqslant 1.$$

另外, 对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(k[T])$,

$$\varpi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) \notin \mathcal{E};$$

而对任意 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spm}(k[T]) \setminus \{\mathfrak{p}\}$ 有

$$\|\varpi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r)\|_{\mathfrak{q}} = \|\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r\|_{\mathfrak{q}} \leqslant 1.$$

这说明了

$$\|\varpi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r)\|_{\mathfrak{p}} > 1,$$

从而

$$\|\varpi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r)\|_{\mathfrak{p}} \geqslant N_{\mathfrak{p}} = |\varpi_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}}^{-1}.$$

这样

$$\|\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r\|_{\mathfrak{p}} = 1 = \max\{|\lambda_1|_{\mathfrak{p}}, \ldots, |\lambda_r|_{\mathfrak{p}}\}.$$

通过范数的数乘法则和 $k(T)$ 在 $k(T)_{\mathfrak{p}}$ 中的稠密性知 $(v_i)_{i=1}^r$ 是 $(E_{\mathfrak{p}}, \|\cdot\|_{\mathfrak{p}})$ 的标准正交基.

由引理 3.4.2 知存在 $A \in \mathrm{GL}_r(k[T])$ 使得 $(s_i)_{i=1}^r = A\boldsymbol{v}$ 是 $(E_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 的正交基. 注意到 A 的逆矩阵也是 $\mathrm{GL}_r(k[T])$ 中的元素. 这说明 $(s_i)_{i=1}^r$ 仍是 $\mathcal{E}$ 在 $k[T]$ 上的一组基, 从而是 $(E_{\mathfrak{p}}, \|\cdot\|_{\mathfrak{p}})$ 的标准正交基, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(k[T])$. 于是命题成立. □

3.4.2 Arakelov 度数

定义 3.4.4. 设 $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_x)_{x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}})$ 为 $k[T]$ 上的算术向量丛. 用 $\widehat{\deg}(\overline{E})$ 表示整数

$$-\sum_{x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}} \frac{\ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_{x,\det}}{\ln(q)},$$

其中 $(s_i)_{i=1}^r$ 是 E 在 $k(T)$ 上的一组基. 注意到定理 3.3.7 说明了 $\widehat{\deg}(\overline{E})$ 的值和 $(s_i)_{i=1}^r$ 的选择无关, 我们称之为 $\overline{E}$ 的 **Arakelov 度数**. 由定理 3.4.3 知, 存在 E 在 $k(T)$ 上的一组基 $(s_i)_{i=1}^r$, 使得对任意 $x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 来说 $(s_i)_{i=1}^r$ 都是 $(E_x, \|\cdot\|_x)$ 的正交基. 此时由命题 3.2.15 (c) 可将 $\overline{E}$ 的 Arakelov 度数写成

$$-\sum_{i=1}^r \sum_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}} \frac{\ln\|s_i\|_x}{\ln(q)}.$$

命题 3.4.5. *设 $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_x)_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}})$ 和 $\overline{M} = (M, (\|\cdot\|'_x)_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}})$ 分别为 $k(T)$ 上的算术向量丛和算术线丛. 那么以下命题成立.*

(a) $\widehat{\deg}(\overline{E}\otimes\overline{M}) = \widehat{\deg}(\overline{E}) + \dim(E)\,\widehat{\deg}(\overline{M})$.

(b) $\widehat{\deg}(\overline{E}^\vee) = -\widehat{\deg}(\overline{E})$.

证明: (a) 设 $\overline{E}\otimes\overline{M}$ 形如

$$(E\otimes M, (\|\cdot\|''_x)_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}})$$

令 $(s_i)_{i=1}^r$ 为 E 的一组基, 使得对任意 $x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}$, $(s_i)_{i=1}^r$ 都是 $(E_x, \|\cdot\|_x)$ 的正交基. 又令 ℓ 为 M 中的非零元. 那么 $(s_i\otimes\ell)_{i=1}^r$ 是

$$(E_x\otimes M_x, \|\cdot\|''_x)$$

的正交基. 从而

$$\widehat{\deg}(\overline{E}\otimes\overline{M}) = -\sum_{i=1}^r \sum_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}} \frac{\ln\|s_i\|_x + \ln\|\ell\|'_x}{\ln(q)} = \widehat{\deg}(\overline{E}) + \dim(E)\,\widehat{\deg}(\overline{M}).$$

(b) 令 $(s_i^\vee)_{i=1}^r$ 为 $(s_i)_{i=1}^r$ 的对偶基, 那么由命题 3.2.15, 知对任意 $x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}$, $(s_i^\vee)_{i=1}^r$ 是 $(E_x^\vee, \|\cdot\|_{x,*})$ 的正交基, 并且 $\|s_i^\vee\|_{x,*} = \|s_i\|_x^{-1}$. 所以

$$\widehat{\deg}(\overline{E}^\vee) = -\sum_{i=1}^r \sum_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}} \frac{\ln\|s_i^\vee\|_{x,*}}{\ln(q)} = -\widehat{\deg}(\overline{E}).$$

□

3.4.3 Riemann-Roch 定理

用

$$\overline{\omega_{k(T)/k}} = (\omega_{k(T)/k}, (\|\cdot\|_{\omega,x})_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}})$$

表示如下的 $k(T)$ 上的算术线丛. 首先 $\omega_{k(T)/k}=k$ 是平凡的 k-线性空间. 其次范数 $\|\cdot\|_x$ 使得

$$\|1\|_x=\begin{cases}1, & \text{若 } x\neq\infty,\\ q^2, & \text{若 } x=\infty.\end{cases}$$

设 $\overline{E}$ 为 $k(T)$ 上的算术向量丛. 用 $\widehat{H}^0(\overline{E})$ 来表示集合

$$\{s\in E\mid \forall\, x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)},\ \|s\|_x\leqslant 1\}.$$

定理 3.4.6 (**有理函数域的** Riemann-Roch **定理**). 对任意 $k(T)$ 上的算术向量丛 $\overline{E}$, $\widehat{H}^0(\overline{E})$ 是 E 的有限维 k-线性子空间. 另外, 等式

$$\dim_k(\widehat{H}^0(\overline{E}))-\dim_k(\widehat{H}^0(\overline{E}^\vee\otimes\overline{\omega_{k(T)/k}}))=\deg(\overline{E})+\dim_{k(T)}(E)\tag{3.19}$$

成立.

证明: 对任意整数 n, 令

$$P_n=\{F\in k[T]\mid \deg(F)\leqslant n\}.$$

这样定义的 P_n 是有限维 k-线性空间, 其维数等于 $\max\{n+1,0\}$. 由定理 3.4.3, 知存在 E 的一组基 $(s_i)_{i=1}^r$, 是 $(E_\infty,\|\cdot\|_\infty)$ 的正交基, 且对任意 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}(k[T])$ 来说是 $(E_{\mathfrak{p}},\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})$ 的标准正交基. 对任意 $i\in\{1,\ldots,r\}$, 令

$$n_i=-\frac{\ln\|s_i\|_\infty}{\ln(q)}.$$

这样便有

$$\widehat{H}^0(\overline{E})=P_{n_1}s_1+\cdots+P_{n_r}s_r.$$

从而 $\widehat{H}^0(\overline{E})$ 是 E 的有限维线性子空间. 并且 $\widehat{H}^0(\overline{E})$ 在 k 上的维数等于

$$\sum_{i=1}^r\max\{n_i+1,0\}$$

令 $(s_i^\vee)_{i=1}^r$ 为 $(s_i)_{i=1}^r$ 的对偶基, 由命题 3.2.15 知, 对任意 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}(k[T])$, $(s_i^\vee)_{i=1}^r$ 是 $(E_{\mathfrak{p}},\|\cdot\|_{\mathfrak{p},*})$ 的标准正交基. 另外, $(s_i^\vee)_{i=1}^r$ 还是 $(E_\infty,\|\cdot\|_{\infty,*})$ 的正交基, 且 $\|s_i^\vee\|_{\infty,*}=\|s_i\|_\infty^{-1}$. 从而

$$\widehat{H}^0(\overline{E}^\vee\otimes\overline{\omega_{k(T)/k}})=P_{-n_1-2}s_1^\vee+\cdots+P_{-n_r-2}s_r^\vee,$$

其在 k 上的维数为

$$\sum_{i=1}^{r}\max\{-n_i-1,0\}.$$

这样等式 (3.19) 的左边等于

$$\sum_{i=1}^{r}(\max\{n_i+1,0\}-\max\{-n_i-1,0\})=\sum_{i=1}^{r}(n_i+1)=r+\sum_{i=1}^{r}n_i.$$

从而该等式成立. □

3.5 注记

前几节中我们从数论的角度考虑有理函数域. 从几何的观点来看, 有理函数域中的元素应该看成是某个几何对象上取值在一些域中的函数. 在 §3.3 中看到, $k(T)$ 上非平凡但在 k 上平凡的绝对值形如 $|\cdot|_{x,q}$, 其中 x 是 $k[T]$ 的极大理想或 $x=\infty$, q 是大于 1 的实数. 当 x 固定但 q 变化时, 绝对值 $|\cdot|_{x,q}$ 在 $k(T)$ 上诱导相同的拓扑. 特别地, 离散赋值环

$$\mathcal{O}_x:=\{f\in k(T)\mid |f|_{x,q}\leqslant 1\}$$

以及其极大理想

$$\mathfrak{m}_x:=\{f\in k(T)\mid |f|_{x,q}<1\}$$

不依赖于 q 的选择. 我们用 $\kappa(x)$ 表示剩余类域 $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$. 另外, 用 $|\cdot|_\eta$ 表示 $k(T)$ 上的平凡绝对值, 并令 $\mathcal{O}_\eta=k(T)$, $\mathfrak{m}_\eta=\{0\}$, $\kappa(\eta)=\mathcal{O}_\eta/\mathfrak{m}_\eta=k(T)$.

定义 3.5.1. 定义 k 上的**射影曲线**为

$$\mathbb{P}^1_k:=\mathbb{P}^{1,(1)}_k\cup\{\eta\}.$$

对任意 $f\in k(T)$ 及 $x\in\mathbb{P}^1_k$, 如果 $f\in\mathcal{O}_x$, 则用 $f(x)$ 表示 f 在 $\kappa(x)$ 中的剩余类. 不难看出, 当 $f(x)\neq 0$ 时 $f\in\mathcal{O}_x\setminus\mathfrak{m}_x$, 所以 f^{-1} 也是 $\mathcal{O}_x\setminus\mathfrak{m}_x$ 中的元素, 并且 $f^{-1}(x)=f(x)^{-1}$. 另外, 如果 f 和 g 是 $k(T)$ 中两个元素, 使得 $f(x)$ 和 $g(x)$ 同时有定义, 那么 $(f+g)(x)$ 和 $(fg)(x)$ 都有定义, 并且

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (fg)(x)=f(x)g(x).$$

对任意 $f\in k(T)$, 令

$$D(f):=\{x\in\mathbb{P}^1_k\mid f(x)\ \text{有定义且}\ f(x)\neq 0\}.$$

注意到 $D(f)=\varnothing$ 当且仅当 $f=0$. 另外, 当 f 非零的时候,

$$\mathbb{P}_k^1 \setminus D(f) = \{x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)} \mid \mathrm{ord}_x(f) \neq 0.\}$$

从而 $\mathbb{P}_k^1 \setminus D(f)$ 是有限集.

定义 3.5.2. 所谓 $\mathbb{P}_k^1$ 上的 Zariski **拓扑**, 是指由子集族 $\{D(f) \mid f \in k(T)\}$ 生成的拓扑. 注意到对任意 $f \in k(T)^\times$ 有 $\eta \in D(f)$. 从而 η 属于 $\mathbb{P}_k^1$ 的任意非空开集, 也就是说 $\mathbb{P}_k^1 = \overline{\{\eta\}}$. 我们称 η 为 $\mathbb{P}_k^1$ 的**生成点**. 另外, 对任意 $x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 有 $D(\varpi_x) = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{x\}$. 这说明了 $\mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 中的元素都是 $\mathbb{P}_k^1$ 的闭点. 从而 $\mathbb{P}_k^1$ 上的 Zariski 拓扑就是余有限拓扑.

对任意 $\mathbb{P}_k^1$ 中的开集 U, 令

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(U) := \{f \in k(T) \mid \forall\, x \in U,\ f \in \mathcal{O}_x\} = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_x.$$

这是 $k(T)$ 的子 k-代数, 其中的元素可以看成是 U 上取值在各个剩余类域 $\kappa(x)$, $x \in \mathbb{P}_k^1$ 中的 “函数”. 当 U 取遍 $\mathbb{P}_k^1$ 中开集时, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(U)$ 构成 $\mathbb{P}_k^1$ 上的 k-代数层. 不难证明 $(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1})$ 构成一个局部环层空间, 特别地, 对任意 $x \in \mathbb{P}_k^1$ 有 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1,x} = \mathcal{O}_x$.

注 3.5.3. 假设 U 和 V 是 $\mathbb{P}_k^1$ 中两个非空开集, 使得 $V \subset U$. 那么从定义看出限制同态 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(U) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(V)$ 是单同态. 这说明 $\mathbb{P}_k^1$ 上 “代数函数” 的延拓具有唯一性. 类似地, 对任意 $x \in U$, 从 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(U)$ 到 “函数芽环” $\mathcal{O}_x$ 的自然同态也是单同态. 这些现象说明了在代数几何中, 局部的对象往往高度蕴含了整体的信息.

定义 3.5.4. 之前讨论过的一些数论构造, 比方说 $k(T)$ 上的算术向量丛, 可以放在代数几何框架下来考虑. 设 X 为环层空间, 所谓 $\mathcal{O}_X$-**模**, 是指对任意 X 的开子集 U 指定一个 $\mathcal{O}_X(U)$-模 $\mathcal{E}(U)$ 并对 X 的任意一对满足包含关系 $U \supset V$ 的开子集 U 和 V 指定一个群同态

$$\mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(V), \quad s \longmapsto s|_V,$$

使得对任意 $(a,s) \in O_X(U) \times E(U)$ 有

$$(as)|_V = a|_V s|_V,$$

并且对于任意满足关系 $U \supset V \supset W$ 的 X 的开子集 U, V 和 W, 有

$$\forall\, s \in \mathcal{E}(U), \quad (s|_V)|_W = s|_W.$$

通常将 $\mathcal{E}(U)$ 中的元素称作 $\mathcal{E}$ 在开集 U 上的**截面**.

不难看出, 如果 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{O}_X$-模, U 是 X 的开子集, 那么

$$\mathcal{E}(V), \quad V \text{ 是 } U \text{ 的开子集}$$

构成一个 $\mathcal{O}_U$-模, 记作 $\mathcal{E}|_U$. 另外, 对任意 $x \in X$, 用 $\mathcal{E}_x$ 表示商集

$$\bigcup_{x \text{ 的邻域 } U} \mathcal{E}(U) \Big/ \sim$$

其中

$$(s \in \mathcal{E}(U)) \sim (t \in \mathcal{E}(V))$$

当且仅当存在 x 的开邻域 W, 使得 $W \subset U \cap V$ 且 $s|_W = t|_W$. 不难看出, $\mathcal{E}_x$ 上具有自然的 $\mathcal{O}_{X,x}$-模结构.

若 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 为两个 $\mathcal{O}_X$-模, 所谓从 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{F}$ 的**同态**, 是指对任意 X 的开集 U 指定一个 $\mathcal{O}_X(U)$-模同态 $f_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U)$, 使得对任意满足包含关系 $U \supset V$ 的 X 的开子集 U 和 V, 以下图表交换

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "|_V"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "|_V"] \\
\mathcal{E}(V) \arrow[r, "f_V"'] & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

如果每个 f_U 都是同构, 则说 f 是从 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{F}$ 的**同构**. 从 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{F}$ 的 $\mathcal{O}_X$-模同态的集合记作 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

可以证明, 对任意集合 I, 存在一个 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{O}_X^{\oplus I}$, 以及对任意 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 从 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus I}, \mathcal{F})$ 到 $\mathcal{F}(X)^I$ 的双射 $\varphi_{\mathcal{F}}$, 使得对任意 $\mathcal{O}_X$-模同态 $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus I}, \mathcal{E}) \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "- \circ f"'] & \mathcal{E}(X)^I \arrow[d, "f_X^I"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus I}, \mathcal{F}) \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{F}(X)^I
\end{tikzcd}$$

这样的 $\mathcal{O}_X$-模称为由 I 生成的**自由** $\mathcal{O}_X$-**模**.

设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{O}_X$-模. 如果对于任意 $x \in X$ 都存在 X 的开邻域 U, 使得 $\mathcal{E}|_U$ 同构于某有限集生成的自由 $\mathcal{O}_U$-模, 那么称 $\mathcal{E}$ 为 X 上的**向量丛**. 如果 $\mathcal{E}$ 局部同构于单点集生成的自由模, 就称之为**线丛**. 注意到当 $\mathcal{E}$ 是 X 上的向量丛时, 对任意的 $x \in X$, $\mathcal{E}_x$ 是有限生成自由 $\mathcal{O}_{X,x}$-模.

注 3.5.5. 考虑射影直线 $\mathbb{P}^1_k$ 的情形. 假设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{P}^1_k$ 上的向量丛, 那么 $E=\mathcal{E}_\eta$ 是有限维 $\mathcal{O}_\eta=k(T)$-线性空间. 另外, 对任意 $x\in\mathbb{P}^1_k\setminus\{\eta\}$, $\mathcal{E}_x$ 是有限维自由 $\mathcal{O}_x$-模. 这个 $\mathcal{O}_x$-模结构实际上决定了 $E_x:=E\otimes_{k(T)}k(T)_x$ 上的一个范数 $\|\cdot\|_x$, 使得

$$\forall\, s\in E_x,\quad \|s\|=\inf\{|a|_x \mid a\in k(T)_x,\ a^{-1}s\in\mathcal{E}_x\otimes_{\mathcal{O}_x}k(T)_x^\circ,\}$$

其中 $k(T)_x^\circ=\{a\in k(T)_x \mid |a|_x\leqslant 1\}$ 是 $k(T)_x$ 的赋值环. 这样

$$(E,(\|\cdot\|_x)_{x\in\mathbb{P}^{1,(1)}_k})$$

构成一个 $k(T)$ 上的算术向量丛.

反过来, 从某 $k(T)$ 上的算术向量丛

$$\overline{E}=(E,(\|\cdot\|_x)_{x\in\mathbb{P}^{1,(1)}_k})$$

出发也可以按如下方式构造 $\mathbb{P}^1_k$ 上的向量丛. 对任意 $\mathbb{P}^1_k$ 的开子集 U, 令

$$\mathcal{E}(U):=\{s\in E \mid \forall\, x\in U\setminus\{\eta\},\ \|s\|_x\leqslant 1\}.$$

特别地, $\mathcal{E}(X)=H^0(\overline{E})$. 这样我们便在 $k(T)$ 上的算术向量丛与射影直线 $\mathbb{P}^1_k$ 上向量丛之间建立了一个对应关系. 用代数几何的语言, 定理 3.4.3 可以表述为: $\mathbb{P}^1_k$ 上的任意向量丛均同构于一些线丛的直和. 这个结果最初是 Grothendieck [62] 在黎曼球面的框架下用一般线性群的纤维丛的方法证明的.

射影直线 $\mathbb{P}^1_k$ 是概形的一个例子. 当域 k 上具有附加的几何结构时, 有理函数域 $k(T)$ 可以有不同的几何实现. 设 $|\cdot|$ 是 k 上的绝对值. 若 X 是 $\operatorname{Spec}k$ 上的局部环层空间, 用 X^{an} 表示所有形如 $\xi=(x,|\cdot|_\xi)$ 的对组成的集合, 其中 $x\in X$, $|\cdot|_\xi$ 是剩余类域 $\kappa(x)$ 上的绝对值, 在 k 上的限制等于 $|\cdot|$. 用 $j:X^{\mathrm{an}}\to X$ 表示将 $\xi=(x,|\cdot|(\xi))\in X^{\mathrm{an}}$ 映为 $x\in X$ 的映射. 对任意 X 的开集 U 以及 $f\in\mathcal{O}_X(U)$, 用 $|f|$ 表示从 $j^{-1}(U)$ 到 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 的映射, 将 $\xi\in j^{-1}(U)=U^{\mathrm{an}}$ 映为 $|f(j(x))|(\xi)$. 所谓 X^{an} 上的 Berkovich **拓扑**, 是指使得映射 j 以及所有形如 $|f|$ 的函数都连续的最粗的拓扑, 其中 $f\in\mathcal{O}_X(U)$, U 是 X 的任意开子集. 考虑复数域 $\mathbb{C}$ 上通常的绝对值 $|\cdot|$. 射影直线 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 中点的剩余类域是 $\mathbb{C}$ 或者 $\mathbb{C}(T)$. 在 $\mathbb{C}(T)$ 上没有延拓 $|\cdot|$ 的绝对值. 所以 $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$ 可以自然地等同于 $\operatorname{Spm}(\mathbb{C}[T])\cup\{\infty\}$. 另外, 对任意 $x\in\operatorname{Spm}(\mathbb{C}[T])\cup\{\infty\}$,

$|\cdot|(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 上通常的绝对值[35]. 注意到 $\mathbb{C}[T]$ 中的极大理想形如 $(T-z_0)\mathbb{C}[T]$, 其中 $z_0 \in \mathbb{C}$. 从而 $\mathbb{P}^1_k$ 也可以看成是 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. 按定义,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(\mathbb{P}^1_k \setminus \{\infty\}) = \{f \in \mathbb{C}(T) \mid \forall\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}(\mathbb{C}[T]),\ \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f) \geqslant 0\} = \mathbb{C}[T].$$

在 $\mathbb{C}$ 上使得所有多项式函数的绝对值连续的最粗的拓扑就是 $\mathbb{C}$ 上通常的距离所诱导的拓扑 (可以考虑形如 $(w \in \mathbb{C}) \mapsto |z - z_0|$ 的函数). 另外, 若用 0 表示 $\mathbb{C}[T]$ 中由 T 生成的极大理想, 那么

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(\mathbb{P}^1_k \setminus \{0\}) = \mathbb{C}[T^{-1}]$$

并且 $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0\})^{\mathrm{an}} \cong \mathbb{C}$ 上的 Berkovich 拓扑也等同于 $\mathbb{C}$ 上通常的拓扑. 这样便可将 $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$ 等同于黎曼球面.

4 绝对值的扩张

绝对值在域扩张上的延拓是代数数论中的重要方法. 本节中我们从赋值域上线性赋范空间分析的角度来重新讨论绝对值的延拓. 首先我们用泛函分析和压缩映射的不动点定理来证明完备非阿基米德赋值域上 Banach 空间上的反函数定理并从中推出 Hensel 引理. 关于 Hensel 引理的各种等价形式以及与赋值域上隐函数定理的关系可以参考 Kuhlman [81] 和 Ribenboim [114] 的著作.

4.1 赋超范 Bananch 空间的分析

本节中令 $(K,|\cdot|)$ 为完备的非阿基米德赋值域, $\mathcal{O}$ 为其赋值环, $\mathfrak{m}$ 为 $\mathcal{O}$ 的极大理想.

4.1.1 多重线性映射及其算子范数

假设 $|\cdot|$ 不是平凡的绝对值. 令 $(E,\|\cdot\|)$ 和 $(F,\|\cdot\|)$ 为 $(K,|\cdot|)$ 上完备的赋超范线性空间. 设 n 为正整数, φ_n 为从 E^n 到 F 的映射. 如果对任意 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 以及任意 $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \in E^{n-1}$, 映射

$$(x_i \in E) \longrightarrow \varphi_n(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

[35]注意将这个绝对值区别于 $\mathbb{C}(T)$ 上的绝对值 $|\cdot|_x$.

是线性映射, 则说 φ_n 是从 E 到 F 的 n-**线性映射**. 当 $F = K$ 时, 从 E 到 K 的 n-线性映射也称为 E 上的 n-**线性形式**. 若 φ_n 是从 E 到 F 的 n-线性映射, 令

$$\|\varphi_n\| := \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in(E\setminus\{0\})^n} \frac{\|\varphi(x_1,\ldots,x_n)\|}{\|x_1\|\cdots\|x_n\|} \in [0,+\infty]. \tag{4.1}$$

如果 $\|\varphi_n\| < +\infty$, 则说 φ_n 是**有界的**. 用 $\mathscr{L}^n(E;F)$ 表示从 E 到 F 的有界 n-线性映射组成的集合. 该集合在映射的加法和数量乘法运算下构成一个 K-线性空间. 当 $(F,\|\cdot\|) = (K,|\cdot|)$ 时 $\mathscr{L}^n(E;K)$ 简记为 $\mathscr{L}^n(E)$. 公式 (4.1) 定义了线性空间 $\mathscr{L}^n(E;F)$ 上的超范数, 使得 $\mathscr{L}^n(E;F)$ 成为一个完备的赋超范线性空间. 另外, 任意从 $E^0 = \{0\}$ 到 F 的映射都称为从 E 到 F 的 0-**线性映射**. 用 $\mathscr{L}^0(E;F)$ 表示这样的映射组成的集合. 该集合自然地等同于 F, 我们赋之以 F 的范数. 当 $(F,\|\cdot\|) = (K,|\cdot|)$ 时 $\mathscr{L}^0(E;F)$ 亦简记为 $\mathscr{L}^0(E)$.

4.1.2 多重线性映射的形式级数

令 $\mathscr{L}^\bullet[\![E;F]\!]$ 为线性空间族 $(\mathscr{L}^n(E;F))_{n\in\mathbb{N}}$ 的直积. 若 $\varphi \in \mathscr{L}^\bullet[\![E;F]\!]$, 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 用 $\varphi_n \in \mathscr{L}^n(E;F)$ 表示 φ 的第 n 个坐标. 令

$$\mathscr{L}_b^\bullet[\![E;F]\!] := \big\{\varphi \in \mathscr{L}^\bullet[\![E;F]\!] \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| < +\infty\big\},$$

并定义

$$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^\bullet} : \mathscr{L}_b^\bullet[\![E;F]\!] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad \|\varphi\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|.$$

这样定义的 $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^\bullet}$ 是 $\mathscr{L}_b^\bullet[\![E;F]\!]$ 上的超范数, 并且 $\mathscr{L}_b^\bullet[\![E;F]\!]$ 在该超范数下构成完备的赋范线性空间.

设 m 和 n 为两个自然数, $\alpha_m \in \mathscr{L}^n(E)$, $\varphi_n \in \mathscr{L}^m(E;F)$. 用 $\alpha_m \otimes \varphi_n$ 表示从 $E^{m+n} = E^n \times E^n$ 到 F 将 $(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ 映为

$$\alpha_m(x_1,\ldots,x_m)\varphi_n(y_1,\ldots,y_n)$$

的映射. 这个映射是从 E 到 F 的 $(n+m)$-线性映射, 并且

$$\|\alpha_m \otimes \varphi_n\| = \|\alpha_m\| \cdot \|\varphi_n\|. \tag{4.2}$$

若 $(\alpha,\varphi) \in \mathscr{L}_b^\bullet[\![E]\!] \times \mathscr{L}_b^\bullet[\![E;F]\!]$, 令

$$\alpha \otimes \varphi := \Bigg(\sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2\\ k+\ell=n}} \alpha_k \otimes \varphi_\ell\Bigg)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^\bullet[\![E;F]\!].$$

由 (4.2) 和强三角形不等式知 $\alpha \otimes \varphi \in \mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E;F]\!]$, 并且

$$\|\alpha \otimes \varphi\|_{\mathscr{L}^{\bullet}} \leqslant \|\alpha\|_{\mathscr{L}^{\bullet}} \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{L}^{\bullet}}.$$

在 $(F, \|\cdot\|) = (K, |\cdot|)$ 的情形该构造赋予了 $\mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E]\!]$ 一个 K-代数结构. 这个代数一般是非交换的. 另外, 上述构造还赋予了 $\mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E;F]\!]$ 一个左 $\mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E]\!]$-模结构.

命题 4.1.1. 对任意 $(\alpha, \varphi) \in \mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E]\!] \times \mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E, F]\!]$, 下列等式成立:

$$\|\alpha \otimes \varphi\|_{\mathscr{L}^{\bullet}} = \|\alpha\|_{\mathscr{L}^{\bullet}} \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{L}^{\bullet}}. \tag{4.3}$$

证明: 对任意 $\theta \in]0, 1[$, $\alpha \in \mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E]\!]$, 以及 $\varphi \in \mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E;F]\!]$, 令

$$\|\alpha\|_{\theta} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \theta^n \|\alpha_n\|, \quad \|\varphi\|_{\theta} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \theta^n \|\varphi_n\|.$$

这样由强三角形不等式知, 对任意 $(\alpha, \varphi) \in \mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E]\!] \times \mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E, F]\!]_b$,

$$\|\alpha \otimes \varphi\|_{\theta} \leqslant \|\alpha\|_{\theta} \cdot \|\varphi\|_{\theta}. \tag{4.4}$$

注意到

$$\lim_{n \to +\infty} \theta^n \|\alpha_n\| = \lim_{n \to +\infty} \theta^n \|\varphi_n\|_{\mathscr{L}^n} = 0.$$

令 $m \in \mathbb{N}$ 为使得 $\theta^m \|\alpha_m\| = \|\alpha\|_{\theta}$ 的最小的指标, $n \in \mathbb{N}$ 为使得 $\theta^n \|\varphi_n\| = \|\varphi\|_{\theta}$ 的最小的指标. 由 (4.2) 知

$$\theta^{n+m} \|\alpha_n \otimes \varphi_m\| = \theta^{n+m} \|\alpha_n\| \cdot \|\varphi_m\| = \|\alpha\|_{\theta} \cdot \|\varphi\|_{\theta},$$

而且对于使得 $k + \ell = n + m$ 且 $(k, \ell) \neq (n, m)$ 的 $(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 有

$$\theta^{n+m} \|\alpha_k \otimes \varphi_\ell\| = \theta^{k+\ell} \|\alpha_k\| \cdot \|\varphi_\ell\| < \|\alpha\|_{\theta} \cdot \|\varphi\|_{\theta}.$$

从而由命题 3.2.2 (a) 推出

$$\theta^{n+m} \|(\alpha \otimes \varphi)_{n+m}\| = \theta^{n+m} \Bigg\| \alpha_n \otimes \varphi_m + \sum_{\substack{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \\ k+\ell = m+n \\ (k,\ell) \neq (m,n)}} \alpha_k \otimes \varphi_\ell \Bigg\| = \|\alpha\|_{\theta} \cdot \|\varphi\|_{\theta}.$$

结合不等式 (4.4) 得到

$$\|\alpha \otimes \varphi\|_{\theta} = \|\alpha\|_{\theta} \cdot \|\varphi\|_{\theta}.$$

令 $\theta \to 1$ 取极限推出等式 (4.3). □

4.1.3 解析函数

定义 4.1.2. 对任意自然数 d, 令

$$\mathscr{L}^{\leqslant d}[E;F]=\{\varphi\in\mathscr{L}^{\bullet}[\![E;F]\!]\mid 对任意\ n\in\mathbb{N},\ 如果\ n>d,\ 那么\ \varphi_n=0\},$$

并用 $\mathscr{L}^{\bullet}[E;F]$ 表示

$$\bigcup_{d\in\mathbb{N}}\mathscr{L}^{\leqslant d}[E;F].$$

当 $(F,\|\cdot\|)=(K,|\cdot|)$ 时分别用 $\mathscr{L}^{\leqslant d}[E]$ 和 $\mathscr{L}^{\bullet}[E]$ 来简记 $\mathscr{L}^{\leqslant d}[E;F]$ 和 $\mathscr{L}^{\bullet}[E;F]$. 注意到 $\mathscr{L}^{\bullet}[E]$ 是 $\mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E]\!]$ 的子 K-代数, $\mathscr{L}^{\bullet}[E;F]$ 是 $\mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E;F]\!]$ 的子 $\mathscr{L}^{\bullet}[E]$-模.

用 $\mathscr{L}^{\bullet}\langle E;F\rangle$ 表示 $\mathscr{L}^{\bullet}[E;F]$ 在 $\mathscr{L}_b^{\bullet}[\![E;F]\!]$ 中的闭包. 若 φ 是 $\mathscr{L}^{\bullet}[\![E;F]\!]$ 的元素, φ 属于 $\mathscr{L}^{\bullet}\langle E;F\rangle$ 当且仅当

$$\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n\|=0.$$

若 φ 是 $\mathscr{L}^{\bullet}[\![E;F]\!]$ 中的元素, $d\in\mathbb{N}$, 定义 $\varphi^{\leqslant d}\in\mathscr{L}^{\leqslant d}[E;F]$ 如下

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \varphi_n^{\leqslant d}=\begin{cases}\varphi_n, & n\leqslant d,\\ 0, & n>d.\end{cases}$$

这个元素可以看作是 φ 在 $\mathscr{L}^{\leqslant d}[E;F]$ 上的正交投影. 事实上,

$$\|\varphi-\varphi^{\leqslant d}\|_{\mathscr{L}^{\bullet}}=\min_{\psi\in\mathscr{L}^{\leqslant d}[E;F]}\|\varphi-\psi\|_{\mathscr{L}^{\bullet}},$$

并且

$$\|\varphi\|_{\mathscr{L}^{\bullet}}=\max\{\|\varphi^{\leqslant d}\|_{\mathscr{L}^{\bullet}},\|\varphi-\varphi^{\leqslant d}\|_{\mathscr{L}^{\bullet}}\}.$$

当 $(F,\|\cdot\|)=(K,|\cdot|)$ 时, 用 $\mathscr{L}^{\bullet}\langle E\rangle$ 来简记 $\mathscr{L}^{\bullet}\langle E;K\rangle$.

命题 4.1.3. 设 $x\in E$ 使得 $\|x\|\leqslant 1$. 那么线性映射

$$\mathrm{ev}_x:\mathscr{L}^{\bullet}[E;F]\longrightarrow F,\quad \varphi\longmapsto\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n(x,\ldots,x)$$

的范数等于 1, 从而可以连续延拓成从 $\mathscr{L}^{\bullet}\langle E;F\rangle$ 到 F 的有界线性映射.

证明: 由强三角形不等式知

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n(x,\ldots,x)\Big\|\leqslant\max_{n\in\mathbb{N}}\|\varphi_n(x,\ldots,x)\|\leqslant\max_{n\in\mathbb{N}}\|\varphi_n\|\cdot\|x\|^n.$$

由于 $\|x\| \leqslant 1$, 从上式推出

$$\|\operatorname{ev}_x(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{L}^\bullet}.$$

从而 ev_x 的算子范数 $\leqslant 1$. 另外, 如果对任意正整数 n, φ_n 是恒取零值的 n-线性映射, 那么 $\|\operatorname{ev}_x(\varphi)\| = \|\varphi(0)\| = \|\varphi\|_{\mathscr{L}^\bullet}$. 所以 ev_x 的算子范数等于 1. 命题于是得证. □

用 $\mathcal{E}$ 表示 $(E, \|\cdot\|)$ 中的单位闭球, 即

$$\mathcal{E} := \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

若 $\varphi \in \mathscr{L}^\bullet\langle E; F\rangle$, 那么

$$\operatorname{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi) : (x \in \mathcal{E}) \longmapsto \operatorname{ev}_x(\varphi)$$

是定义在 $\mathcal{E}$ 上取值在 F 中的有界函数. 在不引起歧义的情况下也将 $\operatorname{ev}_x(\varphi)$ 简记为 $\varphi(x)$. 用 $\mathcal{A}(\mathcal{E}; F)$ 表示形如

$$\operatorname{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{L}^\bullet\langle E; F\rangle$$

的函数构成的 K-线性空间. 这样

$$\operatorname{ev}_{\mathcal{E}} : \mathscr{L}^\bullet\langle E; F\rangle \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{E}; F)$$

是 K-线性满射. 注意到其核等于

$$\bigcap_{x \in \mathcal{E}} \{\varphi \in \mathscr{L}^\bullet\langle E; F\rangle,\ \operatorname{ev}_x(\varphi) = 0\}.$$

这是 $\mathscr{L}^\bullet\langle E; F\rangle$ 的闭线性子空间. 从而 $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^\bullet}$ 诱导了 $\mathcal{A}(\mathcal{E}; F)$ 上的商范数, 我们将它记作 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$. 这样 $(\mathcal{A}(\mathcal{E}; F), \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ 构成完备的赋超范线性空间. 当 $(F, \|\cdot\|) = (K, |\cdot|)$ 时我们将 $\mathcal{A}(\mathcal{E}; F)$ 简记为 $\mathcal{A}(\mathcal{E})$. 这个集合在函数的加法和乘法下构成一个 K-代数, 并且 $\operatorname{ev}_{\mathcal{E}} : \mathscr{L}^\bullet\langle E\rangle \to \mathcal{A}(\mathcal{E})$ 是 K-代数的满同态. 另外, $\mathcal{A}(\mathcal{E}, F)$ 上自然具有一个 $\mathcal{A}(\mathcal{E})$-模结构, 并且对任意 $(a, f) \in \mathcal{A}(\mathcal{E}) \times \mathcal{A}(\mathcal{E}; F)$ 有

$$\|af\|_{\mathcal{A}} \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}} \cdot \|f\|_{\mathcal{A}}.$$

由命题 4.1.3 得到, 对任意 $x \in \mathcal{E}$ 及任意使得 $\operatorname{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi) = f$ 的 $\varphi \in \mathscr{L}^\bullet\langle E; F\rangle$, 有

$$\|f(x)\| = \|\operatorname{ev}_x(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{L}^\bullet}.$$

对这样的 φ 取下确界便得到 $\|f(x)\| \leqslant \|f\|_{\mathcal{A}}$. 从而如下不等式成立

$$\forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{E};F), \quad \sup_{x\in\mathcal{E}} \|f(x)\| \leqslant \|f\|_{\mathcal{A}}. \tag{4.5}$$

命题 4.1.4. 设 $y \in \mathcal{E}$. 若 $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E};F)$, 那么函数

$$\tau_y(f) : \mathcal{E} \longrightarrow F, \quad (x \in \mathcal{E}) \longmapsto f(x+y)$$

是 $\mathcal{A}(\mathcal{E};F)$ 中的元素, 并且 $\tau_y : \mathcal{A}(\mathcal{E};F) \to \mathcal{A}(\mathcal{E};F)$ 在范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ 下是等距同构.

证明: 用 $\widetilde{\tau}_y$ 表示从 $\mathscr{L}^\bullet[E;F]$ 到自身的 K-线性映射, 使得对任意 $\varphi_\bullet \in \mathscr{L}^\bullet[E]$ 及 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\widetilde{\tau}_y(\varphi_\bullet)_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\substack{N\in\mathbb{N}\\ N\geqslant n}} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant N} \varphi_N(y,\ldots,y,x_1,y,\ldots,y,x_n,y,\ldots,y),$$

其中表达式 $\varphi_N(\cdots)$ 中第 $i_1,\ldots,i_n$ 个坐标分别为 $x_1,\ldots,x_n$, 其余的坐标都是 y. 由于 $\|y\| \leqslant 1$, 由强三角形不等式推出

$$\|\widetilde{\tau}_y(\varphi)_n(x_1,\ldots,x_n)\| \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{L}^\bullet} \cdot \|x_1\|\cdots\|x_n\|,$$

从而 $\|\widetilde{\tau}_y(\varphi)\|_{\mathscr{L}^\bullet} \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{L}^\bullet}$. 这说明了 $\widetilde{\tau}_y : \mathscr{L}^\bullet[E;F] \to \mathscr{L}^\bullet[E;F]$ 是范数 $\leqslant 1$ 的线性映射, 从而可以延拓成为从 $\mathscr{L}^\bullet\langle E;F\rangle$ 到 $\mathscr{L}^\bullet\langle E;F\rangle$ 的范数 $\leqslant 1$ 的线性映射. 另外, 当 $\varphi_\bullet \in \mathscr{L}^\bullet[E;F]$ 时不难验证

$$\forall x \in \mathcal{E}, \quad \mathrm{ev}_x(\widetilde{\tau}_y(\varphi)) = \mathrm{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi)(x+y).$$

从而对于一般的 $\varphi \in \mathscr{L}^\bullet\langle E;F\rangle$ 有

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{E}, \quad \mathrm{ev}_x(\widetilde{\tau}_y(\varphi)) &= \lim_{d\to+\infty} \mathrm{ev}_x(\widetilde{\tau}_y(\varphi^{\leqslant d})) = \lim_{d\to+\infty} \mathrm{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi^{\leqslant d})(x+y) \\ &= \mathrm{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi)(x+y) = \tau_y(\mathrm{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi))(x).\end{aligned}$$

从而 $\tau_y(\mathrm{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi)) = \mathrm{ev}_{\mathcal{E}}(\widetilde{\tau}_y(\varphi))$. 这说明了对任意 $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E};F)$ 有 $\tau_y(f) \in \mathcal{A}(\mathcal{E};F)$ 并且 $\|\tau_y(f)\|_{\mathcal{A}} \leqslant \|f\|_{\mathcal{A}}$. 最后, 由于 τ_{-y} 是 τ_y 的逆映射, 而这两个映射的算子范数都 $\leqslant 1$, 从而它们都是等距同构.

$\square$

4.1.4 解析函数的微分

定义 4.1.5. 令 $\mathscr{L}^1(E;\mathscr{L}^\bullet\langle E;F\rangle)$ 为从 E 到 $\mathscr{L}^\bullet\langle E;F\rangle$ 的所有有界线性映射构成的线性空间, 并赋之以算子范数. 对任意 $\varphi\in\mathscr{L}^\bullet[E;F]$, 用 $D\varphi$ 表示从 E 到 $\mathscr{L}^\bullet[\![E;F]\!]$ 满足下列条件的线性映射: 对任意 $y\in E$, $n\in\mathbb{N}$, 以及 $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$, 有

$$D\varphi(y)_n(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_{n+1}(x_1,\ldots,x_i,y,x_{i+1},\ldots,x_n).$$

由强三角形不等式知

$$\|D\varphi(y)\|_{\mathscr{L}^\bullet}\leqslant\|\varphi\|_{\mathscr{L}^\bullet}\cdot\|y\|.$$

这说明了 D 定义了从 $\mathscr{L}^\bullet[E;F]$ 到 $\mathscr{L}^1(E,\mathscr{L}^\bullet\langle E;F\rangle)$ 的有界线性映射, 其算子范数 $\leqslant 1$. 这样 D 可以连续延拓成为从 $\mathscr{L}^\bullet\langle E;F\rangle$ 到 $\mathscr{L}^1(E,\mathscr{L}^\bullet\langle E;F\rangle)$ 的有界线性映射.

命题 4.1.6. *设 $\lambda\in K\setminus\{0\}$ 使得 $|\lambda|<1$. 对任意 $x\in\mathcal{E}$ 及 $y\in E$ 有*

$$\mathrm{ev}_x(D\varphi(y))=\lim_{N\to+\infty}\lambda^{-N}(\mathrm{ev}_{x+\lambda^N y}(\varphi)-\mathrm{ev}_x(\varphi)).\tag{4.6}$$

特别地, 如果 $\mathrm{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ 是常值函数, 那么函数 $\mathrm{ev}_{\mathcal{E}}(D\varphi)$ 恒取零值.

证明: 设 N 为足够大的自然数, 使得 $\|\lambda^N y\|<1$. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 将多重线性映射 φ_{n+1} 在 $(x+\lambda^N y,\ldots,x+\lambda^N y)$ 处的值展开, 由强三角形不等式知

$$\varphi_{n+1}(x+\lambda^N y,\ldots,x+\lambda^N y)-\varphi_{n+1}(x,\ldots,x)-\lambda^N D\varphi(y)_n(x,\ldots,x)$$

的范数不超过 $\|\lambda^N y\|^2\cdot\|\varphi_{n+1}\|$, 从而

$$\big\|\lambda^{-N}\big(\mathrm{ev}_{x+\lambda^N y}(\varphi)-\mathrm{ev}_x(\varphi)\big)-\mathrm{ev}_x(D\varphi(y))\big\|\leqslant|\lambda|^N\cdot\|y\|^2\cdot\|\varphi\|_{\mathscr{L}^\bullet}.$$

令 $N\to+\infty$ 取极限便得到 (4.6). □

令 $\mathscr{L}^1(E;\mathcal{A}(E;F))$ 为从 E 到 $\mathcal{A}(E;F)$ 的所有有界线性映射构成的线性空间, 并赋之以算子范数. 命题 4.1.6 说明了

$$D:\mathscr{L}^\bullet\langle E;F\rangle\longrightarrow\mathscr{L}^1(E,\mathscr{L}^\bullet\langle E;F\rangle)$$

诱导了从 $\mathcal{A}(\mathcal{E};F)$ 到 $\mathscr{L}^1(E,\mathcal{A}(\mathcal{E};F))$ 的有界线性映射, 其算子范数 $\leqslant 1$. 我们仍将该有界线性映射记为 D. 遵从经典微分学的书写习惯, 如果 f 是

$\mathcal{A}(\mathcal{E};F)$ 中的元素, 对任意 $x\in\mathcal{E}$ 及 $y\in E$, 用 $D_xf(y)$ 来表示元素 $Df(y)(x)$. 这样 $y\mapsto D_xf(y)$ 是从 E 到 F 的有界线性映射, 并且由 (4.5) 知, 对任意 $y\in E$ 有

$$\|D_xf(y)\|\leqslant\|f\|_{\mathcal{A}}\cdot\|y\|.$$

从而如下不等式成立:

$$\|D_xf\|\leqslant\|f\|_{\mathcal{A}} \tag{4.7}$$

4.1.5 中值定理和反函数定理

命题 4.1.7. 设 f 是 $\mathcal{A}(E;F)$ 中的元素, $x_0\in\mathcal{E}$. 对任意 $\mathcal{E}$ 中的元素 x,x_1 和 x_2, 以下不等式成立:

$$\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant\|f\|_{\mathcal{A}}\cdot\|x-x_0\|, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}&\|f(x_1)-f(x_2)-D_{x_0}f(x_1-x_2)\|\\&\qquad\leqslant\|f\|_{\mathcal{A}}\cdot\|x_1-x_2\|\cdot\max\{\|x_1-x_0\|,\|x_2-x_0\|\}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

证明: 设 $\varphi\in\mathscr{L}^\bullet(E;F)$ 使得 $f=\mathrm{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi)$. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 由 φ_n 的多重线性推出

$$\varphi_n(x,\ldots,x)-\varphi_n(x_0,\ldots,x_0)=\sum_{i=1}^n\varphi_n(\underbrace{x,\ldots,x}_{i-1\text{ 个}},x-x_0,\underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{n-i\text{ 个}}). \tag{4.10}$$

从而

$$\|\varphi_n(x,\ldots,x)-\varphi_n(x_0,\ldots,x_0)\|\leqslant\|\varphi_n\|\cdot\|x-x_0\|\leqslant\|\varphi\|_{\mathscr{L}^\bullet}\cdot\|x-x_0\|.$$

由强三角形不等式得到, 对任意 $N\in\mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{n=0}^N\big(\varphi_n(x,\ldots,x)-\varphi_n(x_0,\ldots,x_0)\big)\right\|\leqslant\|\varphi\|_{\mathscr{L}^\bullet}\cdot\|x-x_0\|. \tag{4.11}$$

类似地, 对任意 $j\in\{1,2\}$,

$$\begin{aligned}&\varphi_n(x_j,\ldots,x_j)-\varphi_n(x_0,\ldots,x_0)-D\varphi(x_j-x_0)_{n-1}(x_0,\ldots,x_0)\\=&\sum_{i=1}^n\varphi_n(\underbrace{x_j,\ldots,x_j}_{i-1\text{ 个}},x_j-x_0,\underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{n-i\text{ 个}})-\varphi_n(\underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{i-1\text{ 个}},x_j-x_0,\underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{n-i\text{ 个}}).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\varphi_n(x_1,\ldots,x_1)-\varphi_n(x_2,\ldots,x_2)-D\varphi(x_1-x_2)_{n-1}(x_0,\ldots,x_0)\\=&\sum_{i=1}^{n}\varphi_n(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{i-1\text{ 个}},x_1-x_2,\underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{n-i\text{ 个}})-\varphi_n(\underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{i-1\text{ 个}},x_1-x_2,\underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{n-i\text{ 个}})\\&+\sum_{i=1}^{n}\varphi_n(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{i-1\text{ 个}},x_2-x_0,\underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{n-i\text{ 个}})-\varphi_n(\underbrace{x_2,\ldots,x_2}_{i-1\text{ 个}},x_2-x_0,\underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{n-i\text{ 个}}).\end{aligned}$$

仍象 (4.10) 那样利用 φ_n 的多重线性将每个求和项写成 $i-1$ 项之和, 由强三角形不等式得到, 对任意 $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(x_1,\ldots,x_1)-\varphi_n(x_2,\ldots,x_2)-D\varphi(x_1-x_2)_{n-1}(x_0,\ldots,x_0)\right\|\\&\leqslant\|\varphi\|_{\mathscr{L}^\bullet}\cdot\|x_1-x_2\|\cdot\max\{\|x_1-x_0\|,\|x_2-x_0\|\}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

令 $N\to+\infty$ 取极限再对使得 $f=\mathrm{ev}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ 的 $\varphi\in\mathscr{L}^\bullet(E;F)$ 取下确界, 从 (4.11) 和 (4.12) 分别推出 (4.8) 和 (4.9). □

定理 4.1.8 (**反函数定理**)**.** 设 $f\in\mathcal{A}(\mathcal{E};F)$, $x_0\in\mathcal{E}$. 假设 $D_{x_0}f:E\to F$ 是双射. 对任意使得[36]

$$r<\frac{1}{\|f\|_{\mathcal{A}}\cdot\|(D_{x_0}f)^{-1}\|}\tag{4.13}$$

的正实数 r, 函数 $x\mapsto f(x)$ 定义了从

$$\overline{B}(x_0;r):=\{x\in\mathcal{E}\mid\|x-x_0\|\leqslant r\}$$

到

$$f(x_0)+D_{x_0}f(\overline{B}(0;r)):=\{f(x_0)+D_{x_0}f(y)\mid y\in E,\ \|y\|\leqslant r\}.$$

的双射.

证明: 由不等式 (4.9) 知, 如果 $0<\|x-x_0\|\leqslant r$, 那么

$$\left\|(D_{x_0}f)^{-1}(f(x)-f(x_0))-(x-x_0)\right\|\leqslant\|(D_{x_0}f)^{-1}\|\cdot\|f\|_{\mathcal{A}}\cdot\|x-x_0\|^2<\|x-x_0\|,$$

[36] 由 (4.7) 知 $\|f\|_{\mathcal{A}}\cdot\|(D_{x_0}f)^{-1}\|\geqslant\|D_{x_0}f\|\cdot\|(D_{x_0}f)^{-1}\|\geqslant 1$, 从而 $r<1$.

其中第二个不等式来自于条件 (4.13). 这说明了

$$f(\overline{B}(x_0;r)) \subset f(x_0) + D_{x_0}f(\overline{B}(0;r)).$$

设 $y \in E$ 使得 $\|y\| \leqslant r$. 令 $w = f(x_0) + D_{x_0}f(y)$. 对任意 $x \in \overline{B}(x_0;r)$, 令

$$\varphi(x) = x - (D_{x_0}f)^{-1}(f(x) - w).$$

由强三角形不等式知

$$\|\varphi(x) - x_0\| \leqslant \max\{\|x - x_0\|, \|(D_{x_0}f)^{-1}(f(x) - f(x_0))\|, \|y\|\} \leqslant r.$$

这说明了 φ 是从 $\overline{B}(x_0;r)$ 到自身的映射. 以下证明 φ 是压缩映射. 令

$$\varepsilon = r \cdot \|(D_{x_0}f)^{-1}\| \cdot \|f\|_{\mathcal{A}} < 1.$$

若 x_1 和 x_2 是 $\overline{B}(x_0;r)$ 中的元素, 由 (4.9) 知

$$\|f(x_1) - f(x_2) - D_{x_0}f(x_1 - x_2)\| \leqslant r \cdot \|f\|_{\mathcal{A}} \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

另外,

$$\begin{aligned}\varphi(x_1) - \varphi(x_2) &= (x_1 - x_2) - (D_{x_0}f)^{-1}(f(x_1) - f(x_2)) \\ &= (D_{x_0}f)^{-1}(D_{x_0}f(x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))),\end{aligned}$$

从而

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant \varepsilon\|x_1 - x_2\|.$$

由压缩映射定理知 φ 具有唯一的不动点, 也就是说存在唯一的 $x \in \overline{B}(x_0;r)$ 使得 $f(x) = w$. 命题于是得证. □

命题 4.1.9. 假设 $(E,\|\cdot\|)$ 和 $(F,\|\cdot\|)$ 是有限维赋超范 K-线性空间, $u : E \to F$ 是 K-线性空间同构. 那么

$$\|\det(u)\| \leqslant \frac{\|u\|^{d-1}}{\|u^{-1}\|}, \tag{4.14}$$

其中 d 是 E 在 K 上的维数.

证明: 如果 $(x_i)_{i=1}^d$ 是 E 在 K 上的一组基, 那么

$$u(x_1) \wedge \cdots \wedge u(x_d) = \det(u)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_d).$$

由于 $\det(E)$ 和 $\det(F)$ 都是一维 K-线性空间, 知

$$\begin{aligned}\|\det(u)\| = \frac{\|u(x_1)\wedge\cdots\wedge u(x_d)\|_{\det}}{\|x_1\wedge\cdots\wedge x_d\|_{\det}} &\leqslant \frac{\|u(x_1)\|\cdots\|u(x_d)\|}{\|x_1\wedge\cdots\wedge x_d\|_{\det}} \\ &\leqslant \|u\|^{d-1}\frac{\|u(x_1)\|\cdot\|x_2\|\cdots\|x_d\|}{\|x_1\wedge\cdots\wedge x_d\|_{\det}}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

设 $\alpha\in\,]0,1[$ 并取 $x_1\in E\setminus\{0\}$ 使得

$$\frac{\|u(x_1)\|}{\|x_1\|} = \frac{\|u(x_1)\|}{\|u^{-1}(u(x_1))\|} \leqslant \frac{1}{\alpha\|u^{-1}\|}.$$

由定理 3.2.7 知可以将 $\{x_1\}$ 扩张成 E 在 K 上的一组 $\sqrt[d]{\alpha}$-正交基 $(x_1,\ldots,x_d)$. 再由命题 3.2.15 (b) 知

$$\|x_1\wedge\cdots\wedge x_d\|_{\det} \geqslant \alpha\|x_1\|\cdots\|x_d\|.$$

从而由 (4.15) 推出

$$\|\det(u)\| \leqslant \frac{\|u\|^{d-1}}{\alpha^2\|u^{-1}\|}.$$

令 α 趋于 1 取极限便得到 (4.14). □

推论 4.1.10. 设 $f\in\mathcal{A}(\mathcal{E};F)$, $x_0\in\mathcal{E}$. 假设 E 和 F 都是有限维 K-线性空间, $D_{x_0}f:E\to F$ 是双射, 并令 d 为 E 在 K 上的维数. 令 $J_{x_0}f:=\det(D_{x_0}f)$. 如果

$$\|f(x_0)\| < \frac{\|J_{x_0}f\|^2}{\|f\|_{\mathcal{A}}^{2d-1}},$$

那么存在唯一的 $x\in\mathcal{E}$ 使得

$$\|x-x_0\| \leqslant \frac{\|f\|_{\mathcal{A}}^{d-1}}{\|J_{x_0}f\|}\cdot\|f(x_0)\|$$

并且 $f(x)=0$.

证明: 由命题 4.1.9 及不等式 (4.7) 知

$$\|J_{x_0}f\| \leqslant \frac{\|D_{x_0}f\|^{d-1}}{\|(D_{x_0}f)^{-1}\|} \leqslant \frac{\|f\|_{\mathcal{A}}^{d-1}}{\|(D_{x_0}f)^{-1}\|},$$

其中 d 是 E 在 K 上的维数. 假设

$$\|f(x_0)\| < \frac{\|J_{x_0}f\|^2}{\|f\|_{\mathcal{A}}^{2d-1}} \leqslant \frac{1}{\|f\|_{\mathcal{A}}\cdot\|(D_{x_0}f)^{-1}\|^2},$$

那么

$$\|(D_{x_0}f)^{-1}(f(x_0))\| \leqslant \|(D_{x_0}f)^{-1}\| \cdot \|f(x_0)\| < \frac{1}{\|f\|_{\mathcal{A}} \cdot \|(D_{x_0}f)^{-1}\|}.$$

而且

$$0 = f(x_0) + D_{x_0}f((D_{x_0}f)^{-1}(-f(x_0))).$$

从而定理 4.1.8 说明了存在唯一的 $x \in \mathcal{E}$ 使得

$$\|x - x_0\| \leqslant \|(D_{x_0}f)^{-1}\| \cdot \|f(x_0)\| \leqslant \frac{\|f\|_{\mathcal{A}}^{d-1}}{\|J_{x_0}f\|} \cdot \|f(x_0)\|$$

并且 $f(x) = 0$. □

4.1.6 Hensel 引理

用 $K[T]$ 表示系数在 K 中的一元多项式组成的 K-代数, 并赋之以 Gauss 范数 $\|\cdot\|$ 如下: 若 $F = a_0 + a_1T + \cdots + a_nT^n \in K[T]$,

$$\|F\| := \max_{i \in \{0,\ldots,n\}} |a_i|.$$

对任意自然数 n, 用 $K[T]^{\leqslant n}$ 表示次数不超过 n 的多项式组成的 $K[T]$ 的 K-线性子空间, 并赋之以限制范数. 若 g 和 h 为 $K[T]$ 中的两个元素, 其次数分别为 n 和 m, 用 $\mathrm{Res}(g,h)$ 来表示 K-线性映射

$$K[T]^{\leqslant(n-1)} \times K[T]^{\leqslant(m-1)} \longrightarrow K[T]^{\leqslant(n+m-1)}, \quad (a,b) \longmapsto ah + bg,$$

的行列式. 注意到 $\mathrm{Res}(g,h) \neq 0$ 当且仅当 g 和 h 互素.

用 $\mathcal{O}[T]$ 表示系数在 $\mathcal{O}$ 中的一元多项式组成的 $\mathcal{O}$-代数. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 用 $\mathcal{O}[T]^{\leqslant n}$ 表示 $\mathcal{O}[T]$ 中次数不超过 n 的多项式组成的子 $\mathcal{O}$-模. 注意到

$$\mathcal{O}[T]^{\leqslant n} = \{P \in K[T]^{\leqslant n} \mid \|P\| \leqslant 1\}.$$

定理 4.1.11 (Hensel **引理**). *设 F, g 和 h 为 $\mathcal{O}[T]$ 中三个多项式, $n = \deg(g)$, $m = \deg(h)$. 假设 $\deg(F) = n + m$, $\|F - gh\| < \|\mathrm{Res}(g,h)\|^2$, 且 $\deg(F - gh) \leqslant n + m - 1$. 那么存在 $\mathcal{O}[T]$ 中的多项式 G 和 H, 使得 $F = GH$, $\deg(g - G) \leqslant \deg(g) - 1$, $\deg(h - H) \leqslant \deg(h) - 1$, 并且*

$$\max\{\|g - G\|, \|h - H\|\} \leqslant \frac{\|F - gh\|}{\|\mathrm{Res}(g,h)\|}.$$

证明: 在线性空间 $K[T]^{\leqslant(n-1)} \times K[T]^{\leqslant(m-1)}$ 上赋以超范数 $\|\cdot\|$ 如下

$$\forall\,(a,b) \in K[T]^{\leqslant(n-1)} \times K[T]^{\leqslant(m-1)}, \quad \|(a,b)\| := \max\{\|a\|, \|b\|\}.$$

考虑映射

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{O}[T]^{\leqslant(n-1)} \times \mathcal{O}[T]^{\leqslant(m-1)} &\longrightarrow K[T]^{\leqslant(n+m-1)},\\ (a,b) &\longmapsto (a+g)(b+h) - F.\end{aligned}$$

该映射是

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}[T]^{\leqslant(n-1)} \times \mathcal{O}[T]^{\leqslant(m-1)}; K[T]^{\leqslant(n+m-1)})$$

中的元素. 由于 g, h 和 F 都是 $\mathcal{O}[T]$ 中的元素, 知 $\|\Phi\|_{\mathcal{A}} \leqslant 1$. 另外,

$$\Phi(1 + F(0) - g(0), 1 - h(0))$$

是常数项为 1 的 $\mathcal{O}[T]$ 中的多项式, 从而由 (4.5) 知 $\|\Phi\|_{\mathcal{A}} \geqslant 1$. 这说明了 $\|\Phi\|_{\mathcal{A}} = 1$. 依定义

$$D_{(0,0)}\Phi : K[T]^{\leqslant(n-1)} \times K[T]^{\leqslant(m-1)} \longrightarrow K[T]^{\leqslant(n+m-1)}$$

将 (a,b) 映为 $ah + bg$, 从而

$$\det(D_{(0,0)}\Phi) = \mathrm{Res}(g,h).$$

这样由推论 4.1.10 便得出要证的结论. □

推论 4.1.12. 假设

$$F(T) = a_0T^d + a_1T^{d-1} + \cdots + a_d \in K[T]$$

是 $K[T]$ 中的不可约多项式, 其中 $a_0 \neq 0$. 那么 $\|F\| = \max\{|a_0|, |a_d|\}$. 特别地, 若 $a_0 = 1$ 且 $a_d \in \mathcal{O}$, 那么 $F \in \mathcal{O}[T]$.

证明: 将 F 的系数乘以一个公因子后不妨设

$$\max\{|a_0|, \ldots, |a_d|\} = 1.$$

令 $i \in \{0, \ldots, d\}$ 为使得 $|a_i| = 1$ 的最大的指标. 假设 $i \notin \{0, d\}$. 令

$$g(T) = T^{d-i}, \quad h(T) = a_0T^i + a_1T^{i-1} + \cdots + a_i.$$

那么 $\|\operatorname{Res}(g,h)\| = |a_i^{d-i}| = 1$, 而

$$(F-gh)(T) = a_{i+1}T^{d-i-1} + \cdots + a_d.$$

从而

$$\|F-gh\| < 1 = \|\operatorname{Res}(g,h)\|^2.$$

由定理 4.1.11 知 F 在 $K[T]$ 中可约, 矛盾. 所以

$$\max\{|a_0|,\ldots,|a_d|\} = \max\{|a_0|,|a_d|\}.$$

最后, 如果 $a_0 = 1$ 且 $a_d \in \mathcal{O}$, 那么 $\max\{|a_0|,\ldots,|a_d|\} = 1$, 从而 $f \in \mathcal{O}[T]$. □

4.2 完备绝对值与范数的扩张

设 $(K,|\cdot|)$ 是完备赋值域. 如果 $|\cdot|$ 是阿基米德绝对值, 那么由 Ostrowski 定理 (见 [104], 或参考 [98, II.(4.2)]) 知 K 同构于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 并且存在 $\kappa \in]0,1]$ 使得 $|\cdot|$ 等同于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上通常绝对值的 κ 次幂.

4.2.1 完备绝对值的扩张

定理 4.2.1. *设 $(K,|\cdot|)$ 是完备赋值域. 对任意有限扩张 L/K, 绝对值 $|\cdot|$ 可以唯一地延拓到 L 之上, 使得 ($N_{L/K}$ 的构造见定义 A.4.8)*

$$\forall\, \alpha \in L, \quad |\alpha| = \sqrt[n]{|N_{L/K}(\alpha)|}, \tag{4.16}$$

其中 $n = [L:K]$. 另外, $(L,|\cdot|)$ 也是完备赋值域; 并且当 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值时, L 的赋值环是 K 的赋值环的整闭包.

证明: 假设绝对值 $|\cdot|$ 可以延拓到 L 之上, 那么 $(L,|\cdot|)$ 是 $(K,|\cdot|)$ 上的有限维赋范线性空间, 所以是完备的 (见定理 3.2.5).

先讨论 $|\cdot|$ 是阿基米德绝对值的情形. 此时知 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 并且存在 $\kappa \in]0,1]$ 使得 $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上通常的绝对值的 κ 次幂. 从而只须讨论 $K = \mathbb{R}$ 且 $L = \mathbb{C}$ 的情形. 注意到对任意 $z \in \mathbb{C}$ 有

$$N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(z) = z\overline{z}.$$

从而命题成立.

以下假设 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值. 设 A 为 K 的赋值环, B 为 A 在 L 中的整闭包. 由于赋值环是整闭整环, 由命题 A.4.9 知对任意 $\alpha \in B$ 有 $N_{L/K}(\alpha) \in A$.

反过来, 设 α 是 L 中的元素, 其极小多项式形如

$$P_\alpha(T) = T^d - a_1 T^{d-1} + \cdots + (-1)^d a_d.$$

由命题 A.4.9 知 $a_d = N_{K(\alpha)/K}(\alpha)$, 从而

$$N_{L/K}(\alpha) = N_{K(\alpha)/K}(\alpha)^{[L:K(\alpha)]}$$

是 a_d 的幂. 由于 A 是整闭整环, 如果 $N_{L/K}(\alpha) \in A$, 那么 $a_d \in A$. 由推论 4.1.12 知 $P_\alpha \in A[T]$, 从而 α 是 A 上的整元. 这说明 A 在 L 中的整闭包等于

$$\{\alpha \in L \mid N_{L/K}(\alpha) \in A\}.$$

以下将函数 $|\cdot|$ 按公式 (4.16) 延拓到域 L 上 (依定义, 当 $\alpha \in K$ 时 $N_{L/K}(\alpha) = \alpha^n$). 不难证明延拓的函数是 L 上的绝对值. 事实上, 对任意 $(\alpha, \beta) \in L^2$ 有

$$N_{L/K}(\alpha\beta) = N_{L/K}(\alpha) N_{L/K}(\beta),$$

故 $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$. 另外, 前面证明了 A 在 L 中的整闭包 B 等于

$$\{\alpha \in L \mid |\alpha| \leqslant 1\}.$$

如果 α 和 β 是 L 中的两个元素, 使得 $|\alpha| \geqslant |\beta|$, 那么

$$\frac{\beta}{\alpha} + 1 \in B,$$

从而

$$|\beta + \alpha| \leqslant |\alpha| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

这说明了函数 $|\cdot| : L \to [0, +\infty[$ 是 L 上的非阿基米德绝对值.

最后证明延拓的唯一性. 假设 $|\cdot|_1 : L \to [0, +\infty[$ 是延拓 $|\cdot|$ 的另一绝对值, 它也是非阿基米德绝对值. 以下用反证法证明对任意 $\alpha \in B$ 有 $|\alpha|_1 \leqslant 1$. 令

$$P_\alpha(T) = T^d + a_1 T^{d-1} + \cdots + a_d \in K[T].$$

为 α 的极小多项式, 那么

$$1 = |a_1\alpha^{-1} + \cdots + a_d\alpha^{-d}|_1 \leqslant \max_{i \in \{1,\ldots,d\}} \frac{|a_i|}{|\alpha|_1^i}.$$

如果 $|\alpha|_1 > 1$, 那么得到

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, d\}, \quad \frac{|a_i|}{|\alpha|_1^i} < 1,$$

与上式矛盾. 这说明 $(L, |\cdot|_1)$ 的赋值环 B_1 包含 B. 由注 3.1.2 知存在 $\kappa > 0$ 使得 $|\cdot|_1 = |\cdot|^\kappa$. 由于 $|\cdot|$ 和 $|\cdot|_1$ 在 K 上的限制相等, 如果 $|\cdot|$ 在 K 上不是平凡的绝对值, 那么 $\kappa = 1$. 如果 $|\cdot|$ 在 K 上是平凡的绝对值, 按定义它在 L 上也是平凡的绝对值, 从而仍有 $|\cdot|_1 = |\cdot|$. □

注 4.2.2. 设 $(K, |\cdot|)$ 是完备赋值域. 定理 4.2.1 说明了 $|\cdot|$ 可以唯一地延拓到 K 的代数闭包 K^{ac} 之上. 如果 α 是 K^{ac} 中的元素,

$$P_\alpha(T) = T^d - \lambda_1 T^{d-1} + \cdots + (-1)^d \lambda_d$$

是 α 在 K 上的极小多项式, 那么

$$|\alpha| = |\lambda_d|^{1/d}.$$

令 $\mathrm{Aut}_{K\text{-alg}}(K^{\mathrm{ac}})$ 为域 K^{ac} 的 K-线性自同构群. 对任意 $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(K^{\mathrm{ac}})$, K^{ac} 中的元素 α 与 $\sigma(\alpha)$ 在 K 上具有相同的极小多项式. 这说明了 $|\alpha| = |\sigma(\alpha)|$.

4.2.2 范数的扩张

定义 4.2.3. 设 $(K, |\cdot|)$ 为非阿基米德完备赋值域, $(L, |\cdot|_L)$ 为 $(K, |\cdot|)$ 的扩张, 使得 $(L, |\cdot|_L)$ 为完备赋值域. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为有限维赋超范 K-线性空间. 用 $\|\cdot\|_L$ 表示 $L \otimes_K E$ 上的超范数, 使得对任意 $\lambda_1 \otimes s_1 + \cdots + \lambda_n \otimes s_n \in L \otimes_K E$ 有 (对偶范数的概念见定义 3.2.9)

$$\|\lambda_1 \otimes s_1 + \cdots + \lambda_n \otimes s_n\|_L := \sup_{\varphi \in E^\vee \setminus \{0\}} \frac{|\lambda_1 \varphi(s_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(s_n)|_L}{\|\varphi\|_*}.$$

这实际上是将 $L \otimes_K E$ 等同于 $\mathrm{Hom}_K(E^\vee, L)$ 并考虑其上的算子范数.

命题 4.2.4. 在定义 4.2.3 的记号和假设下, 以下命题成立.

(1) 对任意 $s \in E$ 有
$$\|1 \otimes s\|_L = \|s\|.$$

(2) 设 $\alpha \in \,]0, 1]$. 如果 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 $(E, \|\cdot\|)$ 的 α-正交基, 那么 $(1 \otimes e_i)_{i=1}^r$ 是 $(L \otimes_K E, \|\cdot\|_L)$ 的 α-正交基.

(3) 若通过 K-线性单射

$$E \longrightarrow L \otimes_K E, \quad x \longmapsto 1 \otimes x$$

将 E 视为 $L \otimes_K E$ 的子集, 那么 $\|\cdot\|_L$ 是 $L \otimes_K E$ 上延拓函数 $\|\cdot\|$ 的最大的超范数.

(4) 如果通过线性空间 $L \otimes_K \det(E)$ 和 $\det(L \otimes_K E)$ 之间的自然同构将它们等同起来, 那么如下等式成立

$$\|\cdot\|_{L,\det} = \|\cdot\|_{\det,L}.$$

证明: (1) 依定义有

$$\|1 \otimes s\|_L = \|s\|_{**}.$$

由于 $\|\cdot\|$ 是超范数, 由命题 3.2.17 得到 $\|1 \otimes s\|_L = \|s\|$.

(2) 令 $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ 为 $(e_i)_{i=1}^r$ 的对偶基. 由命题 3.2.12 知, 对任意 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 有

$$\|e_i^\vee\|_* \leqslant \frac{1}{\alpha \|e_i\|}.$$

这样对任意 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in L^r$, 有

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, r\}, \quad \|\lambda_1 \otimes e_1 + \cdots + \lambda_r \otimes e_r\|_L \geqslant \frac{|\lambda_i|_L}{\|e_i\|_*} \geqslant \alpha |\lambda_i|_L \cdot \|e_i\|.$$

从而由 (1) 知

$$\|\lambda_1 \otimes e_1 + \cdots + \lambda_r \otimes e_r\|_L \geqslant \alpha \max_{i \in \{1, \ldots, r\}} |\lambda_i|_L \cdot \|1 \otimes e_i\|_L.$$

所以 $(1 \otimes e_i)_{i=1}^r$ 是 $(L \otimes_K E, \|\cdot\|_L)$ 的 α-正交基.

(3) 由 (1) 知 $\|\cdot\|_L$ 是 $L \otimes_K E$ 上延拓 $\|\cdot\|$ 的超范数. 假设 $\|\cdot\|'$ 是另一延拓 $\|\cdot\|$ 的超范数. 由命题 3.2.15, 对任意 $\alpha \in \,]0, 1[$, 存在 $(E, \|\cdot\|)$ 的 α-正交基 $(e_i)_{i=1}^r$. 又由 (2) 知 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 $(L \otimes_K E, \|\cdot\|_L)$ 的 α-正交基. 由于 $\|\cdot\|'$ 是延拓 $\|\cdot\|$ 的超范数, 对于任意

$$s = \lambda_1 \otimes e_1 + \cdots + \lambda_r \otimes e_r \in L \otimes_K E$$

有

$$\|s\|' \leqslant \max_{i \in \{1, \ldots, r\}} |\lambda_i|_L \cdot \|1 \otimes e_i\|' = \max_{i \in \{1, \ldots, r\}} |\lambda_i|_L \cdot \|e_i\| \leqslant \alpha^{-1} \|s\|_L.$$

令 α 趋于 1 得到 $\|\cdot\|' \leqslant \|\cdot\|_L$.

(4) 为叙述方便, 象 (3) 中那样将 E 看成 $L\otimes_K E$ 的 K-线性子空间. 对任意 $\alpha\in\,]0,1[$, 存在 $(E,\|\cdot\|)$ 的 α-正交基 $(1\otimes e_i)_{i=1}^r$. 由 (1) 知它同时也是 $(L\otimes_K E,\|\cdot\|_L)$ 的 α-正交基. 由命题 3.2.15 知

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{L,\det}\geqslant\alpha^r\|e_1\|_L\cdots\|e_r\|_L=\alpha^r\|e_1\|\cdots\|e_r\|.$$

又由 Hadamard 不等式 (4.14) 知

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{L,\det}\geqslant\alpha^r\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}.$$

由于 $\det(E)$ 是一维 K-线性空间, 这说明 $\|\cdot\|_{L,\det}\geqslant\alpha^r\|\cdot\|_{\det,L}$. 反过来, 由 Hadamard 不等式 (4.14) 知

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{L,\det}\leqslant\|e_1\|_L\cdots\|e_r\|_L=\|e_1\|\cdots\|e_r\|.$$

又由命题 3.2.15 知

$$\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{L,\det}\leqslant\alpha^{-r}\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{\det}.$$

从而得到

$$\|\cdot\|_{L,\det}\leqslant\alpha^{-r}\|\cdot\|_{\det,L}.$$

最后令 α 趋于 1 得到等式 $\|\cdot\|_{L,\det}=\|\cdot\|_{\det,L}$. □

定义 4.2.5. 在实数域和复数域上赋以通常的绝对值. 假设 E 是有限维实线性空间, $\|\cdot\|$ 是 E 上由内积 $\langle\,,\rangle$ 诱导的范数. 用 $\langle\,,\rangle_{\mathbb{C}}$ 表示 $E_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}E$ 上的 Hermite 内积, 使得对任意 $(s,t,s',t')\in E^4$ 有

$$\langle s+it,s'+it'\rangle_{\mathbb{C}}=(\langle s,s'\rangle+\langle t,t'\rangle)+\sqrt{-1}(\langle s,t'\rangle-\langle t,s'\rangle).$$

用 $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ 表示 Hermite 内积 $\langle\,,\rangle_{\mathbb{C}}$ 所诱导的范数. 从定义不难看出, $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ 在 E 上的限制等于 $\|\cdot\|$. 另外, 如果 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 $(E,\|\cdot\|)$ 的正交基, 那么它作为 $E_{\mathbb{C}}$ 的基是 $(E_{\mathbb{C}},\|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ 的正交基. 为了记号上的统一, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ 也表示 $\|\cdot\|$.

4.2.3 扩域上线性空间的范数

设 $(K,|\cdot|)$ 为非阿基米德完备赋值域, L 为 K 的有限扩张, $d=[L:K]$. 由定理 4.2.1 知绝对值 $|\cdot|$ 可以唯一地延拓到 L 之上. 我们用 $|\cdot|_L$ 来表示绝对值 $|\cdot|$ 在 L 上的延拓. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 为 L 上的有限维赋超范线性空间, r 为

E 在 L 上的维数. 由于 $(L,|\cdot|)$ 是赋值域 $(K,|\cdot|)$ 的扩张, $(E,\|\cdot\|)$ 也可以看作是 $(K,|\cdot|)$ 上的有限维线性赋范空间, 其在 K 上的维数是 rd. 我们用 $\det_K(E)$ 表示 E 作为 K-线性空间的最大阶外积幂 $\Lambda_K^{rd}(E)$, 并用 $\|\cdot\|_{\det_K}$ 表示 $\det_K(E)$ 上的行列式范数. 为方便理解, 用 $\det_L(E)$ 表示 E 作为 L-线性空间的最大阶外积幂 $\Lambda_L^r(E)$, 并用 $\|\cdot\|_{\det_L}$ 表示 $\det_L(E)$ 上的行列式范数.

命题 4.2.6. 设 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 E 在 L 上的一组基, $(b_j)_{j=1}^d$ 为 L 在 K 上的一组基, 并令

$$\eta=(b_1e_1\wedge_K\cdots\wedge_K b_1e_r)\wedge_K\cdots\wedge_K(b_de_1\wedge_K\cdots\wedge_K b_de_r)\in\det_K(E).$$

那么如下等式成立

$$\|\eta\|_{\det_K}=\|e_1\wedge_L\cdots\wedge_L e_r\|_{\det_L}^d\cdot|b_1\wedge_K\cdots\wedge_K b_d|_{L,\det}^r. \tag{4.17}$$

证明: 如果 $(e'_i)_{i=1}^r$ 是 E 在 L 上的一组基, 并且 A 是从 $(e_i)_{i=1}^r$ 到 $(e'_i)_{i=1}^r$ 的转移矩阵,

$$\eta'=(b_1e'_1\wedge_K\cdots\wedge_K b_1e'_r)\wedge_K\wedge\cdots\wedge_K(b_de'_1\wedge_K\wedge\cdots\wedge_K b_de'_r),$$

那么[37]

$$\eta'=\pm N_{L/K}(\det(A))\eta.$$

从而不难证明等式 (4.17) 左右两边的商与基 $(e_i)_{i=1}^r$ 和 $(b_j)_{j=1}^d$ 的选择无关. 因此不妨设 $(e_i)_{i=1}^r$ 和 $(b_j)_{j=1}^d$ 都是 α-正交基, 其中 $\alpha\in]0,1[$. 由 Hardamard 不等式 (3.9) 和命题 3.2.15 知

$$\begin{aligned}\|\eta\|_{\det_K}&\leqslant\prod_{i=1}^r\prod_{j=1}^d\|b_je_i\|=\left(\prod_{i=1}^r\|e_i\|\right)^d\cdot\left(\prod_{j=1}^d|b_j|_L\right)^r\\&\leqslant\alpha^{-2rd}\|e_1\wedge_L\cdots\wedge_L e_r\|_{\det_L}^d\cdot|b_1\wedge_K\cdots\wedge_K b_d|_{L,\det}^r.\end{aligned}$$

另外, 对任意 $(a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,r\}\times\{1,\dots,d\}}\in K^{r\times d}$, 若令 $x=\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^d a_{i,j}b_je_i$, 那么

$$\begin{aligned}\|x\|&\geqslant\alpha\max_{i\in\{1,\dots,r\}}|a_{i,1}b_1+\cdots+a_{i,d}b_d|_L\cdot\|e_i\|\\&\geqslant\alpha^2\max_{(i,j)\in\{1,\dots,r\}\times\{1,\dots,d\}}|a_{i,j}|\cdot|b_j|_L\cdot\|e_i\|.\end{aligned}$$

[37]由于 $N_{L/K}:L\to K$ 保持乘积, 可以将问题转化为 A 是初等矩阵的情形.

这说明 $(b_je_i)_{(i,j)\in\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,d\}}$ 是 $(E,\|\cdot\|)$ 作为赋超范 K-线性空间的 α^2-正交基. 从而由命题 3.2.15 知

$$\|\eta\|_{\det_K}\geqslant\alpha^{2rd}\prod_{i=1}^r\prod_{j=1}^d\|b_je_i\|\geqslant\alpha^{2rd}\|e_1\wedge_L\cdots\wedge_L e_r\|_{\det_L}^d\cdot|b_1\wedge_K\cdots\wedge_K b_d|_{L,\det}^r.$$

令 α 趋于 1 便得到要证的等式. □

注 4.2.7. 假设 $|\cdot|$ 是离散的绝对值并且 $\|\cdot\|$ 是纯范数. 用 $\|\cdot\|_{\mathrm{pur}_K}$ 表示将 E 视为 K-线性空间后范数 $\|\cdot\|$ 的纯化, 用 $|\cdot|_{L,\mathrm{pur}_K}$ 表示将 L 视为 K-线性空间后范数 $|\cdot|_L$ 的纯化. 那么在命题 4.2.6 的记号下等式

$$\|\eta\|_{\mathrm{pur_K},\det_K}=\|e_1\wedge_L\cdots\wedge e_r\|_{\det_L}^d\cdot|b_1\wedge_K\cdots\wedge_K b_d|_{L,\mathrm{pur}_K,\det_K}^r \tag{4.18}$$

成立. 同命题 4.2.6 的证明类似, 等式两边的商与 $(e_i)_{i=1}^r$ 和 $(b_j)_{j=1}^d$ 的选择无关, 从而不妨假设 $(e_i)_{i=1}^r$ 是标准正交基, $(b_j)_{j=1}^d$ 是正交基. 这样 $(b_je_i)_{(i,j)\in\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,d\}}$ 是 $(E,\|\cdot\|)$ 作为 $(K,|\cdot|)$ 上赋范线性空间的一组正交基. 由注 3.2.23 知它亦是 $(E,\|\cdot\|_{\mathrm{pur}_K})$ 的一组正交基. 从而由命题 3.2.15 知

$$\|\eta\|_{\mathrm{pur}_K,\det_K}=\prod_{i=1}^r\prod_{j=1}^d\|b_je_i\|_{\mathrm{pur}_K}.$$

由于 $\|e_i\|=1$, 知 $\|b_je_i\|_{\mathrm{pur}_K}=|b_j|_{L,\mathrm{pur}_K}$. 再次利用命题 3.2.15, 从上式可推出

$$\|\eta\|_{\mathrm{pur}_K,\det_K}=\prod_{i=1}^r\prod_{j=1}^d|b_j|_{L,\mathrm{pur}_K}=|b_1\wedge_K\cdots\wedge_K b_d|_{L,\mathrm{pur}_K,\det_K}^r,$$

从而等式 (4.18) 成立.

注 4.2.8. 假设 $K=\mathbb{R}$, $L=\mathbb{C}$ 并且 $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}$ 上通常的绝对值. 设 E 为有限维复线性空间, $\|\cdot\|$ 为 E 上由复内积 $\langle\,,\rangle$ 诱导的范数. 那么将 E 视为 $\mathbb{R}$ 上的有限维线性空间时 $\|\cdot\|$ 是由实内积 $\mathrm{Re}\langle\,,\rangle$ 诱导的范数. 此时命题 4.2.6 的结论仍然成立.

4.2.4 相对对偶化丛

设 K 为域, L 为 K 的可分有限扩张. 用 $\omega_{L/K}$ 表示 $\mathrm{Hom}_K(L,K)$. 注意到运算

$$\begin{array}{rcl}L\times\mathrm{Hom}_K(L,K)&\longrightarrow&\mathrm{Hom}_K(L,K),\\(a,f)&\longmapsto&(f(a\,\cdot\,):(x\in L)\mapsto f(ax))\end{array}$$

赋予 $\omega_{L/K}$ 一个 L-线性空间结构. 由推论 A.4.12 知 $\mathrm{Hom}_L(L,K)$ 是由 $\mathrm{Tr}_{L/K}$ 生成的一维 L-线性空间.

命题 4.2.9. 设 L/K 为域的可分有限扩张, E 为有限维 L-线性空间. 那么 $\mathrm{Hom}_K(E,K)$ 在运算

$$\begin{aligned} L\times \mathrm{Hom}_K(E,K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E,K),\\ (b,g) &\longmapsto (g(b\,\cdot\,):x\mapsto g(bx)) \end{aligned}$$

下构成一个 L-线性空间, 并且下列映射是 L-线性空间的同构:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_L(E,L)\otimes_L \omega_{L/K} &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E,K),\\ (\alpha,f) &\longmapsto f\circ\alpha. \end{aligned} \tag{4.19}$$

证明: 第一个命题的验证留给读者. 以下证明第二个命题. 令 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 E 在 L 上的一组基, $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ 为其对偶基. 设 g 为 $\mathrm{Hom}_K(E,K)$ 中任一元素. 对任意 $i\in\{1,\ldots,r\}$, $(b\in L)\mapsto g(be_i)$ 是 $\mathrm{Hom}_K(L,K)$ 中的元素. 由于 $(a,b)\mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(ab)$ 是 L 上非退化的 K-双线性形式, 知存在唯一的 $a_i\in L$ 使得

$$\forall\, b\in L,\quad g(be_i)=\mathrm{Tr}_{L/K}(a_ib).$$

从而

$$g=\sum_{i=1}^r \mathrm{Tr}_{L/K}(a_i\,\cdot\,)\circ e_i^\vee.$$

这说明了 (4.19) 是满同态. 另外, 由于 $\mathrm{Hom}_L(L,K)$ 是由 $\mathrm{Tr}_{L/K}$ 生成的一维 L-线性空间, $\mathrm{Hom}_L(E,L)\otimes_L \mathrm{Hom}(L,K)$ 中的元素可以写成 $\alpha\otimes \mathrm{Tr}_{L/K}$ 的形式. 如果 $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)=0$, 那么对任意 $x\in E$ 有 $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha(x))=0$. 特别地, 对任意 $x\in E$, 下列等式成立

$$\forall\, b\in L,\quad \mathrm{Tr}_{L/K}(b\alpha(x))=\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha(bx))=0.$$

由于双线性形式

$$((a,b)\in L\times L)\longmapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(ab)$$

非退化, 知 $\alpha(x)=0$. 从而 (4.19) 是单同态. 命题于是得证. □

命题 4.2.10. 设 $(K,|\cdot|)$ 为完备赋值域, $(L,|\cdot|_L)$ 为 $(K,|\cdot|)$ 的可分有限扩张, $(E,\|\cdot\|)$ 为 L 上的有限维赋范线性空间, $\|\cdot\|_*$ 为 $\|\cdot\|$ 在 $\mathrm{Hom}_L(E,L)$ 上的对偶范数. 我们赋 L-线性空间 $\mathrm{Hom}_L(E,L)\otimes_L\omega_{L/K}$ 以范数 $\|\cdot\|_1$, 使得

$$\forall\,\alpha\otimes f\in \mathrm{Hom}_L(E,L)\otimes_L\omega_{L/K},\quad \|\alpha\otimes f\|_1=\|\alpha\|_*\cdot|f|_{L,*},$$

其中 $|\cdot|_{L,*}$ 是将 $(L,|\cdot|_L)$ 视为 $(K,|\cdot|)$ 上的赋范线性空间时 $|\cdot|_L$ 的对偶范数. 又赋 L-线性空间 $\mathrm{Hom}_K(E,K)$ 以范数 $\|\cdot\|_2$, 使得对任意 $\varphi\in\mathrm{Hom}_K(E,K)$ 有 (换句话说, $\|\cdot\|_2$ 是将 $(E,\|\cdot\|)$ 视为 $(K,|\cdot|)$ 上的赋范线性空间时 $\|\cdot\|$ 的对偶范数)

$$\|\varphi\|_2=\sup_{x\in E\setminus\{0\}}\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}.$$

那么 L-线性同构

$$\begin{array}{rcl} E^\vee\otimes_L\omega_{L/K} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(E,K), \\ (\alpha,f) & \longmapsto & f\circ\alpha. \end{array}$$

是保持范数的同构.

证明: 在证明命题之前, 先说明 $\|\cdot\|_2$ 的确是 L-线性空间 $\mathrm{Hom}_K(E,K)$ 上的范数. 设 $\varphi\in\mathrm{Hom}_K(E,K)$, $\lambda\in L\setminus\{0\}$, 那么

$$\|\varphi(\lambda\,\cdot)\|_2=\sup_{x\in E\setminus\{0\}\}}\frac{|\varphi(\lambda x)|}{\|x\|}=\sup_{y\in E\setminus\{0\}}\frac{|\varphi(y)|}{\|\lambda^{-1}y\|}=|\lambda|_L\cdot\|\varphi\|_2.$$

由于 $\omega_{L/K}$ 是一维 L-线性空间, $\mathrm{Hom}_L(E,L)\otimes_L\omega_{L/K}$ 中的元素形如 $\alpha\otimes f$, 其中 $(\alpha,f)\in\mathrm{Hom}_L(E,L)\times\mathrm{Hom}_K(L,K)$. 首先,

$$\|f\circ\alpha\|_2=\sup_{x\in E\setminus\{0\}}\frac{|f(\alpha(x))|}{\|x\|}\leqslant\sup_{x\in E\setminus\{0\}}|f|_{L,*}\frac{|\alpha(x)|_L}{\|x\|}\leqslant\|\alpha\|_*\cdot|f|_{L,*};$$

其次, 对任意 $x\in E\setminus\mathrm{Ker}(\alpha)$ 及 $b\in L^\times$, 令 $y=\alpha(x)^{-1}bx$ 后便得到

$$\|f\circ\alpha\|_2\geqslant\frac{|f(\alpha(y))|}{\|y\|}=\frac{|f(b)|}{\|\alpha(x)^{-1}bx\|}=\frac{|f(b)|}{|b|_L}\cdot\frac{|\alpha(x)|_L}{\|x\|}.$$

对 b 和 x 取上确界, 得 $\|f\circ\alpha\|_2\geqslant\|\alpha\|_*\cdot|f|_{L,*}$. □

注 4.2.11. 设 $(K,|\cdot|)$ 为完备离散非平凡赋值域, $(L,|\cdot|_L)$ 为 $(K,|\cdot|)$ 的可分有限扩张. 将 $(L,|\cdot|_L)$ 视为 $(K,|\cdot|)$ 有限维赋范线性空间. 如果 $|\cdot|_L$ 是纯范数, 则说 $(L,|\cdot|_L)$ 是 $(K,|\cdot|)$ 的**非分歧扩张**. 用 $|\cdot|_{L,\mathrm{pur}_K}$ 表示范数 $|\cdot|_L$ 的纯化, 并用 $|\cdot|_{L,\mathrm{pur}_K,*}$ 表示其对偶范数. 依定义, 对任意 $f\in\mathrm{Hom}_K(L,K)$ 有

$$|f|_{L,\mathrm{pur}_K,*}=\sup_{b\in L^\times}\frac{|f(b)|}{|b|_{L,\mathrm{pur}_K}},$$

其中

$$|b|_{L,\mathrm{pur}_K}=\inf\{|a|\mid a\in K^\times,\ |b|_L\leqslant|a|\}.$$

从而

$$|f|_{L,\mathrm{pur}_K,*}=\sup_{\substack{(a,b)\in K^\times\times L^\times\\|b|_L\leqslant|a|}}|f(a^{-1}b)|=\sup_{b\in L,\,|b|_L\leqslant 1}|f(b)|.$$

注意到 $|\cdot|_{L,\mathrm{pur}_K,*}$ 是 $\mathrm{Hom}_K(L,K)$ 作为 K-线性空间的范数. 将 $\mathrm{Hom}_K(L,K)$ 视为一维 L-线性空间并考虑其上的范数 $|\cdot|'_{L,*}$, 以

$$\{f\in\mathrm{Hom}_K(L,K)\mid |f|_{L,\mathrm{pur}_K,*}\leqslant 1\}$$

为其单位闭球. 依定义, 范数 $|\cdot|'_{L,*}$ 的纯化等于 $|\cdot|_{L,\mathrm{pur}_K,*}$. 对任意 $f\in\mathrm{Hom}_K(L,K)$ 有

$$\begin{aligned}|f|'_{L,*}&=\inf\{|c|_L\mid c\in L^\times,\ |f(c^{-1}\cdot)|_{L,\mathrm{pur}_K,*}\leqslant 1\}\\&=\inf\{|c|_L\mid c\in L^\times,\ \sup_{b\in L,\,|b|_L\leqslant 1}|f(c^{-1}b)|\leqslant 1\}\\&=\inf\{|c|_L\mid c\in L^\times,\ \sup_{b\in L,\,|b|_L\leqslant|c|_L^{-1}}|f(b)|\leqslant 1\}\\&=\inf\{|c|_L\mid c\in L^\times,\ \forall\,b\in L,\ |f(b)|>1\Longrightarrow|c|_L>|b|_L^{-1}\}.\end{aligned}$$

令 ϖ_K 和 ϖ_L 分别为 $(K,|\cdot|)$ 和 $(L,|\cdot|_L)$ 的单值化子. 这样

$$\begin{aligned}|f|'_{L,*}&=\inf\{|c|_L\mid c\in L^\times,\ \forall\,b\in L,\ |f(b)|\geqslant|\varpi_K|^{-1}\Longrightarrow|c|_L\geqslant|\varpi_Lb|_L^{-1}\}\\&=\inf\{|c|_L\mid c\in L^\times,\ \forall\,b\in L,\ |f(b)|\geqslant 1\Longrightarrow|c|_L\geqslant|\varpi_K|\cdot|\varpi_Lb|_L^{-1}\}\\&=\sup_{b\in L,\,|f(b)|=1}\frac{|\varpi_K|}{|\varpi_L|_L}\cdot\frac{1}{|b|_L}=\frac{|\varpi_K|}{|\varpi_L|}\cdot|f|_{L,*}.\end{aligned}$$

假设 $(E,\|\cdot\|)$ 是 $(L,|\cdot|_L)$ 上具有标准正交基的有限维赋超范线性空间. 我们赋 L-线性空间 $\mathrm{Hom}_L(E,L)\otimes_L\omega_{L/K}$ 以范数 $\|\cdot\|'_1$, 使得

$$\forall\,\alpha\otimes f\in\mathrm{Hom}_L(E,L)\otimes_L\omega_{L/K},\quad \|\alpha\otimes f\|'_1=\|\alpha\|_*\cdot|f|'_{L,*}.$$

用 $\|\cdot\|'_{1,\mathrm{pur}_K}$ 表示将 $\mathrm{Hom}_L(E,L)\otimes_L\omega_{L/K}$ 视为 K-线性空间后范数 $\|\cdot\|'_1$ 的纯化. 用 $\|\cdot\|_{\mathrm{pur}_K}$ 表示将 E 视为 K-线性空间后范数 $\|\cdot\|$ 的纯化并用 $\|\cdot\|_{\mathrm{pur}_K,*}$ 表示其对偶范数. 那么映射

$$\begin{aligned}E^\vee\otimes_L\omega_{L/K}&\longrightarrow\mathrm{Hom}_K(E,K),\\(\alpha,f)&\longmapsto f\circ\alpha.\end{aligned}$$

视为 K-线性同构时是从 $\|\cdot\|'_1$ 到 $\|\cdot\|_{\mathrm{pur}_K,*}$ 的等距同构.

4.3 一般绝对值的扩张

本节中固定一个赋值域 (K,v), 有时也将绝对值 v 记作 $|\cdot|_v$. 令 K_v 为域 K 关于绝对值 v 的完备化并用 K_v^{ac} 表示 K_v 的一个代数闭包. 由定理 4.2.1 知 $|\cdot|_v$ 作为 K_v 上的绝对值可以唯一地延拓到域 K_v^{ac} 之上. 我们用 v^{ac} 来表示这个延拓.

4.3.1 绝对值扩张的分类

令 L 为域 K 的一个有限扩张并用 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,K_v^{\mathrm{ac}})$ 表示从 L 到 K_v^{ac} 的 K-代数同态构成的集合. 令 $\mathrm{Aut}_{K_v\text{-alg}}(K_v^{\mathrm{ac}})$ 为域 K_v^{ac} 的 K_v-代数自同构群. 注意到群 $\mathrm{Aut}_{K_v\text{-alg}}(K_v^{\mathrm{ac}})$ 如下左作用在 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,K_v^{\mathrm{ac}})$ 之上

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Aut}_{K_v\text{-alg}}(K_v^{\mathrm{ac}})\times\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,K_v^{\mathrm{ac}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,K_v^{\mathrm{ac}}),\\ (\eta,\tau) & \longmapsto & \eta\circ\tau.\end{array}\tag{4.20}$$

定理 4.3.1. 设 w 是 v 在 L 上的延拓. 那么存在 $\tau\in\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,K_v^{\mathrm{ac}})$ 使得 $w=v^{\mathrm{ac}}\circ\tau$. 并且满足这个等式的 $\tau\in\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,K_v^{\mathrm{ac}})$ 恰构成群作用 (4.20) 的一个轨道, 也就是说 τ 在差一个 K_v^{ac} 的 K-线性自同构的作用下是唯一的.

证明: 令 L_w 为 L 相对于 w 的完备化. 将 $(L_w,|\cdot|_w)$ 视为 K_v 上的赋范线性空间. 考虑从 $K_v\otimes_K L$ 到 L_w 的 K_v-代数同态

$$f_w: K_v\otimes_K L\longrightarrow L_w,\quad \lambda\otimes a\longmapsto\lambda a.$$

这个映射的像是 L_w 的有限维 K_v-线性子空间, 由定理 3.2.5 知它是闭线性子空间. 而 f_w 的像又包含 L, 所以在 L_w 中稠密, 这说明了 f_w 是满射. 特别地, L_w 是 K_v 的有限扩张, 且 $[L_w:K_v]\leqslant[L:K]$. 任取从 L_w 到 K_v^{ac} 的一个 K_v-代数同态 τ' 并令 τ 为 τ' 在 L 上的限制. 由定理 4.2.1 知 $w=v^{\mathrm{ac}}\circ\tau$. 另外, 由 τ' 的任意性知道 τ 在群作用 (4.20) 下的轨道中任意一个元素都满足这个等式.

最后, 如果 $\sigma:L\to K_v^{\mathrm{ac}}$ 是 K-代数同态, 使得 $w=v^{\mathrm{ac}}\circ\sigma$, 由 σ 的连续性可将它连续延拓成为 K_v-代数同态 $\sigma':L_w\to K_v^{\mathrm{ac}}$. 由于 L_w/K_v 是代数扩张, $\mathrm{Aut}_{K_v\text{-alg}}(K_v^{\mathrm{ac}})$ 在 $\mathrm{Hom}_{K_v\text{-alg}}(L_w,K_v^{\mathrm{ac}})$ 上的左作用满足传递性 (见推论 A.3.12). 从而存在 $\eta\in\mathrm{Aut}_{K_v\text{-alg}}(K_v^{\mathrm{ac}})$ 使得 $\eta\circ\tau'=\sigma'$. 定理于是得证. □

注 4.3.2. 令 C_v^L 为绝对值 v 在 L 上所有的延拓构成的集合. 上述定理说明了 C_v^L 是一个有限集, 其基数不超过 $[L:K]_s$ (见定义 A.4.2). 另外, 从定理的证明看出, 映射

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{w\in C_v^L} \mathrm{Hom}_{K_v\text{-alg}}(L_w, K_v^{\mathrm{ac}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L, K_v^{\mathrm{ac}}) \\ \sigma' & \longmapsto & \sigma'|_L \end{array} \tag{4.21}$$

是一一对应.

推论 4.3.3. 设 L 为 K 的有限可分扩张, C_v^L 为绝对值 v 在 L 上所有的延拓构成的集合. 对任意 $w\in C_v^L$, 令 ψ_w 为从 $K_v\otimes_K L$ 到 L_w 的 K_v-代数同态, 将 $\lambda\otimes a\in K_v\otimes_K L$ 映为 $\lambda a\in L_\omega$.

(1) K_v-代数同态

$$\Psi_v : K_v\otimes_K L \longrightarrow \prod_{w\in C_v^L} L_w, \quad \xi\longmapsto (\psi_w(\xi))_{w\in C_v^L} \tag{4.22}$$

是同构.

(2) 以下等式成立 (见定义 A.4.8):

$$[L:K] = \sum_{w\in C_v^L}[L_w:K_v], \tag{4.23}$$

$$\forall\, a\in L,\quad N_{L/K}(a) = \prod_{w\in C_v^L} N_{L_w/K_v}(a), \tag{4.24}$$

$$\forall\, a\in L,\quad \mathrm{Tr}_{L/K}(a) = \sum_{w\in C_v^L}\mathrm{Tr}_{L_w/K_v}(a). \tag{4.25}$$

证明: (1) 只须证明

$$f_{K_v^{\mathrm{ac}}} : K_v^{\mathrm{ac}}\otimes_K L \cong K_v^{\mathrm{ac}}\otimes_{K_v}(K_v\otimes_K L) \longrightarrow \prod_{w\in C_v^L} K_v^{\mathrm{ac}}\otimes_{K_v} L_w$$

是 K_v^{ac}-代数同构. 考虑以下交换图表

$$\begin{tikzcd} K_v^{\mathrm{ac}}\otimes_K L \arrow[r, "f_{K_v^{\mathrm{ac}}}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \prod_{w\in C_v^L} K_v^{\mathrm{ac}}\otimes_{K_v} L_w \arrow[d, "\psi"] \\ \prod_{\sigma\in \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,K_v^{\mathrm{ac}})} K_v^{\mathrm{ac}} \arrow[r, "\eta"'] & \prod_{w\in C_v^L}\prod_{\tau\in\mathrm{Hom}_{K_v\text{-alg}}(L_w,K_v^{\mathrm{ac}})} K_v^{\mathrm{ac}} \end{tikzcd}$$

其中 φ 将 $\lambda\otimes a\in K_v^{\mathrm{ac}}\otimes_K L$ 映为 $(\lambda\sigma(a))_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,K_v^{\mathrm{ac}})}$, 映射 ψ 由下列 K_v^{ac}-代数同态族所诱导:

$$\begin{aligned}\psi_w: K_v^{\mathrm{ac}}\otimes_{K_v} L_w &\longrightarrow \prod_{\tau\in\mathrm{Hom}_{K_v\text{-alg}}(L_w,K_v^{\mathrm{ac}})} K_v^{\mathrm{ac}},\\ \lambda\otimes a &\longmapsto (\lambda\tau(a))_{\tau\in\mathrm{Hom}_{K_v\text{-alg}}(L_w,K_v^{\mathrm{ac}})},\end{aligned}$$

而 η 是一一对应 (4.21) 所诱导的同构. 由于 L/K 是可分扩张, φ 是 K_v^{ac}-代数同构 (见命题 A.4.4 及其证明). 另外, $K_v\otimes_K L$ 是可分 K_v-代数 (见命题 A.4.6), 而 L_w 是其商域, 从而 L_w 中任意元素在 K_v 上的极小多项式都是可分多项式, 也就是说 L_w/K_v 是可分扩张 (见命题 A.4.11). 这说明了 ψ 是 K_v^{an}-代数同构, 从而 $f_{K_v^{\mathrm{ac}}}$ 是 K_v^{an}-代数同构.

(2) 由 (1) 推出

$$[L:K]=\dim_{K_v}(K_v\otimes_K L)=\sum_{w\in C_v^L}[L_w:K_v].$$

另外, 对任意 $a\in L$, K-线性自同态 $M:L\to L$, $x\mapsto ax$ 通过同构 f 诱导了 $\prod_{w\in C_v^L}L_w$ 的自同态, 将 $(x_w)_{w\in C_v^L}$ 映为 $(ax_w)_{w\in C_v^L}$. 对任意 $w\in C_v^L$, 令 $M_w:L_w\to L_w$ 为将 $x\in L_w$ 映为 ax 的 K_v 线性自同态. 那么 M 的特征多项式等于 M_w 的特征多项式的乘积. 从而等式 (4.24) 和 (4.25) 成立. □

4.4 代数函数域的算术

本节中固定一个域 k 并用 K 表示有理函数域 $k(T)$ 的一个有限可分扩张. 另外固定某大于 1 的实数 q. 对任意 $x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}$, 用 $|\cdot|_x$ 表示 $k(T)$ 上如下定义的绝对值 (见 §3.4)

$$|\cdot|_x:=N_x^{-\operatorname{ord}_x(\cdot)},$$

其中

$$N_x=\begin{cases}q^{\deg(\varpi_x)}, & x\in\mathrm{Spm}(k[T]),\\ q, & x=\infty.\end{cases}$$

用 C_x^K 表示该绝对值在域 K 上所有延拓构成的集合. 令 $C^{(1)}$ 为集合 $(C_x^K)_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}}$ 的无交并, 并用 $\mathrm{pr}_C: C^{(1)}\to\mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 表示将 C_x^K 中的元素映为 x 的投影映射. 由注 4.3.2 知, 对任意 $x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}$, C_x^K 是有限集, 并且

$$\sum_{y\in C_x^K}[K_y:k(T)_x]=[K:k(T)].$$

为了记号上的方便, 如果 $y \in C^{(1)}$ 且 $x = \mathrm{pr}_C(y)$, 那么也用 $k(T)_y$ 来表示 $k(T)_x$.

4.4.1 代数函数域的乘积公式

命题 4.4.1 (**乘积公式**). 设 a 为 K 中的非零元素.

(1) 对任意 $x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 有

$$\prod_{y \in C_x^K} |a|_y^{[K_y : k(T)_x]} = |N_{K/k(T)}(a)|_x.$$

(2) 存在 $C^{(1)}$ 的有限子集 S_a, 使得对任意 $y \in C^{(1)} \setminus S_a$ 有 $|a|_y = 1$. 并且下列等式成立

$$\prod_{y \in C^{(1)}} |a|_y^{[K_y : k(T)_y]} = 1.$$

证明: (1) 由定理 4.16 知

$$\prod_{y \in C_x^K} |a|_y^{[K_y : k(T)_x]} = \prod_{y \in C_x^K} |N_{K_y/k(T)_x}(a)|_x.$$

由 (4.24) 得到要证的等式.

(2) 令

$$Q_a(T) = T^d + b_1 T^{d-1} + \cdots + b_d \quad 和 \quad Q_{a^{-1}}(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \cdots + c_n$$

分别为 a 和 a^{-1} 在 $k(T)$ 上的极小多项式, 由定理 3.3.7 知, 存在 $\mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 的有限子集 Z, 使得对任意 $x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)} \setminus Z$ 有

$$\max\{|b_1|_x, \ldots, |b_d|_x, |c_1|_x, \ldots, |c_n|_x\} \leqslant 1,$$

所以 a 和 a^{-1} 都是 $(k(T), |\cdot|_x)$ 的赋值环上的整元. 由定理 4.2.1 知, 对任意 $x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)} \setminus Z$ 及任意 $y \in C_x^K$ 有 $|a|_y \leqslant 1$ 及 $|a^{-1}|_y \leqslant 1$. 若令 $S_a = \pi^{-1}(Z)$, 则有

$$\forall\, y \in C^{(1)} \setminus S_a, \quad |a|_y = 1.$$

另外, 由 (1) 知

$$\prod_{y \in C^{(1)}} |a|_y^{[K_y : k(T)_y]} = \prod_{x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}} |N_{K/k(T)}(a)|_x.$$

由定理 3.3.7 便得到要证的等式. □

4.4.2 超范数族及在有理函数域上的推出

定义 4.4.2. 设 E 为有限维 K-线性空间. 用 $\mathcal{H}_K(E)$ 来表示形如 $(\|\cdot\|_y)_{y\in C^{(1)}}$ 的范数族组成的集合, 其中 $\|\cdot\|_y$ 是线性空间 $E\otimes_K K_y$ 上的超范数. 如果 $\xi=(\|\cdot\|_y)_{y\in C^{(1)}}$ 是 $\mathcal{H}_K(E)$ 中的范数族, 对任意 $x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}$, 用 $\|\cdot\|_{\xi,x}$ 表示 $k(T)_x\otimes_{k(T)}E$ 上的范数, 在同构 (见推论 4.3.3)

$$k(T)_x\otimes_{k(T)}E\cong\bigoplus_{y\in C_x^K}K_y\otimes_K E$$

之下等同于如下范数

$$\left((s_y)_{y\in C_x^K}\in\bigoplus_{y\in C_x^K}K_y\otimes_K E\right)\longmapsto\max_{y\in C_x^K}\|s_y\|_y.$$

换句话说, $\|\cdot\|_{\xi,x}$ 是 $(\|\cdot\|_y)_{y\in C_x^K}$ 的正交直和 (见 §3.2.11). 我们用 $\mathrm{pr}_{C,*}(\xi)$ 和 $\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\xi)$ 分别表示 $\mathcal{H}_{k(T)}(E)$ 中的范数族 $(\|\cdot\|_{\xi,x})_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}}$ 和 $(\|\cdot\|_{\xi,x,\mathrm{pur}})_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}}$, 其中 $\|\cdot\|_{\xi,x,\mathrm{pur}}$ 是 $\|\cdot\|_{\xi,x}$ 的纯化 (见定义 3.2.22).

设 E 和 E' 为 K 上的有限维线性空间,

$$\xi=(\|\cdot\|_y)_{y\in C^{(1)}}\in\mathcal{H}_K(E),\quad \xi'=(\|\cdot\|'_y)_{y\in C^{(1)}}\in\mathcal{H}_K(E').$$

如果 $f:E\to E'$ 是 K-线性空间的同构, 使得对任意 $y\in C^{(1)}$ 以及任意 $s\in K_y\otimes_K E$ 有

$$\|f_{K_y}(s)\|'_y=\|s\|_y,$$

那么说 f 是从 ξ 到 ξ' 的**等距同构**.

例 4.4.3. 设 E 为有限维 K-线性空间,

$$\xi=(\|\cdot\|_y)_{y\in C^{(1)}}\in\mathcal{H}_K(E).$$

用 $\xi^\vee$ 表示范数族

$$(\|\cdot\|_{y,*})_{y\in C^{(1)}}\in\mathcal{H}_K(E),$$

其中 $\|\cdot\|_{y,*}$ 是 $\|\cdot\|_y$ 的对偶范数, 在同构

$$K_y\otimes_K E^\vee\cong(K_y\otimes_K E)^\vee$$

之下视为 $K_y\otimes_K E^\vee$ 上的范数. 类似地, 用 $\det(\xi)$ 表示范数族

$$(\|\cdot\|_{y,\det})_{y\in C^{(1)}}\in\mathcal{H}_K(\det(E)),$$

其中 $\|\cdot\|_{y,\det}$ 是

$$K_y \otimes_K \det(E) \cong \det(K_y \otimes_K E)$$

上的行列式范数.

设 M 为一维 K-线性空间, $\xi' = (\|\cdot\|'_y)_{y\in C^{(1)}}$ 为 $\mathcal{H}_M$ 中的元素. 用 $\xi\otimes\xi'$ 表示如下定义的范数族 $(\|\cdot\|''_y)_{y\in C^{(1)}} \in \mathcal{H}_K(E\otimes_K M)$, 其中 $\|\cdot\|''_y$ 是

$$K_y \otimes_K (E\otimes M) \cong (K_y\otimes_K E)\otimes_{K_y}(K_y\otimes_K M)$$

上的范数, 使得

$$\forall\,(s,\lambda)\in(K_y\otimes_K E)\times(K_y\otimes_K M),\quad \|s\otimes\lambda\|''_y = \|s\|_y\cdot\|\lambda\|'_y.$$

例 4.4.4. 我们用 $\omega_{K/k(T)}$ 表示一维 K-线性空间 $\mathrm{Hom}_{k(T)}(K,k(T))$. 对任意 $y\in C^{(1)}$, 用 $\|\cdot\|'_{\omega,y}$ 表示 $K_y\otimes_K\omega_{K/k(T)}$ 上的范数, 使得

$$\|\operatorname{Tr}_{K/k(T)}\|_{\omega,y} = \sup_{a\in K_y^{\times}}\frac{|\operatorname{Tr}_{K_y/k(T)_x}(a)|_x}{|a|_y},$$

其中 $x=\mathrm{pr}_C(y)$. 这样构造的范数族 $\omega_{C/\mathbb{P}^1_k} := (\|\cdot\|_y)_{y\in C^{(1)}}$ 是 $\mathcal{H}_K(\omega_{K/k(T)})$ 的元素. 类似地, 对任意 $x\in\mathbb{P}^{1,(1)}_k$ 及 $y\in C^K_x$, 令

$$\|\cdot\|'_{\omega,y} = \frac{|\varpi_x|_x}{|\varpi_y|_y}\|\cdot\|_{\omega,y},$$

其中 ϖ_x 和 ϖ_y 分别表示 $k(T)_x$ 和 K_y 的单值化子. 用 $\omega'_{C/\mathbb{P}^1_k}$ 表示范数族 $(\|\cdot\|'_{\omega,y})_{y\in C^{(1)}}$. 这也是 $\mathcal{H}_K(\omega_{K/k(T)})$ 中的元素.

注 4.4.5. 设 E 为 K 上的有限维线性空间, $\xi=(\|\cdot\|_y)_{y\in C^{(1)}}\in\mathcal{H}_K(E)$. 由命题 4.2.9 知

$$E^\vee\otimes_K\omega_{K/k(T)}\longrightarrow\mathrm{Hom}_{k(T)}(E,k(T)),\quad \alpha\otimes\varphi\longmapsto\varphi\circ\alpha \tag{4.26}$$

是 K-线性空间的同构, 也就是说, 任意 $\mathrm{Hom}_{k(T)}(E,k(T))$ 中的元素可以唯一地写成 $\operatorname{Tr}_{K/k(T)}\circ g$ 的形式, 其中 $g\in E^\vee$. 这样, 对任意 $x\in\mathbb{P}^{1,(1)}_k$ 以及任意 $y\in C^K_x$, 以下 K_y-线性映射是线性同构

$$\begin{array}{rcl} K_y\otimes_K\mathrm{Hom}_{k(T)}(E,k(T)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{k(T)_x}(E_y,k(T)_x),\\ \lambda\otimes(\operatorname{Tr}_{K/k(T)}\circ g) & \longmapsto & \operatorname{Tr}_{K_y/k(T)_x}\circ(\lambda g_y),\end{array}$$

其中 $g_y: E_y\to K_y$ 是 $g: E\to K$ 所诱导的 K_y-线性形式. 在 K_y-线性空间 $\mathrm{Hom}_{k(T)_x}(E_y,k(T)_x)$ 上考虑算子范数并通过上述同构诱导

$$K_y\otimes_K\mathrm{Hom}_{k(T)}(E,k(T))$$

上的一个范数 $\|\cdot\|'_{y,*}$. 用 ξ^* 表示范数族 $(\|\cdot\|'_{y,*})_{y\in C^{(1)}}$. 由命题 4.2.10 知 (4.26) 定义了从 $\xi^\vee\otimes\omega_{C/\mathbb{P}^1}$ 到 ξ^* 的等距同构.

假设所有的范数 $\|\cdot\|_y$ 都是纯范数 (或等价地, 每个赋超范线性空间 $(E_y,\|\cdot\|_y)$ 都具有标准正交基). 对任意 $x\in\mathbb{P}^{1,(1)}_k$, 推论 4.3.3 (1) 中的同构诱导 $k(T)_x$-线性同构

$$k(T)_x\otimes_{k(T)}E\cong\left(\prod_{y\in C_x^K}K_y\right)\otimes_K E\cong\prod_{y\in C_x^K}E_y,\tag{4.27}$$

进而诱导 $k(T)_x$-线性同构如下

$$\begin{array}{ccc}
k(T)_x\otimes_{k(T)}\mathrm{Hom}_{k(T)}(E,k(T)) & \xrightarrow{\psi_x^{(1)}} & \mathrm{Hom}_{k(T)_x}(k(T)_x\otimes_{k(T)}E,k(T)_x)\\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi_x^{(2)}}\\
\displaystyle\prod_{y\in C_x^K}\mathrm{Hom}_{k(T)_x}(E_y,k(T)_x) & \xleftarrow[\psi_x^{(3)}]{} & \mathrm{Hom}_{k(T)_x}\left(\displaystyle\prod_{y\in C_x^K}E_y,k(T)_x\right)
\end{array}\tag{4.28}$$

其中对任意 $g\in E^\vee$, $\psi_x^{(1)}$ 将

$$1\otimes(\mathrm{Tr}_{K/k(T)}\circ g)\in k(T)_x\otimes_{k(T)}\mathrm{Hom}_{k(T)}(E,k(T))\tag{4.29}$$

映为 $k(T)_x$-线性空间 $k(T)_x\otimes_{k(T)}E$ 上的线性泛函 (等式来自于 (4.25))

$$(\lambda\otimes s)\longmapsto\mathrm{Tr}_{K/k(T)}(g(s))=\sum_{y\in C_x^K}\mathrm{Tr}_{K_y/k(T)_x}(g_y(s)),$$

$\psi_x^{(2)}$ 由 (4.27) 诱导, $\psi_x^{(3)}$ 是自然同构. 用 ψ_x 表示 $k(T)_x$-线性同构 $\psi_x^{(3)}$, $\psi_x^{(2)}$ 和 $\psi_x^{(1)}$ 的复合. 依定义, (4.29) 在 ψ_x 下的像等于 $(\mathrm{Tr}_{K_y/k(T)_x}\circ g_y)_{y\in C_x^K}$.

对任意 $x\in\mathbb{P}^{1,(1)}_k$ 及任意 $y\in C_x^K$, 用 $\|\cdot\|'_y$ 表示 K_y-线性空间

$$\mathrm{Hom}_{K_y}(E_y,K_y)\otimes_{K_y}\omega_{K_y/k(T)_x}$$

上如下定义的范数 ($\|\cdot\|'_{\omega,y}$ 的构造见例 4.4.4):

$$\forall\,(\alpha,f)\in\mathrm{Hom}_{K_y}(E_y,K_y)\otimes_{K_y}\omega_{K_y/k(T)_x},\quad\|\alpha\otimes f\|'_y=\|\alpha\|_y\cdot\|f\|'_{\omega,y}.$$

用 $\|\cdot\|'_{y,\mathrm{pur}_K}$ 表示将 $\mathrm{Hom}_{K_y}(E_y,K_y)\otimes_{K_y}\omega_{K_y/k(T)_x}$ 视为 $k(T)_x$-线性空间时范数 $\|\cdot\|'_y$ 的纯化. 由注 4.2.11 知映射

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{K_y}(E_y,K_y)\otimes_{K_y}\omega_{K_y/k(T)_x} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{k(T)_x}(E_y,k(T)_x)\\
(\alpha,f) & \longmapsto & f\circ\alpha
\end{array}$$

视为 $k(T)_x$-线性同构时是从 $\|\cdot\|'_{y,\mathrm{pur}_K}$ 到 $\|\cdot\|_{y,\mathrm{pur}_K,*}$ 的等距同构, 其中 $\|\cdot\|_{y,\mathrm{pur}_K}$ 是将 $\mathrm{Hom}_{k(T)_x}(E_y,k(T)_x)$ 视为 $k(T)_x$-线性空间时范数 $\|\cdot\|_x$ 的纯化. 所以 (4.26) 视为 $k(T)$-线性空间的同构是从 $\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\xi^\vee\otimes\omega'_{C/\mathbb{P}^1})$ 到 $\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\xi)^\vee$ 的等距同构.

4.4.3 算术向量丛

定义 4.4.6. 所谓 K 上的**算术向量丛**, 是指形如 $\overline{E}=(E,\xi)$ 的数学对象, 其中 E 是有限维 K-线性空间, $\xi=(\|\cdot\|_y)_{y\in C^{(1)}}\in\mathcal{H}_K(E)$, 满足如下条件:

(1) 对任意 $y\in C^{(1)}$, 赋超范线性空间 $(E_y,\|\cdot\|_y)$ 具有一组标准正交基, 也就是说每个范数 $\|\cdot\|_y$ 都是纯范数 (见 §3.2.12);

(2) 存在 E 的一组基 $(e_i)_{i=1}^r$ 以及 $C^{(1)}$ 的有限子集 S, 使得对任意 $y\in C^{(1)}\setminus S$, $(e_i)_{i=1}^r$ 都是 $(E_y,\|\cdot\|_y)$ 的标准正交基.

如果 E 是 K 上的一维线性空间, 那么则说 $\overline{E}$ 是 K 上的**算术线丛**.

与例 3.4.1 类似, 如果 $\overline{E}=(E,\xi)$ 是 K 上的算术向量丛, 那么 $(E^\vee,\xi^\vee)$ 组成 K 上的算术向量丛, 记作 $\overline{E}^\vee$. 另外, $(\det(E),\det(\xi))$ 构成 K 上的算术线丛, 记作 $\det(\overline{E})$. 如果 $\overline{E}=(E,\xi)$ 是 K 上的算术向量丛, $\overline{M}=(M,\xi')$ 是 K 上的算术线丛, 那么 $(E\otimes M,\xi\otimes\xi')$ 构成 K 上的算术向量丛, 记作 $\overline{E}\otimes\overline{M}$.

命题 4.4.7. (1) $\overline{K}=(K,(|\cdot|_y)_{y\in C^{(1)}})$ 是 K 上的算术线丛.

(2) 假设 $\overline{E}=(E,\xi)$ 是 K 上的算术向量丛, 其中 $\xi=(\|\cdot\|_y)_{y\in C^{(1)}}$. 对任意 $x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}$, 用 $\|\cdot\|_{\xi,x,\mathrm{pur}}$ 表示范数 $\|\cdot\|_{\xi,x}$ 的纯化. 那么

$$\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{E})=(E,(\|\cdot\|_{\xi,x,\mathrm{pur}})_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}})$$

是 $k(T)$ 上的算术向量丛.

(3) $(\omega_{K/k(T)},\omega_{C/\mathbb{P}_k^1})$ 和 $(\omega_{K/k(T)},\omega'_{C/\mathbb{P}_k^1})$ 都是 K 上的算术线丛.

证明: (1) 对任意 $y\in C^{(1)}$, $\{1\}$ 构成了 $(K_y,|\cdot|_y)$ 的标准正交基.

(2) 设 $(s_i)_{i=1}^r$ 为 E 在 K 上的一组基, S 为 $\mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 的有限子集, 使得对任意 $x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}\setminus S$ 及任意 $y\in C_x^K$, $(s_i)_{i=1}^r$ 为 $(K_y\otimes_K E,\|\cdot\|_y)$ 的标准正交基. 任取 K 在 $k(T)$ 上的一组基 $(a_j)_{j=1}^n$. 这样

$$\boldsymbol{e}=(a_js_i)_{(i,j)\in\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,n\}}$$

是 E 在 $k(T)$ 上的一组基. 令 $(s_i^\vee)_{i=1}^r$ 为 $(s_i)_{i=1}^r$ 在 $E^\vee = \mathrm{Hom}_K(E,K)$ 中的对偶基. 令 $(a_j^\vee)_{j=1}^n$ 为 $(a_j)_{j=1}^n$ 在对偶 $k(T)$-线性空间 $\mathrm{Hom}_{k(T)}(K,k(T))$ 中的对偶基. 对任意 $j\in\{1,\ldots,n\}$, 令 a_j^* 为 L 中唯一的使得

$$a_j^\vee = \mathrm{Tr}_{K/k(T)}(a_j^*\,\cdot)$$

的元素. 这样

$$\mathrm{Tr}_{K/k(T)}(a_j^* s_i^\vee(\cdot)),\quad (i,j)\in\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,n\}$$

构成 $\boldsymbol{e}$ 在 $\mathrm{Hom}_{k(T)}(E,k(T))$ 中的对偶基. 由注 4.4.5 知, 对任意 $x\in\mathbb{P}_K^{1,(1)}$ 有

$$\|\,\mathrm{Tr}_{K/k(T)}(a_j^* s_i^\vee(\cdot))\|_{x,*} = \max_{y\in C_x^K} |a_j^*|_y\cdot\|s_i^\vee\|_{y,*}\cdot\|\,\mathrm{Tr}_{K_y/k(T)_x}\|_{\omega,y}. \tag{4.30}$$

对任意 $y\in C_x^K$, 由注 4.2.2 知, 对任意 $b\in K_y$ 及任意

$$\sigma\in\mathrm{Hom}_{k(T)_x\text{-alg}}(K_y,k(T)_x^{\mathrm{ac}})$$

有 $|\sigma(b)|_x=|b|_y$. 从而由等式 (A.6) 和强三角形不等式推出

$$|\,\mathrm{Tr}_{K_y/k(T)_x}(b)|_x\leqslant |b|_y.$$

这说明对任意 $y\in C^{(1)}$ 有 $\|\,\mathrm{Tr}_{L/K}\|_{\omega,y}\leqslant 1$. 这样便从 (4.30) 推出

$$\|\,\mathrm{Tr}_{K/k(T)}(a_j^* s_i^\vee(\cdot))\|_{x,*}\leqslant \max_{y\in C_x^K}|a_j^*|_y\cdot\|s_i^\vee\|_{y,*}.$$

由命题 4.4.1 知存在 $\mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 的某包含 S 的有限子集 S', 使得对任意 $(i,j)\in\{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,n\}$ 以及任意 $x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}\setminus S'$ 有

$$\|a_js_i\|_x=\max_{y\in C_x^K}|a_j|_y\cdot\|s_i\|_y=1,$$

$$\|\,\mathrm{Tr}_{K/k(T)}(a_j^* s_i^\vee(\cdot))\|_{x,*}\leqslant 1.$$

这样由注 3.2.13 得出 $\boldsymbol{e}$ 是 $(E\otimes_{k(T)}k(T)_x,\|\cdot\|_x)$ 的标准正交基.

(3) 令 $(a_j)_{j=1}^n$ 为 K 在 $k(T)$ 上的一组基, $(a_j^*)_{j=1}^n$ 为其相对于非退化双线性形式

$$(a,b)\longmapsto \mathrm{Tr}_{K/k(T)}(ab)$$

的对偶基. 设 S 为 $\mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 的有限子集, 使得对任意 $x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}$ 来说 $(a_j)_{j=1}^n$ 都是 $k(T)_x\otimes_{k(T)}K$ 的标准正交基 (这同时也说明对任意 $y\in C_x^K$ 来说 L_y 是

K_x 的非分歧扩张), 并且从 $(a_j^*)_{j=1}^n$ 到 $(a_j)_{j=1}^n$ 的转移矩阵是 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)$ 中的元素. 对这样的 x 来说线性映射

$$\begin{array}{rcl} k(T)_x \otimes_{k(T)} K & \longrightarrow & k(T)_x \otimes_{k(T)} \mathrm{Hom}_{k(T)}(K, k(T)) \\ \lambda \otimes b & \longmapsto & \lambda \otimes \mathrm{Tr}_{K/k(T)}(b\,\cdot) \end{array}$$

将标准正交基 $(a_j)_{j=1}^n$ 映为一组标准正交基, 所以是等距同构. 若将上述映射的定义域和值域分别写成正交直和的形式 (见 (4.28))

$$k(T)_x \otimes_{k(T)} K \cong \bigoplus_{y \in C_x^K} K_y,$$
$$k(T)_x \otimes_{k(T)} \mathrm{Hom}_{k(T)}(K, k(T)) \cong \bigoplus_{y \in C_x^K} \mathrm{Hom}_{k(T)_x}(K_y, k(T)_x),$$

那么该映射将 $b \in K_y$ 映为 $\mathrm{Tr}_{K_y/k(T)_x}(b\,\cdot)$, 并且诱导等距同构

$$K_y \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k(T)_x}(K_y, k(T)_x).$$

从而 $\|\mathrm{Tr}_{K/k(T)}\|_{\omega,y} = 1$. □

4.4.4 Arakelov 度数

定义 4.4.8. 若 $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_y)_{y \in C})$ 是 K 上的算术向量丛, 定义 $\overline{E}$ 的 Arakelov **度数**为

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) = -\sum_{y \in C^{(1)}} [K_y : k(T)_y] \frac{\ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_{y,\det}}{\ln(q)}$$

定义 4.4.9. 设 $\overline{F} = (F, (\|\cdot\|_x)_{x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}})$ 为 $k(T)$ 上的算术向量丛. 用 $\mathrm{pr}_C^*(\overline{F})$ 来表示

$$(K \otimes_{k(T)} F, (\|\cdot\|_{\mathrm{pr}_C(y), K_y})_{y \in C^{(1)}}).$$

由命题 4.2.4 (1) 和 (2) 知 $\mathrm{pr}_C^*(\overline{F})$ 是 K 上的算术向量丛.

命题 4.4.10. 设 $\overline{F} = (F, (\|\cdot\|_x)_{x \in \mathbb{P}_k^{1,(1)}})$ 为 $k(T)$ 上的算术向量丛. 等式

$$\widehat{\deg}(\mathrm{pr}_C^*(\overline{F})) = [K : k(T)]\,\widehat{\deg}(\overline{F})$$

成立.

证明: 若 $(s_i)_{i=1}^r$ 是 F 在 $k(T)$ 上的一组基, 那么由命题 4.2.4 (4) 和等式 (4.23) 知

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(\mathrm{pr}_C^*(\overline{F})) &= -\sum_{y\in C}[K_y : k(T)_{\mathrm{pr}_C(y)}]\frac{\ln\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_{\mathrm{pr}_C(y),\det}}{\ln(y)} \\ &= -[K:k(T)]\sum_{x\in\mathbb{P}_k^{1,(1)}}\frac{\ln\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_{x,\det}}{\ln(q)} \\ &= [K:k(T)]\,\widehat{\deg}(\overline{F}).\end{aligned}\tag{4.31}$$

□

4.4.5 曲线的 Riemann-Roch 定理

定义 4.4.11. 设 $\overline{E}=(E,(\|\cdot\|_y)_{y\in C})$ 为 K 上的算术向量丛. 用 $\widehat{H}^0(\overline{E})$ 来表示集合

$$\{s\in E\mid \forall\, y\in C^{(1)},\ \|s\|_y\leqslant 1\}.$$

这样 $\widehat{H}^0(\overline{E})=\widehat{H}^0(\mathrm{pr}_{C,*}(\overline{E}))=\widehat{H}^0(\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{E}))$, 从而是有限维 k 线性空间. 另外用 $\overline{\omega_{K/k}}'$ 来表示

$$(\omega_{K/k(T)},\omega'_{C/\mathbb{P}_k^1})\otimes\mathrm{pr}_C^*(\overline{\omega_{k(T)/k}}).$$

定理 4.4.12 (**曲线的** Riemann-Roch **定理**)**.** 对任意 K 上的算术向量丛 $\overline{E}$, 以下等式成立

$$\dim_k(\widehat{H}^0(\overline{E}))-\dim_k(\widehat{H}^0(\overline{E}^\vee\otimes\overline{\omega_{K/k}}'))=\widehat{\deg}(\overline{E})+\dim_K(E)(1-g(K/k)),$$

其中

$$g(K/k)=\frac{1}{2}\widehat{\deg}(\overline{\omega_{K/k}}')+1.$$

证明: 由注 4.4.5 知有如下等距同构

$$\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{E}^\vee\otimes\overline{\omega_{K/k(T)}}')\cong\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{E})^\vee.$$

从而

$$\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{E}^\vee\otimes\overline{\omega_{K/k}}')\cong\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{E})^\vee\otimes\overline{\omega_{k(T)/k}}.$$

这样由定理 3.19 便推出

$$\dim_k(\widehat{H}^0(\overline{E}))-\dim_k(\widehat{H}^0(\overline{E}^\vee\otimes\overline{\omega_{K/k}}'))=\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{E}))+\dim_{k(T)}(E).$$

而由注 4.2.7 知

$$\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{E})) = \widehat{\deg}(\overline{E}) + \dim_K(E) \cdot \widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{K})).$$

这样从上式便推出

$$\begin{aligned}&\dim_k(\widehat{H}^0(\overline{E})) - \dim_k(\widehat{H}^0(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega_{K/k}}'))\\ =\,&\widehat{\deg}(\overline{E}) + \dim_K(E)\,\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{K})) + \dim_{k(T)}(E)\\ =\,&\widehat{\deg}(\overline{E}) + \dim_K(E)(\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{K})) + [K : k(T)]).\end{aligned}$$

最后, 将这个等式分别应用于 $\overline{E} = \overline{K}$ 和 $\overline{E} = \overline{\omega_{K/k}}'$ 的情形, 得到

$$\widehat{\deg}(\overline{\omega_{K/k}}') + \widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{K})) + [K : k(T)] = -\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{K})) - [K : k(T)].$$

从而

$$\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{C,*}(\overline{K})) + [K : k(T)] = -\frac{1}{2}\deg(\overline{\omega_{K/k}}').$$

定理于是得证. □

5 代数数域的几何

算术基本定理说明, 任意正整数可以分解成素因子的乘积, 并且在不考虑素因子顺序的前提下分解是唯一的. 从而任意非零有理数 x 可以分解为

$$x = \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{\mathrm{ord}_p(x)}, \tag{5.1}$$

其中 $\mathscr{P}$ 表示所有素数组成的集合, $\mathrm{ord}_p(x) \in \mathbb{Z}$, 并且除了有限多个素数以外有 $\mathrm{ord}_p(x) = 0$ (从而上式中的无穷乘积实际上应该视为满足 $\mathrm{ord}_p(x) \neq 0$ 的那些项的有限乘积). 约定 $\mathrm{ord}_p(0) = +\infty$ 后, $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ 构成 $\mathbb{Q}$ 上的离散赋值. 特别地, 对任意 $(x, y) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 如下关系成立

$$\mathrm{ord}_p(xy) = \mathrm{ord}_p(x) + \mathrm{ord}_p(y), \quad \mathrm{ord}_p(x+y) \geqslant \min\{\mathrm{ord}_p(x), \mathrm{ord}_p(y)\}.$$

用 $|\cdot|_p$ 表示映射

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad |x|_p := p^{-\mathrm{ord}_p(x)}.$$

上述关系说明了 $|\cdot|_p$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的绝对值, 称为 p-**进绝对值**. 另外, 用 $|\cdot|_\infty$ 表示 $\mathbb{Q}$ 上通常的绝对值. 这样, 非零有理数的素因子分解 (5.1) 说明

$$\forall\, x \in \mathbb{Q}^\times, \quad |x|_\infty \cdot \prod_{p\in\mathscr{P}} |x|_p = 1. \tag{5.2}$$

这个等式称为有理数域的**乘积公式**.

5.1 代数数域上的算术向量丛

本节中固定一个有理数域 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张 K. 用 S_K 表示延拓 $\mathbb{Q}$ 上通常的绝对值 $|\cdot|_\infty$ 或某 p-进绝对值 $|\cdot|_p$ 的所有 K 上的绝对值构成的集合. 如果 v 是 S_K 中的元素, 有时也用 $|\cdot|_v$ 来表示绝对值 v. 这样 $S_{\mathbb{Q}}$ 与 $\mathscr{P}\cup\{\infty\}$ 之间有自然的一一对应, 为叙述方便, 下文中不时将集合 $S_{\mathbb{Q}}$ 等同于 $\mathscr{P}\cup\{\infty\}$. 对任意 $p\in\mathscr{P}\cup\{\infty\}$, 如果 K 上的绝对值 v 延拓 $\mathbb{Q}$ 上的绝对值 $|\cdot|_p$, 则记 $v\mid p$ 并用 K_v 表示域 K 相对于绝对值 v 的完备化, 有时为了方便也用 $\mathbb{Q}_v$ 来表示 $\mathbb{Q}$ 相对于 $|\cdot|_p$ 的完备化. 用 $S_{K,p}$ 来表示

$$\{v\in S_K\mid v\mid p\}.$$

这样 $S_{K,p}$ 是基数不超过 $[K:\mathbb{Q}]$ 的有限集, 并且 S_K 是 $S_{K,p}$ $(p\in\mathscr{P}\cup\{\infty\})$ 的无交并. 我们记

$$S_{K,\mathrm{fin}}=\bigcup_{p\in\mathscr{P}}S_{K,p}.$$

另外, 用 $\mathrm{pr}_K:S_K\to S_{\mathbb{Q}}=\mathscr{P}\cup\{\infty\}$ 表示将 $S_{K,p}$ 中的元素映为 p 的投影映射.

定义 5.1.1. 设 E 为有限维 K-线性空间. 用 $\mathcal{H}_K(E)$ 表示形如 $(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}$ 的范数族组成的集合, 其中当 $v\nmid\infty$ 时 $\|\cdot\|_v$ 是 $K_v\otimes_K E$ 上的超范数, 当 $v\mid\infty$ 时 $\|\cdot\|_v$ 是 $K_v\otimes_K E$ 上由内积诱导的范数. 设 E 和 E' 为两个有限维 K-线性空间,

$$\xi=(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}\in\mathcal{H}_K(E),\quad \xi'=(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}\in\mathcal{H}_K(E').$$

如果 $f:E\to E'$ 是 K-线性同构, 使得对任意 $v\in S_K$ 有

$$\forall\, s\in K_v\otimes_K E,\quad \|f_{K_v}(s)\|_v'=\|s\|_v,$$

那么说 f 是从 (E,ξ) 到 (E',ξ') 的**等距同构**, 或简单地说 f 是从 ξ 到 ξ' 的等距同构.

所谓 K 上的**算术向量丛**, 是指形如 $\overline{E}=(E,(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K})$ 的数学对象, 其中 E 是有限维 K-线性空间, $(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}\in\mathcal{H}_K(E)$, 满足以下条件:

(1) 对任意 $v\in S_K$, $(E_v,\|\cdot\|_v)$ 具有标准正交基,

(2) 存在 S_K 的有限子集 S 以及 E 在 K 上的一组基 $(e_i)_{i=1}^r$, 使得对任意 $v\in S_K\setminus S$, $(e_i)_{i=1}^r$ 是 $(E_v,\|\cdot\|_v)$ 的标准正交基.

当 E 是一维 K-线性空间时, 算术向量丛 $\overline{E}$ 也称为**算术线丛**.

上节中介绍的关于有理函数域的一些构造和结论同样适用于代数数域. 证明的方法基本相同. 以下将在代数数域的框架解释这些构造和结论并指明与上节中内容的联系, 证明的细节留给读者.

5.1.1 对偶, 行列式丛和张量积

设 E 为 K 上有限维线性空间, $\xi = (\|\cdot\|_v)_{v\in S_K} \in \mathcal{H}_K(E)$. 我们用 $\xi^\vee$ 来表示对偶范数族 $(\|\cdot\|_{v,*})_{v\in S_K} \in \mathcal{H}_K(E^\vee)$, 用 $\det(\xi)$ 来表示行列式范数族 $(\|\cdot\|_{v,\det})_{v\in S_K} \in \mathcal{H}_K(\det(E))$. 如果 $\overline{E} = (E,\xi)$ 是 K 上的算术向量丛, 那么 $\overline{E}^\vee := (E,\xi^\vee)$ 是 K 上的算术向量丛, $\det(\overline{E}) := (\det(E),\det(\xi))$ 是 K 上的算术线丛. 另外, 如果 M 是一维 K-线性空间, $\xi' = (\|\cdot\|'_v)_{v\in S_K} \in \mathcal{H}_K(M)$, 那么如下定义的范数族 $(\|\cdot\|''_v)_{v\in S_K}$ 是 $\mathcal{H}_K(E\otimes_K M)$ 中的元素:

$$\forall\,(s,\ell)\in E_v\times M_v,\quad \|s\otimes\ell\|''_v = \|s\|_v\cdot\|\ell\|'_v.$$

我们将这个范数族记作 $\xi\otimes\xi'$. 如果 $\overline{E} = (E,\xi)$ 和 $\overline{M} = (M,\xi')$ 分别是 K-上的算术向量丛和算术线丛, 那么 $\overline{E}\otimes\overline{M} := (E\otimes_K M, \xi\otimes\xi')$ 是 K 上的算术向量丛. 读者可以参考例 3.4.1 和定义 4.4.6 下方的段落.

5.1.2 在 $\mathbb{Q}$ 上的推出

设 E 为 K 上的有限维 K-线性空间, $\xi = (\|\cdot\|_v)_{v\in S_K} \in \mathcal{H}_K(E)$. 对任意 $p\in S_{\mathbb{Q}} = \mathscr{P}\cup\{\infty\}$, $\mathbb{Q}_p$-代数同构 (见推论 4.3.3)

$$\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Q}} K \longrightarrow \prod_{v\in S_{K,p}} K_v$$

诱导了 $\mathbb{Q}_p$-线性空间的同构

$$\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Q}} E \longrightarrow \bigoplus_{v\in S_{K,p}} E_v.$$

用 $\|\cdot\|_{\xi,p}$ 表示如下定义的 $\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Q}} E \cong \bigoplus_{v\in S_{K,p}} E_v$ 上的范数:

$$\forall\, s = (s_v)_{v\in S_{K,p}} \in \bigoplus_{v\in S_{K,p}} E_v,\quad \|s\|_{\xi,p} := \begin{cases} \displaystyle\max_{v\in S_{K,p}} \|s_v\|_v, & p\in\mathscr{P} \\ \displaystyle\Big(\sum_{v\in S_{K,\infty}} \|s_v\|_v^2\Big)^{1/2}, & p=\infty, \end{cases}$$

并用 $\mathrm{pr}_{K,*}(\xi)$ 表示范数族 $(\|\cdot\|_{\xi,p})_{p\in S_{\mathbb{Q}}}\in\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(E)$. 如果 (E,ξ) 是 K 上的算术向量丛, 用 $\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\xi)$ 表示 $(\|\cdot\|_{\xi,p,\mathrm{pur}})_{p\in S_{\mathbb{Q}}}$ (见定义 3.2.22). 那么 $(E,\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\xi))$ 构成 $\mathbb{Q}$ 上的算术向量丛, 称为 E 在 $\mathbb{Q}$ 上的**推出**, 有时也记作 $\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(E,\xi)$. 读者可以参考命题 4.4.7.

5.1.3 对偶化丛

用 $\omega_{K/\mathbb{Q}}$ 来表示一维 K-线性空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,\mathbb{Q})$. 对任意 $v\in S_K$, 用 $\|\cdot\|_{\omega,v}$ 表示 $\omega_{K/\mathbb{Q}}\otimes_K K_v$ 上的范数, 使得对任意 $p\in\mathscr{P}\cup\{\infty\}$ 及任意 $v\in S_{K,p}$ 有

$$\|\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\otimes 1\|_{\omega,v}=\sup_{a\in K_v^{\times}}\frac{|\operatorname{Tr}_{K_v/\mathbb{Q}_p}(a)|_p}{|a|_v}.$$

这样

$$(\omega_{K/\mathbb{Q}},(\|\cdot\|_{\omega,v})_{v\in S_K})$$

是 K 上的算术线丛. 范数族 $(\|\cdot\|_{\omega,v})_{v\in S_K}$ 记作 $\xi_{\omega_{K/\mathbb{Q}}}$. 类似地, 对任意 $p\in\mathscr{P}\cup\{\infty\}$ 及任意 $v\in S_{K,p}$, 令

$$\|\cdot\|'_{\omega,v}:=\frac{|\varpi_v|_v}{|p|_p}\|\cdot\|_{w,v},$$

其中 ϖ_v 表示 K_v 的单值化子. 用 $\xi'_{\omega_{K/\mathbb{Q}}}$ 表示范数族 $(\|\cdot\|'_{\omega,v})_{v\in S_K}$. 除了有限多个 $v\in S_K$ 以外有 $\|\cdot\|'_{\omega,v}=\|\cdot\|_{\omega,v}$, 并且 $(\omega_{K/\mathbb{Q}},\xi'_{\omega_{K/\mathbb{Q}}})$ 也是 K 上的算术线丛.

5.1.4 对偶性

设 E 为有限维 K-线性空间. 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{Q})$ 在运算

$$K\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{Q})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{Q}),\quad (a,f)\longmapsto f(a\,\cdot)$$

之下构成一个 K-线性空间, 其维数等于 E 在 K 上的维数. 另外, 由命题 4.2.9 知映射

$$E^{\vee}\otimes_K\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,\mathbb{Q})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{Q}),\quad (g,\varphi)\longmapsto\varphi\circ g$$

是 K-线性同构. 换句话说, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{Q})$ 中的元素可以唯一地写成 $\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\circ g$ 的形式, 其中 $g\in E^{\vee}$. 这样, 对任意 $v\in S_K$, 以下 K_v-线性映射是线性同构:

$$\begin{aligned}K_v\otimes_K\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{Q})&\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_v}(K_v\otimes_K E,\mathbb{Q}_v),\\ \lambda\otimes(\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\circ g)&\longmapsto\operatorname{Tr}_{K_v/\mathbb{Q}_v}\circ(\lambda g_{K_v}),\end{aligned}$$

其中 $g_{K_v}: K_v \otimes_K E \to K_v$ 是 $g \in E^\vee$ 诱导的 K_v-线性形式.

给定 $\xi = (\|\cdot\|_v)_{v \in S_K} \in \mathcal{H}_K(E)$. 赋 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_v}(K_v \otimes_K E, \mathbb{Q}_v)$ 以算子范数并通过上述线性同构诱导 $K_v \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{Q})$ 上的范数 $\|\cdot\|_{v,*}^{\mathbb{Q}}$. 这样

$$(\|\cdot\|_{v,*}^{\mathbb{Q}})_{v \in S_K} \in \mathcal{H}_K(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{Q})),$$

并且等式

$$\mathrm{pr}_{K,*}((\|\cdot\|_{v,*}^{\mathbb{Q}})_{v \in S_K}) = \mathrm{pr}_{K,*}(\xi)^\vee$$

成立. 另外映射

$$E^\vee \otimes_K \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{Q}), \quad (\alpha \otimes f) \longmapsto f \circ \alpha$$

定义了从 $\mathrm{pr}_{K,*}(\xi^\vee \otimes \xi_{\omega_{K/\mathbb{Q}}})$ 到 $\mathrm{pr}_{K,*}(\xi)^\vee$ 的等距同构 (见命题 4.2.10). 类似地, 该映射定义了从 $\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\xi^\vee \otimes \xi'_{\omega_{K/\mathbb{Q}}})$ 到 $\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\xi)^\vee$ 的等距同构.

5.1.5 Euclid 网格

设 $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_p)_{p \in \mathscr{P} \cup \{\infty\}})$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的算术向量丛. 令

$$\mathcal{E} = \{s \in E \mid \sup_{p \in \mathscr{P}} \|s\|_p \leqslant 1\}.$$

用定理 3.4.3 的方法可以证明, $\mathcal{E}$ 是自由 $\mathbb{Z}$-模, 其秩等于 $\dim_{\mathbb{Q}}(E)$, 并且 $\mathcal{E}$ 的任意一组整基在赋超范线性空间 $(E_p, \|\cdot\|_p)$ 中都是标准正交基, 其中 $p \in \mathscr{P}$. 但定理 3.4.3 的第二个结论对于有理数域并不成立: 一般不能保证存在 $\mathcal{E}$ 的整基是 $(E_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 的正交基. 这样 $\mathcal{E}$ 是 Euclid 空间 $(E_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 中的离散子群并且是实线性空间 E_∞ 的生成元组, 也就是说 $\mathcal{E}$ 是 $(E_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 中的 Euclid 网格.

5.1.6 乘积公式和 Arakelov 度数

与命题 4.4.1 类似, 从有理数域 $\mathbb{Q}$ 的乘积公式 (5.2) 出发可以推出一般代数数域上的乘积公式: 对任意 $a \in K^\times$, 存在 S_K 的有限子集 S_a, 使得对任意 $v \in S_K \setminus S_a$ 有 $|a|_v = 1$, 并且下列等式成立

$$\prod_{v \in S_K} |a|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]} = 1. \tag{5.3}$$

设 $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in S_K})$ 为 K 上的算术向量丛. 定义 $\overline{E}$ 的 Arakelov **度数**为

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) := -\sum_{v \in S_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \ln \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{v,\det},$$

其中 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 E 作为 K-线性空间的一组基. 由上述乘积公式 (5.3) 知 $\widehat{\deg}(\overline{E})$ 的值与 $(e_i)_{i=1}^r$ 的选择无关. 另外, 由等式 (3.11) 知

$$\widehat{\deg}(\overline{E}^\vee) = -\widehat{\deg}(\overline{E}). \tag{5.4}$$

假设 $K = \mathbb{Q}$,

$$\mathcal{E} = \{s \in E \mid \sup_{p \in \mathscr{P}} \|s\|_p \leqslant 1\}$$

是 $\overline{E}$ 对应的 Euclid 网格, 那么 $\exp(-\widehat{\deg}(\overline{E}))$ 的值等于 Euclid 网格 $\mathcal{E} \subset (E_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 的余体积, 也就是说

$$\exp(-\widehat{\deg}(\overline{E})) = \mathrm{vol}\left(\{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in [0,1[^r\}\right),$$

其中 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 $\mathcal{E}$ 的任一组整基.

5.2 数域的 Riemann-Roch 定理

5.2.1 有理数域的情形

考虑 $\mathbb{Q}$ 上的一个算术向量丛

$$\overline{E} = (E, \xi) = (E, (\|\cdot\|_p)_{p \in \mathscr{P} \cup \{\infty\}})$$

并用

$$\mathcal{E} = \{s \in E \mid \sup_{p \in \mathscr{P}} \|s\|_p \leqslant 1\}$$

来表示 $\overline{E}$ 所对应的 $(E_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 中的 Euclid 网格.

对任意 E_∞ 的子集 A, 用 $\rho(A)$ 表示

$$\sum_{x \in A} \exp\left(-\pi \|x\|_\infty^2\right) \in [0, +\infty].$$

特别地, $\rho(\mathcal{E})$ 又记作 $\Theta(\overline{E})$, 称为算术向量丛 $\overline{E}$ 的 Θ **级数**.

命题 5.2.1. 对任意 $x \in E_\infty$ 有 $\rho(\mathcal{E} + x) < +\infty$, 其中

$$\mathcal{E} + x := \{u + x \mid u \in \mathcal{E}\}.$$

另外, 函数 $\rho_{\mathcal{E}} : E_\infty \to \mathbb{R}, x \mapsto \rho(\mathcal{E} + x)$ 是 E_∞ 上的光滑 $\mathcal{E}$-周期函数.

证明: 令 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 $\mathcal{E}$ 的一组整基. 由范数等价性知存在常数 $c>0$ 使得

$$\forall\,(a_1,\ldots,a_r)\in\mathbb{R}^r,\quad \|a_1e_1+\cdots+a_re_r\|^2\geqslant c(a_1^2+\cdots+a_r^2).$$

这样对任意 $x=b_1e_1+\cdots+b_re_r\in E_\infty$ 有

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{E}+x)&\leqslant\sum_{(a_1,\ldots,a_r)\in\mathbb{Z}^r}\exp\Big(-c\pi\big((a_1+b_1)^2+\cdots+(a_r+b_r)^2\big)\Big)\\&=\prod_{\ell=1}^r\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}}\exp\big(-c\pi(a+b_\ell)^2\big)\right)<+\infty.\end{aligned}$$

由定义立即得到函数 $\rho_{\mathcal{E}}(\cdot)$ 的 $\mathcal{E}$ 周期性. 最后, $\rho_{\mathcal{E}}$ 作为函数项级数, 其任意阶偏导数都形如

$$\sum_{u\in\mathcal{E}}P(u+x)\exp(\pi\|u+x\|_\infty^2),\tag{5.5}$$

其中 $P(\cdot)$ 是 E_∞ 上的多项式函数. 对任意 $\delta>0$, 存在常数 $C_P>0$ 使得不等式 $|P(y)|\leqslant C_P\exp(\delta\|y\|^2)$ 对于任意 $y\in E_\infty$ 成立. 从而级数 (5.5) 在 E_∞ 上一致收敛. 这说明了 $\rho_{\mathcal{E}}$ 在 E_∞ 上是光滑函数. □

命题 5.2.2. 对任意 $\alpha\in E_\infty^\vee$, 以下等式成立

$$\int_{E_\infty}\exp\big(-\pi\|x\|^2-2\pi\alpha(x)\sqrt{-1}\big)\,\mathrm{d}x=\exp(-\pi\|\alpha\|_{\infty,*}^2),\tag{5.6}$$

其中 $\mathrm{d}x$ 表示 E_∞ 上的 Lebesgue 测度, 使得 $(E_\infty,\|\cdot\|_\infty)$ 的标准正交基张成的平行超多面体的测度等于 1.

证明: 证明中将用到以下等式

$$\int_{\mathbb{R}}\exp(-\pi t^2-2\pi\theta t\sqrt{-1})\,\mathrm{d}t=\exp(-\pi\theta^2).\tag{5.7}$$

这个等式可以通过考虑复变函数 $z\mapsto\exp(-\pi z^2)$ 在复平面中连接 $-R$, R, $R+\theta\sqrt{-1}$, $-R+\theta\sqrt{-1}$, $-R$ 的折线围道上的积分 $(R>0)$, 令 R 趋于无穷并利用等式

$$\int_{\mathbb{R}}\exp(-\pi t^2)\,\mathrm{d}t=1$$

而得出. 这个等式同时也证明了 $\alpha=0$ 的情形之下的等式 (5.6).

以下假设 α 是非零线性形式. 由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 $y\in E_\infty$ 使得

$$\forall\,x\in E_\infty,\quad \alpha(x)=\langle y,x\rangle_\infty,$$

其中 $\langle\ ,\ \rangle_\infty$ 是 Euclid 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 所对应的内积. 在 E_∞ 上取一组包含 $\|y\|_\infty^{-1}y$ 的标准正交基将 E_∞ 等同于 $\mathbb{R}^r$, 从 Fubini 定理推出

$$\begin{aligned}&\int_{E_\infty}\exp\big(-\pi\|x\|^2-2\pi\alpha(x)\sqrt{-1}\big)\,\mathrm{d}x\\ &=\bigg(\int_{\mathbb{R}}\exp(-\pi t^2)\,\mathrm{d}t\bigg)^{n-1}\int_{\mathbb{R}}\exp(-\pi t^2-2\pi t\|y\|_\infty\sqrt{-1})\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这样由等式 (5.7) 和关系 $\|y\|_\infty=\|\alpha\|_{\infty,*}$ 便得到 (5.6). □

定理 5.2.3 ($\mathbb{Q}$ **上的** Riemann-Roch **定理**)**.** 对任意 $x\in E_\infty$, 以下等式成立

$$\rho(\mathcal{E}+x)=\exp\big(\widehat{\deg}(\overline{E})\big)\sum_{\alpha\in\mathcal{E}^\vee}\exp\Big(-\pi\|\alpha\|_{\infty,*}^2+2\pi\alpha(x)\sqrt{-1}\Big). \tag{5.8}$$

特别地,

$$\ln(\Theta(\overline{E}))-\ln(\Theta(\overline{E}^\vee))=\widehat{\deg}(\overline{E}). \tag{5.9}$$

最后, 函数

$$(t\in\,]0,+\infty[)\longmapsto t^r\rho(t\mathcal{E})$$

单调递增, 其中 $r=\dim_{\mathbb{Q}}(E)$.

证明: 令 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 $\mathcal{E}$ 的一组整基并令

$$D=\{\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_re_r\mid(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in[0,1[^r\}.$$

考虑 D 上的平方可积复值函数构成的复线性空间 $L^2(D,\mathbb{C})$. 在其上定义 L^2 内积如下:

$$\forall\,(f,g)\in L^2(D,\mathbb{C}),\quad\langle f,g\rangle_{L^2}=\exp\big(\widehat{\deg}(\overline{E})\big)\int_D f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

在这个内积之下, $(\exp(2\pi\alpha(\cdot)\sqrt{-1}))_{\alpha\in\mathcal{E}^\vee}$ 构成 Hilbert 空间 $(L^2(D,\mathbb{C}),\langle\ ,\ \rangle_{L^2})$ 的一组标准正交基. 所以函数项级数

$$\exp\big(\widehat{\deg}(\overline{E})\big)\sum_{\alpha\in\mathcal{E}^\vee}\exp(2\pi\alpha(\cdot)\sqrt{-1})\int_D\rho(\mathcal{E}+y)\mathrm{e}^{-2\pi\alpha(y)\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}y \tag{5.10}$$

在 L^2 范数下收敛到 $\rho_{\mathcal{E}}|_D$. 另外, 以下等式成立

$$\begin{aligned}&\int_D\rho(\mathcal{E}+y)\mathrm{e}^{-2\alpha(y)\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}y=\int_D\sum_{u\in\mathcal{E}}\exp\big(-\pi\|y+u\|_\infty^2-2\pi\alpha(y)\sqrt{-1}\big)\,\mathrm{d}y\\ &=\int_{E_\infty}\exp\big(-\pi\|x\|^2-2\pi\alpha(x)\sqrt{-1}\big)\,\mathrm{d}x=\exp(-\pi\|\alpha\|_*^2).\end{aligned}$$

由于 $\rho_{\mathcal{E}}$ 是连续函数, 并且

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{E}^\vee}\exp(-\pi\|\alpha\|_*^2)<+\infty,$$

级数 (5.10) 一致收敛到 $\rho_{\mathcal{E}}|_D$. 从而等式 (5.8) 成立. 将该等式用于 $x=0$ 的情形就得到 (5.9). 最后, 在 (5.8) 中取 $x=0$ 并将 $\|\cdot\|_\infty$ 替换成 $t\|\cdot\|_\infty$ 得到

$$\rho(t\mathcal{E})=t^{-r}\exp(\widehat{\deg}(\overline{E}))\sum_{\alpha\in\mathcal{E}^\vee}\mathrm{e}^{-\pi t^{-2}\|\alpha\|_{\infty,*}^2}.$$

这说明了 $(t\in\,]0,+\infty[)\mapsto t^r\rho(t\mathcal{E})$ 是单调上升函数. □

注 5.2.4. 如果将定理 5.2.3 与定理 3.4.6 相比较, 不难观察出有理数域的情形下与向量丛整体截面空间的维数类似的量是 Θ 级数的对数. 这个量一般来说并不是整数. 在以有限域为系数域的有理函数域的情形下, 向量丛整体截面空间的维数也可以写成整体截面空间的基数的以有限域的基数为底的对数. 从这个角度出发也可以类似地定义

$$\widehat{H}^0(\overline{E}):=\{s\in\mathcal{E}\mid\|s\|_\infty\leqslant 1\}=\big\{s\in E\mid\sup_{p\in\mathscr{P}\cup\{\infty\}}\|s\|_p\leqslant 1\big\},$$

并用 $\ln(\mathrm{card}(\widehat{H}^0(\overline{E})))$ 来类比有理函数域情形下向量丛整体截面空间的维数. 注意到

$$\Theta(\overline{E})\geqslant\sum_{s\in\widehat{H}^0(\overline{E})}\exp(-\pi\|s\|_\infty^2)\geqslant\mathrm{e}^{-\pi}\,\mathrm{card}(\widehat{H}^0(\overline{E})),$$

从而

$$\ln(\Theta(\overline{E}))\geqslant\ln(\mathrm{card}(\widehat{H}^0(\overline{E})))-\pi. \tag{5.11}$$

反过来, 对单调递增函数

$$(t\in\,]0,+\infty[)\longrightarrow\ln(\rho(\sqrt{t}\mathcal{E}))+\frac{r}{2}\ln(t)$$

求导后得到

$$\sum_{s\in\mathcal{E}}\|s\|_\infty^2\mathrm{e}^{-\pi t\|s\|_\infty^2}\leqslant\frac{r}{2\pi t}\sum_{s\in\mathcal{E}}\mathrm{e}^{-\pi t\|s\|_\infty^2}.$$

从而

$$\sum_{s\in\mathcal{E},\,\|s\|_\infty\geqslant 1}\mathrm{e}^{-\pi t\|s\|_\infty^2}\leqslant\sum_{s\in\mathcal{E}}\|s\|_\infty^2\mathrm{e}^{-\pi t\|s\|_\infty^2}\leqslant\frac{r}{2\pi t}\sum_{s\in\mathcal{E}}\mathrm{e}^{-\pi t\|s\|_\infty^2}.$$

这说明了

$$\operatorname{card}(\widehat{H}^0(\overline{E})) \geqslant \sum_{s\in\mathcal{E},\,\|s\|_\infty<1} \mathrm{e}^{-\pi t\|s\|_\infty^2} \geqslant \left(1-\frac{r}{2\pi t}\right)\rho(\sqrt{t}\mathcal{E}). \tag{5.12}$$

最后, 由函数

$$(t\in\,]0,+\infty[) \longmapsto t^{r/2}\rho(\sqrt{t}\mathcal{E})$$

的单调上升性知, 当 $t\geqslant 1$ 时

$$\rho(\sqrt{t}\mathcal{E}) \geqslant t^{-r/2}\rho(\mathcal{E}) = t^{-r/2}\Theta(\overline{E}).$$

在 (5.12) 中取 $t=r$ 得到

$$\ln(\operatorname{card}(\widehat{H}^0(\overline{E}))) \geqslant \ln(\Theta(\overline{E})) - \frac{r}{2}\ln(r) + \ln\left(1-\frac{1}{2\pi}\right). \tag{5.13}$$

关于 Euclid 网格 Θ 级数更进一步的知识, 读者可以参考 [17, 18]. 在 Riemann-Roch 公式 (5.9) 中如果将 $\Theta(\cdot)$ 换成 $\operatorname{card}(\widehat{H}^0(\cdot))$, 等式一般来说不成立, 但 Gillet 和 Soulé [59] 证明了如下不等式成立:

$$\left|\ln(\operatorname{card}(\widehat{H}^0(\overline{E})) - \ln(\operatorname{card}(\widehat{H}^0(\overline{E}^\vee)) - \widehat{\deg}(\overline{E})\right| \leqslant r\ln(6) - \ln(V_r),$$

其中

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$$

表示 n 维 Euclid 空间中单位球的体积.

5.2.2　一般数域的情形

令 K 为 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张并令 $\overline{E}=(E,\xi)$ 为 K 上的算术向量丛. 对任意 $p\in\mathscr{P}\cup\{\infty\}$, 令 $\|\cdot\|_{\xi,p}$ 表示如下定义的 $\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Q}} E\cong\bigoplus_{v\in S_{K,p}}E_v$ 上的范数:

$$\forall\, s=(s_v)_{v\in S_{K,p}}\in\bigoplus_{v\in S_{K,p}}E_v,\quad \|s\|_{\xi,p} := \begin{cases}\displaystyle\max_{v\in S_{K,p}}\|s_v\|_v, & p\in\mathscr{P}\\ \displaystyle\left(\sum_{v\in S_{K,\infty}}\|s_v\|_v^2\right)^{1/2}, & p=\infty,\end{cases}$$

并用 $\operatorname{pr}_{K,*}(\xi)$ 和 $\widetilde{\operatorname{pr}}_{K,*}(\xi)$ 分别表示范数族 $(\|\cdot\|_{\xi,p})_{p\in S_{\mathbb{Q}}}$ 和 $(\|\cdot\|_{\xi,p,\mathrm{pur}})_{p\in S_{\mathbb{Q}}}$. 这样 $\widetilde{\operatorname{pr}}_{K,*}(\overline{E})=(E,\widetilde{\operatorname{pr}}_{K,*}(\xi))$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的算术向量丛, 并且 $\mathbb{Q}$-线性同构

$$E^\vee\otimes_K \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,\mathbb{Q}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{Q}),\quad (\alpha\otimes f)\longmapsto f\circ\alpha$$

定义了从 $\mathrm{pr}_{K,*}(\xi^\vee\otimes\xi'_{\omega_{K/\mathbb{Q}}})$ 到 $\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\xi)^\vee$ 的等距同构 (见 §5.1.2 和 §5.1.4). 对 $\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\overline{E})$ 应用等式 (5.9), 得到

$$\ln(\Theta(\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\overline{E})))-\ln(\Theta(\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\overline{E})^\vee))=\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\overline{E})).$$

又由注 4.2.7 推出

$$\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\overline{E}))=\widehat{\deg}(\overline{E})+\dim_K(E)\,\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\overline{K})).$$

从而得到以下结论.

定理 5.2.5. 对任意 K 上得算术向量丛 $\overline{E}$, 等式

$$\begin{aligned}&\ln\Theta(\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\overline{E}))-\ln\Theta(\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\overline{E}^\vee\otimes(\omega_{K/\mathbb{Q}},\xi'_{\omega_{K/\mathbb{Q}}})))\\&=\widehat{\deg}(\overline{E})+\dim_K(E)\,\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\overline{K}))\end{aligned}\tag{5.14}$$

成立.

注 5.2.6. 将等式 (5.14) 分别应用于 $\overline{E}=\overline{K}$ 和 $\overline{E}=(\omega_{K/\mathbb{Q}},\xi'_{\omega_{K/\mathbb{Q}}})$, 得

$$-\frac{1}{2}\widehat{\deg}(\widetilde{\mathrm{pr}}_{K,*}(\overline{K}))=\widehat{\deg}(\omega_{K/\mathbb{Q}},\xi'_{\omega_{K/\mathbb{Q}}}).$$

这个值等于 K 在 $\mathbb{Q}$ 上的判别式 (discriminant) 绝对值的对数.

5.3 Harder-Narasimhan 理论

前一节中我们了解到如何用 Θ 级数来类比向量丛的整体截面空间并且通过 Fourier 分析来得到代数数域上的 Riemann-Roch 定理. 本节将介绍数域的算术几何和射影曲线上向量丛的代数几何的另一类比: Harder-Narasimhan 理论. 这个理论最早是 Harder 和 Narasimhan [67] 在代数几何的框架中引进的. 算术几何中, Stuhler [116] 建立了 Euclid 空间网格的 Harder-Narasimhan 理论. 此后这个理论在 Grayson [61], Bost [15], Gaudron [57] 等人的著作中得到进一步的发展. 和之前介绍的 Riemann-Roch 定理相比, Harder-Narasimhan 理论具有更好的对称性, 并且适用于非常一般的范数族.

定义 5.3.1. 设 E 是数域 K 上的有限维线性空间. 用 $\mathcal{N}_K(E)$ 表示形如 $(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}$ 的范数族构成的集合, 其中 $\|\cdot\|_v$ 是 $E\otimes_K K_v$ 上的范数, 并且当 v 是非阿基米德绝对值时 $\|\cdot\|_v$ 是超范数[38]. 设 $\xi=(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}\in\mathcal{N}_K(E)$. 如果以下两个条件成立, 那么说 ξ 是**受控制的** (dominated):

[38]注意到 $\mathcal{N}_K(E)$ 和 $\mathcal{H}_K(E)$ 的区别是在阿基米德绝对值处允许一般的范数.

(1) 对任意 $s\in E\setminus\{0\}$,

$$\sum_{v\in S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\cdot\big|\ln\|s\|_v\big|<+\infty,$$

(2) 对任意 $\alpha\in E^\vee\setminus\{0\}$,

$$\sum_{v\in S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\cdot\big|\ln\|\alpha\|_{v,*}\big|<+\infty.$$

我们用 $\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E)$ 表示 $\mathcal{N}_K(E)$ 中受控制的范数族构成的集合, 用 $\mathcal{H}_K^{\mathrm{dom}}(E)$ 表示 $\mathcal{H}_K(E)$ 中受控制的范数族构成的集合.

注 5.3.2. 由定义不难看出, 如果 ξ 是受控制的, 那么 $\xi^\vee$ 亦然. 另外, 上述两个条件也等价于要求[39]

(1') 对任意 $s\in E\setminus\{0\}$,

$$\overline{\int}_{S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|s\|_v\,\mathrm{d}v:=\inf_{\substack{S\subset S_K\\ S\text{ 有限}}}\ \sup_{\substack{S\subset T\subset S_K\\ T\text{ 有限}}}\sum_{v\in T}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|s\|_v<+\infty,$$

(2') 对任意 $\alpha\in E^\vee\setminus\{0\}$,

$$\overline{\int}_{S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|\alpha\|_{v,*}\,\mathrm{d}v:=\inf_{\substack{S\subset S_K\\ S\text{ 有限}}}\ \sup_{\substack{S\subset T\subset S_K\\ T\text{ 有限}}}\sum_{v\in T}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|\alpha\|_{v,*}<+\infty.$$

事实上, 对任意 $s\in E\setminus\{0\}$, 存在 $\alpha\in E^\vee\setminus\{0\}$ 使得 $\alpha(s)\neq 0$. 对任意 $v\in S_K$ 有

$$|\alpha(s)|_v\leqslant\|s\|_v\cdot\|\alpha\|_{v,*}.$$

由乘积公式知存在 S_K 的有限子集 S', 使得对任意 $v\in S_K\backslash S'$ 有 $|\alpha(s)|_v=1$, 并且

$$\sum_{v\in S_K}\ln|\alpha(s)|_v=0.$$

这样得到, 对于任意包含 S' 的 S_K 的有限子集有

$$\sum_{v\in S}\ln\|s\|_v+\sum_{v\in S}\ln\|\alpha\|_{v,*}\geqslant 0.$$

[39]这里我们赋 S_K 以离散的 σ-代数和计数测度并考虑这个测度空间的上积分.

再结合条件 (1') 和 (2') 便得到无穷和式

$$\sum_{v\in S_K}\ln\|s\|_v \quad \text{和} \quad \sum_{v\in S_K}\ln\|\alpha\|_{v,*}$$

的绝对收敛性. 用这个判别法可以证明, 如果 $\xi=(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}$ 使得 (E,ξ) 是 K 上的算术向量丛, 那么 ξ 是受控制的范数族. 事实上, 假设 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 E 的一组基, S 是 S_K 的包含 $S_{K,\infty}$ 的有限子集, 使得对任意 $v\in S_K\setminus S$ 来说 $(e_i)_{i=1}^r$ 都是标准正交基, 那么对任意 $s=a_1e_1+\cdots+a_re_r\in E\setminus\{0\}$ 有

$$\begin{aligned}\overline{\int}_{S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|s\|_v\,\mathrm{d}v&=\sum_{v\in S}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|s\|_v\\&\quad+\overline{\int}_{S_K\setminus S}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\max\{|a_1|_v,\ldots,|a_r|_v\}\,\mathrm{d}v<+\infty.\end{aligned}$$

将这个推理用于 $\xi^\vee$ 得到, 对任意 $\alpha\in E^\vee\setminus\{0\}$ 有

$$\overline{\int}_{S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|\alpha\|_{v,*}\,\mathrm{d}v<+\infty.$$

注 5.3.3. 设 E 为有限维非零 K-线性空间. 若 $\xi=(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}$ 和 $\xi'=(\|\cdot\|'_v)_{v\in S_K}$ 是 $\mathcal{N}_K(E)$ 中两个元素, 令[40]

$$\begin{aligned}d(\xi,\xi')&:=\sum_{v\in S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\sup_{s\in E_{K_v}\setminus\{0\}}\big|\ln\|s\|_v-\ln\|s\|'_v\big|\\&=\sum_{v\in S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\sup_{s\in E\setminus\{0\}}\big|\ln\|s\|_v-\ln\|s\|'_v\big|\in[0,+\infty].\end{aligned}$$

由定义得到, 对任意 $s\in E\setminus\{0\}$,

$$\overline{\int}_{S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|s\|_v\,\mathrm{d}v\leqslant\overline{\int}_{S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|s\|'_v\,\mathrm{d}v+d(\xi,\xi').$$

另外, 不难验证[41] $d(\xi,\xi')=d(\xi^\vee,\xi'^\vee)$. 这样就得到, 如果 ξ 是受控制的范数族并且 $d(\xi,\xi')<+\infty$, 那么 ξ' 也是受控制的范数族. 反过来, 如果 ξ 和 ξ' 都是受控制的范数族, 那么 $d(\xi,\xi')<+\infty$. 事实上, 不妨设[42] $\boldsymbol{e}=(e_i)_{i=1}^r$ 是 E

---

[40] 最后一个等式由 E 在 E_{K_v} 中的稠密性可得.

[41] 由对偶范数的构造得到 $d(\xi_1^\vee,\xi_2^\vee)\leqslant d(\xi_1,\xi_2)$; 而超范数或内积诱导的范数等于其双重对偶范数, 反向的不等式也成立.

[42] 容易证明 d 满足三角形不等式: 若 ξ_1,ξ_2 和 ξ_3 是 $\mathcal{H}_K(E)$ 中的三个元素, 那么不等式

$$d(\xi_1,\xi_2)\leqslant d(\xi_1,\xi_3)+d(\xi_2,\xi_3).$$

成立.

的一组基, 对每个范数 $\|\cdot\|_{2,v}$ 来说都是标准正交基. 若 $s=a_1e_1+\cdots+a_re_r\in E\setminus\{0\}$, 那么

$$\|s\|_v\leqslant\begin{cases}\max\{|a_1|_v\cdot\|e_1\|_v,\ldots,|a_r|_v\cdot\|e_r\|_v\}, & v\in S_K\setminus S_{K,\infty}\\ |a_1|_v\cdot\|e_1\|_v+\cdots+|a_r|_v\cdot\|e_r\|_v, & v\in S_{K,\infty}.\end{cases}$$

从而

$$\ln\|s\|_v\leqslant\ln\|s\|_v'+\begin{cases}\max\{\ln\|e_1\|_v,\ldots,\ln\|e_r\|_v\}, & v\in S_K\setminus S_{K,\infty},\\ \frac{1}{2}\ln(\|e_1\|_v^2+\cdots+\|e_r\|_v^2), & v\in S_{K,\infty}.\end{cases}$$

类似地, 对任意 $\alpha\in E^\vee\setminus\{0\}$ 有

$$\ln\|\alpha\|_{v,*}\leqslant\ln\|\alpha\|_{v,*}'+\begin{cases}\max\{\ln\|e_1^\vee\|_{v,*},\ldots,\ln\|e_r^\vee\|_{v,*}\}, & v\in S_K\setminus S_{K,\infty},\\ \frac{1}{2}\ln(\|e_1^\vee\|_{v,*}^2+\cdots+\|e_r^\vee\|_{v,*}^2), & v\in S_{K,\infty}.\end{cases}$$

从等式[43]

$$\sup_{s\in E\setminus\{0\}}\frac{\|s\|_v'}{\|s\|_v}=\sup_{\alpha\in E\setminus\{0\}}\frac{\|\alpha\|_{v,*}}{\|\alpha\|_{v,*}'}$$

推出

$$\Big|\ln\|s\|_v-\ln\|s\|_v'\Big|\leqslant\begin{cases}\max\limits_{i\in\{1,\ldots,r\}}\max\{\ln\|e_i\|_v,\ln\|e_i^\vee\|_{v,*}\}, & v\in S_K\setminus S_{K,\infty},\\ \frac{1}{2}\max\{\ln(\sum_{i=1}^r\|e_i\|_v^2),\ln(\sum_{i=1}^r\|e_i^\vee\|_{v,*}^2)\}, & v\in S_{K,\infty}.\end{cases}$$

通过这个判别法不难验证, 对任意 $\xi\in\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E)$, $\det(\xi)\in\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(\det(E))$. 另外, 如果 M 是一维 K-线性空间, $\xi_M\in\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(M)$, 那么对任意 $\xi\in\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E)$ 有

$$\xi\otimes\xi_M\in\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E\otimes_K M),$$

其中 $\xi\otimes\xi_M$ 表示张量积范数 (见 §3.2.10) 构成的范数族. 如果 $\xi=(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}$ 是 E 上受控制的范数族, 对任意 E 的线性子空间 F, 由 $\|\cdot\|_v$ 在 F_v 上的限

[43]对任意 $s\in E\setminus\{0\}$ 有 $|\alpha(s)|_v\leqslant\|\alpha\|_v'\cdot\|s\|_v'$, 从而

$$\|\alpha\|_{v,*}=\sup_{s\in E\setminus\{0\}}\frac{|\alpha(s)|_v}{\|s\|_v}\leqslant\|\alpha\|_v'\cdot\sup_{s\in E\setminus\{0\}}\frac{\|s\|_v'}{\|s\|_v}.$$

这样得到

$$\sup_{s\in E\setminus\{0\}}\frac{\|s\|_v'}{\|s\|_v}\geqslant\sup_{\alpha\in E\setminus\{0\}}\frac{\|\alpha\|_{v,*}}{\|\alpha\|_{v,*}'}.$$

再利用双重对偶范数得到反向的不等式.

制构成的范数族是 $\mathcal{N}_K(F)$ 中受控制的范数族; 对任意 E 的商线性空间 G, 由 $\|\cdot\|_v$ 在 G_v 上的商范数构成的范数族是 $\mathcal{N}_K(G)$ 中受控制的范数族. 由注 5.3.3 知这些命题只需要对某个特殊的受控制范数族 ξ 证明即可, 典型的选择是固定 E 的一组适当的基并选取 $\|\cdot\|_v$ 使得该基成为标准正交基, 具体细节留给读者.

定义 5.3.4. 设 E 为有限维 K-线性空间, ξ 是 $\mathcal{N}_K(E)$ 中受控制的范数族. 如果 $(s_i)_{i=1}^r$ 是 E 在 K 上的一组基, 那么和式

$$-\sum_{v\in S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_{v,\det}$$

绝对收敛, 并且其和与 $(s_i)_{i=1}^r$ 的选择无关. 我们将其称为 (E,ξ) 的 Arakelov **度数**, 记作 $\widehat{\deg}(E,\xi)$. 如果 E 是非零线性空间, 比值

$$\widehat{\mu}(E,\xi):=\frac{\widehat{\deg}(E,\xi)}{\dim_K(E)}$$

称为 (E,ξ) 的**斜率**.

设 E 和 E' 为有限维非零 K-线性空间, 假设它们具有相同的维数, 并且 $f:E\to E'$ 是 K-线性同构. 如果 $\xi=(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}$ 和 $\xi'=(\|\cdot\|'_v)_{v\in S_K}$ 分别是 $\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E)$ 和 $\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E')$ 中的元素, 由注 5.3.2 知和式

$$\sum_{v\in S_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\sup_{s\in E\setminus\{0\}}\ln\frac{\|f(s)\|'_v}{\|s\|_v}$$

绝对收敛. 我们用 $h_{\xi,\xi'}(f)$ 来表示其和, 有时也简记为 $h(f)$.

命题 5.3.5. 设 E 和 E' 为有限维非零 K-线性空间, $f:E\to E'$ 为 K-线性同构, $\xi\in\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E)$, $\xi'\in\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E')$. 那么

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(E,\xi)&=\widehat{\deg}(E',\xi')+h_{\det(\xi),\det(\xi')}(\det(f))\\&\leqslant\widehat{\deg}(E',\xi')+\dim_K(E)h_{\xi,\xi'}(f)\end{aligned}\tag{5.15}$$

证明: 假设 $(V,\|\cdot\|)$ 和 $(V',\|\cdot\|)$ 是某完备赋值域上的一维赋范线性空间, $\varphi:V\to V'$ 是线性同构, 那么对任意 $s\in V$ 来说 $\|\varphi(s)\|'$ 都等于 φ 的算子范数乘以 $\|s\|$. 从而 (5.15) 中的等式成立, 其不等式部分是 Hadamard 不等式的推论 (见推论 3.2.16). □

命题 5.3.6. 设 E 为有限维 K-线性空间, F 为 E 的线性子空间, G 为商空间 E/F. 设 $\xi=(\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}$ 为 $\mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E)$ 中的元素, ξ_F 为范数 $\|\cdot\|_v$ 在 F_v 上

的限制构成的范数族, ξ_G 为 $\|\cdot\|_v$ 在 G_v 上的商范数构成的范数族. 那么不等式

$$\widehat{\deg}(E,\xi) \geqslant \widehat{\deg}(F,\xi_F) + \widehat{\deg}(G,\xi_G) \tag{5.16}$$

成立, 当 $\xi \in \mathcal{H}_K^{\mathrm{dom}}$ 时 (5.16) 的左右两边相等. 特别地, 如果 F 和 G 都是非零线性空间, 那么

$$\widehat{\mu}(E,\xi) \geqslant \min\{\widehat{\mu}(F,\xi_F), \widehat{\mu}(G,\xi_G)\}. \tag{5.17}$$

证明: 如果 $(e_i)_{i=1}^n$ 是 F_v 在 K_v 上的一组基, $(g_j)_{j=n+1}^{n+m}$ 是 G_v 在 K_v 上的一组基, 并且对任意 $j \in \{n+1,\ldots,n+m\}$ 选取等价类 g_j 的任意一个代表元 e_j, 那么 $(e_i)_{i=1}^{n+m}$ 构成 E_v 的一组基. 对 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n+m}$ 用 Hadamard 不等式, 由命题 3.2.15 得到

$$\widehat{\deg}(E,\xi) \geqslant \widehat{\deg}(F,\xi_F) + \widehat{\deg}(G,\xi_G). \tag{5.18}$$

当 F 和 G 都是非零线性空间时, 该不等式两边除以 $\dim_K(E)$ 后得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(E,\xi) &\geqslant \frac{\dim_K(F)}{\dim_K(E)}\widehat{\mu}(F,\xi_F) + \frac{\dim_K(G)}{\dim_K(E)}\widehat{\mu}(G,\xi_G) \\ &\geqslant \min\{\widehat{\mu}(F,\xi_F), \widehat{\mu}(G,\xi_G)\}.\end{aligned}$$

当 $\xi \in \mathcal{H}_K^{\mathrm{dom}}(E)$ 时, 用正交化定理 3.2.7 可以构造 E_v 的 α-正交基, 与 F_v 的交集构成 F_v 的一组基. 由命题 3.2.15 和 Hadamard 不等式得到不等号与 (5.18) 反向的不等式. 从而等式 (5.16) 成立. □

定义 5.3.7. 设 E 为 K 上的有限维非零 K-线性空间. 用 $\mathrm{Sq}(E)$ 表示 E 的满足 $F' \subsetneq F$ 的线性子空间对 (F', F) 构成的集合. 假设 $\xi = (\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}$ 是 $\mathcal{N}_K(E)$ 中的范数族, $(F',F) \in \mathrm{Sq}(E)$. 对任意 $v \in S_K$, 范数 $\|\cdot\|_v$ 诱导 $F_v = F \otimes_K K_v$ 上的限制范数, 进而诱导商空间 F_v/F'_v 上的商范数. 这个范数称为 $\|\cdot\|_v$ 诱导的**子商范数**[44]. 这些子商范数构成的范数族是 $\mathcal{N}_K(F/F')$ 中的元素, 记作 $\xi_{F/F'}$. 如果 ξ 是受控制的范数族, 那么 $\xi_{F/F'}$ 也是受控制的, 此时我们用 $\widehat{\mu}_\xi(F',F)$ 来表示斜率 $\widehat{\mu}(F/F', \xi_{F/F'})$.

命题 5.3.8. 设 E 为有限维非零 K-线性空间. 在集合 $\mathrm{Sq}(E)$ 上定义序关系 $\prec$ 如下:

$$(F'_1, F_1) \prec (F'_2, F_2) \text{ 当且仅当 } F_2 = F_1 + F'_2 \text{ 且 } F'_1 = F_1 \cap F'_2.$$

[44]可以证明该范数也等于 $\|\cdot\|_v$ 在 E_v/F'_v 上的商范数在 F_v/F'_v 上的限制.

对任意 $\xi \in \mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E)$, 映射 $\widehat{\mu}_\xi : \mathrm{Sq}(E) \to \mathbb{R}$ 是保序映射.

证明: 设 (F_1', F_1) 和 (F_2', F_2) 为 $\mathrm{Sq}(E)$ 中的两个元素, 使得 $(F_1', F_1) \prec (F_2', F_2)$. 这样包含映射 $F_1 \to F_2$ 诱导 K 线性同构 $F_1/F_1' \to F_2/F_2'$. 我们将它记作 f. 设 $\xi = (\|\cdot\|_v)_{v \in S_K} \in \mathcal{N}_K^{\mathrm{dom}}(E)$. 对任意 $v \in S_K$, 分别令 $\|\cdot\|_{1,v}$ 和 $\|\cdot\|_{2,v}$ 为 $\|\cdot\|_v$ 在 $F_{1,v}/F_{1,v}'$ 和 $F_{2,v}/F_{2,v}'$ 上诱导的子商范数. 由定义知,

$$\forall\, s \in F_{1,v}, \quad \big\|f_v([s])\big\|_{2,v} = \inf_{s' \in F_{2,v}'} \|s + s'\|_v \leqslant \inf_{s' \in F_{1,v}'} \|s + s'\|_v = \big\|[s]\big\|_{1,v}.$$

这说明 f_v 的算子范数 $\leqslant 1$. 于是由命题 5.3.5 得到不等式

$$\widehat{\mu}_\xi(F_1', F_1) \leqslant \widehat{\mu}_\xi(F_2', F_2).$$

□

命题 5.3.9. 设 E 为有限维非零 K-线性空间, $\xi \in \mathcal{H}_K^{\mathrm{int}}(E)$. 那么以下等式成立:

$$\inf_{F' \subsetneq E} \sup_{F' \subsetneq F \subset E} \widehat{\mu}_\xi(F', F) = \inf_{E' \subsetneq E} \widehat{\mu}_\xi(E', E), \tag{5.19}$$

其中等式左边的 F' 取遍 E 的真线性子空间, F 取遍真包含 F' 的 E 的线性子空间, 等式右边的 E' 取遍 E 的真线性子空间.

证明: 由定义不难看出 (5.19) 中等式的左边是右边的上界, 从而只要证明反向的不等式. 用反证法. 假设严格的不等式

$$\inf_{E' \subsetneq E} \mu_\xi(E', E) < \inf_{F' \subsetneq E} \sup_{F' \subsetneq F \subset E} \widehat{\mu}_\xi(F', F)$$

成立, 并在所有满足

$$\widehat{\mu}_\xi(E', E) < \inf_{F' \subsetneq E} \sup_{F' \subsetneq F \subset E} \widehat{\mu}_\xi(F', F) \tag{5.20}$$

的 E 的真线性子空间 E' 中任选一个, 使得 $\dim_K(E) - \dim_K(E')$ 最小. 假设 F 是 E 的线性子空间, 使得 $E' \subsetneq F \subsetneq E$. 对短正合列

$$0 \longrightarrow F/E' \longrightarrow E/E' \longrightarrow E/F \longrightarrow 0$$

运用命题 5.3.6, 得到

$$\widehat{\mu}_\xi(E', E) \geqslant \min\{\widehat{\mu}_\xi(E', F), \widehat{\mu}_\xi(F, E)\}.$$

又由 $\dim_K(E)-\dim_K(E')$ 的极小性知

$$\widehat{\mu}_\xi(E',E)<\widehat{\mu}_\xi(F,E).$$

从而得到 $\widehat{\mu}_\xi(E',E)\geqslant\widehat{\mu}_\xi(E',F)$. 这与 (5.20) 矛盾. 命题于是得证. □

定义 5.3.10. 设 E 为有限维非零 K-线性空间, $\xi\in\mathcal{H}_K^{\mathrm{int}}(E)$. 用 $\widehat{\mu}_{\min}(E,\xi)$ 来表示

$$\inf_{E'\subsetneq E}\widehat{\mu}_\xi(E',E)=\inf_{E'\subsetneq E}\widehat{\mu}(\overline{E/E'}),$$

其中 E' 取遍 E 的真线性子空间. 由命题 5.3.9 知等式

$$\widehat{\mu}_{\min}(E,\xi)=\inf_{F'\subsetneq E}\sup_{F'\subsetneq F\subset E}\widehat{\mu}_\xi(F',F) \tag{5.21}$$

成立, 其中 F' 取遍 E 的真线性子空间, F 取遍真包含 F' 的 E 的线性子空间. 用 $\widehat{\mu}_{\max}(E,\xi)$ 表示

$$\sup_{\{0\}\neq F\subset E}\widehat{\mu}(F,\xi_F)=\sup_{\{0\}\neq F\subset E}\widehat{\mu}_\xi(\{0\},F),$$

其中 F 取遍 E 的非零线性子空间, ξ_F 表示 ξ 中范数的限制构成的范数族. 在这样的记号下等式 (5.21) 也可以写成

$$\widehat{\mu}_{\min}(E,\xi)=\inf_{F'\subsetneq E}\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E/F'})$$

的形式.

如果对任意 E 的非零线性子空间 F, 不等式

$$\widehat{\mu}_{\min}(F,\xi_F)\leqslant\widehat{\mu}_{\min}(E,\xi)$$

成立, 或等价地, 等式

$$\sup_{0\neq F\subset E}\inf_{F'\subsetneq F}\widehat{\mu}_\xi(F',F)=\inf_{F'\subsetneq E}\sup_{F'\subsetneq F\subset E}\widehat{\mu}_\xi(F',F)$$

成立, 则说 (E,ξ) 是**半稳定的**.

熟悉博弈论的读者可以看出, $\widehat{\mu}_\xi$ 可以看成一个带约束的单步骤零和博弈游戏的收益函数. 这个博弈游戏可以如下描述: 甲方和乙方依次选择一个 E 的线性子空间, 约束条件要求甲方选择的线性子空间 F' 严格包含在乙方

选择的线性子空间 F 之中. 游戏设定乙方的收益为 $\widehat{\mu}_\xi(F',F)$, 相应地, 甲方的收益为 $-\widehat{\mu}_\xi(F',F)$. 假设双方都足够理性, 那么

$$\inf_{F'\subsetneq E}\sup_{F'\subsetneq F\subset E}\widehat{\mu}_\xi(F',F)$$

代表甲方先行时乙方的收益,

$$\sup_{0\neq F\subset E}\inf_{F'\subsetneq F}\widehat{\mu}_\xi(F',F)$$

则代表乙方先行时其收益. 由定义看出, (E,ξ) 的半稳定性就等价于该博弈游戏的 Nash 平衡条件, 也就是说, 无论是甲方还是乙方先行, 最终双方收益不变.

更一般地, 我们可以对任意一个收益函数 $\mu:\mathrm{Sq}(E)\to\mathbb{R}$ 来考虑上述博弈游戏. 用

$$\mu^*_{\text{甲}}=\inf_{F'\subsetneq E}\sup_{F'\subsetneq F\subset E}\mu(F',F)\quad \text{和}\quad \mu^*_{\text{乙}}=\sup_{0\neq F\subset E}\inf_{F'\subsetneq F}\mu(F',F)$$

分别表示双方理性选择的前提下甲方和乙方先行时乙方的收益. 如果函数 μ 满足以下条件:

(a) 若在 $\mathrm{Sq}(E)$ 上考虑命题 5.3.8 中引入的序关系 $\prec$, 映射 μ 是保序映射,

(b) 对任意满足 $E_1\subsetneq E_2\subsetneq E_3$ 的三个 E 的线性子空间 E_1, E_2 和 E_3, 以下 (反向) 强三角形不等式成立

$$\mu(E_1,E_3)\geqslant\min\{\mu(E_1,E_2),\mu(E_2,E_3)\},$$

这样的博弈游戏称为 Harder-Narasimhan **博弈游戏**. 命题 5.3.6 和 5.3.8 说明了, 如果 $\xi\in\mathcal{H}_K^{\mathrm{dom}}(E)$, 那么函数 $\widehat{\mu}_\xi$ 对应的游戏是 Harder-Narasimhan 博弈游戏.

记号 5.3.11. 对任意 E 的线性子空间 F, 令

$$\mu_{\text{乙}}(F):=\inf_{F'\subsetneq F}\mu(F',F)$$

为乙方先行选择 F 然后甲方理性选择的情形下的乙方收益. 利用命题 5.3.9 的证明方法, 可以从条件 (b) 推出等式

$$\mu_{\text{乙}}(E)=\mu^*_{\text{甲}},\tag{5.22}$$

也就是说, 乙方先行选择 E 然后甲方理性选择, 或者甲方先行且双方理性选择, 这两种情形之下乙方的收益相同. 特别地, 不等式 $\mu^*_{甲} \leqslant \mu^*_{乙}$ 成立, 也就是说在条件 (b) 之下先行者有利.

命题 5.3.12. (1) 假设函数 μ 满足条件 (b). 对任意 E 的非零线性子空间 F, 等式

$$\mu_{乙}(F) = \inf_{F' \subsetneq F} \sup_{F' \subsetneq F'' \subset F} \mu(F', F'')$$

成立.

(2) 假设 μ 满足条件 (a) 和 (b). 那么对任意 E 的非零线性子空间 F_1 和 F_2 不等式

$$\mu_{乙}(F_1 + F_2) \geqslant \min\{\mu_{乙}(F_1), \mu_{乙}(F_2)\} \tag{5.23}$$

成立.

证明: (1) 的证明与命题 5.3.9 的证明非常类似, 细节留给读者.

(2) 由 (1) 知只须证明, 对任意 $F_1 + F_2$ 的真线性子空间 F',

$$\sup_{F' \subsetneq F'' \subset F_1 + F_2} \mu(F', F'') \geqslant \min\{\mu_{乙}(F_1), \mu_{乙}(F_2)\}. \tag{5.24}$$

由于 F' 是 $F_1 + F_2$ 的真子空间, 要么 $F' \subsetneq F' + F_1$, 要么 $F' \subsetneq F' + F_2$. 如果 $F' \subsetneq F' + F_1$, 那么由条件 (a) 得到

$$\mu(F', F' + F_1) \geqslant \mu(F' \cap F_1, F_1) \geqslant \mu_{乙}(F_1).$$

类似地, 如果 $F' \subsetneq F' + F_2$, 那么 $\mu(F', F' + F_2) \geqslant \mu_{乙}(F_2)$. 从而不等式 (5.24) 总是成立. □

以下假设 μ 满足 Harder-Narasimhan 博弈游戏的条件 (a) 和 (b). 尽管 $\mathrm{Sq}(E)$ 一般是一个无穷集合, 可以证明乙方先行时有最优策略, 也就是说存在 E 的非零线性子空间使得函数 $\mu_{乙}$ 取到其最大值. 事实上, 如果 $\mu_{乙}(E) = \mu^*_{乙}$, 那么 E 即是其最优策略 (由等式 (5.22) 知此时博弈游戏满足 Nash 平衡条件), 否则用归纳法可以构造 E 的一个线性子空间降链

$$E = F_0 \supsetneq F_1 \supsetneq \ldots \supsetneq F_m \supsetneq \{0\},$$

满足以下条件[45]

[45]这个归纳过程中的每个步骤都可以看作是在提高收益的前提下追求最大空间维数的贪心算法.

(i) $\mu_{乙}(F_0) < \mu_{乙}(F_1) < \ldots < \mu_{乙}(F_m)$,

(ii) 对任意 $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, 在 F_i 的满足 $\mu_{乙}(F_i') > \mu_{乙}(F_i)$ 的非零线性子空间 F_i' 之中, F_{i+1} 的维数最大,

(iii) 对任意 F_m 的非零线性子空间 F_m' 有 $\mu_{乙}(F_m') \leqslant \mu_{乙}(F_m)$.

注意到条件 (iii) 说明了函数 μ 限制在 $\mathrm{Sq}(F_m)$ 上所定义的 Harder-Narasimhan 博弈游戏满足 Nash 平衡条件. 倘若 F 是 E 的非零线性子空间, 使得 $\mu_{乙}(F) \geqslant \mu_{乙}(F_m)$, 那么用不等式 (5.23) 和条件 (ii) 可以归纳地证明 $F \subset F_m$. 再加上条件 (iii) 就得到 F_m 是乙方先行的最优策略. 另外, F_m 还是在包含关系下最大的乙方先行的最优策略 (从而是唯一的). 不难看出, 博弈游戏满足 Nash 平衡条件当且仅当 $F_m = E$. 因此我们将这个线性子空间称为乙方的**去平衡策略**.

假设博弈游戏不满足 Nash 平衡条件, 并且 E_{des} 表示乙方的去平衡策略. 如果乙方先行并选取某个真包含 E_{des} 的 E 的线性子空间 F, 那么甲方可以选择一个 F 的真线性子空间 F' 使得 $\mu(F', F) < \mu_{乙}^*$. 非但如此, 甲方可以选择某个这样的 F' 使得 $F' \supset E_{\mathrm{des}}$. 事实上, 如果 F' 不包含 E_{des}, 那么 F' 与 E_{des} 的交是 E_{des} 的真线性子空间, 从而由条件 (a) 得到

$$\mu_{乙}^* \leqslant \mu(F' \cap E_{\mathrm{des}}, E_{\mathrm{des}}) \leqslant \mu(F', F' + E_{\mathrm{des}}). \tag{5.25}$$

由于 $\mu(F', F) < \mu_{乙}^*$, 知 $F' + E_{\mathrm{des}} \subsetneq F$. 如果 $\mu(F' + E_{\mathrm{des}}, F) > \mu(F', F)$, 那么由条件 (b) 得到

$$\mu(F', F' + E_{\mathrm{des}}) \leqslant \mu(F', F) < \mu_{乙}^*,$$

这与 (5.25) 矛盾. 从而对于甲方来说策略 $F' + E_{\mathrm{des}}$ 并不比 F' 更差.

给定 $\mathrm{Sq}(E)$ 中的一个元素 $\mathscr{F} = (F', F)$ 并用 π 表示从 F 到 F/F' 的投影映射. 从 $\mathrm{Sq}(F/F')$ 到 $\mathrm{Sq}(E)$ 的将 $(Q', Q) \in \mathrm{Sq}(F/F')$ 映为

$$(\pi^{-1}(Q'), \pi^{-1}(Q)) \in \mathrm{Sq}(E)$$

的映射是单射. 用 $\mu_{\mathscr{F}} : \mathrm{Sq}(F/F') \to \mathbb{R}$ 表示收益函数 μ 与该映射的复合. 这样 $\mu_{\mathscr{F}}$ 可以看成相对于子商空间 F/F' 的类似的博弈游戏的收益函数, 相应的博弈游戏称为 **μ 在 F/F' 上诱导的博弈游戏**. 由于 μ 满足条件 (a) 和 (b), 不难看出 $\mu_{\mathscr{F}}$ 亦然, 也就是说收益函数 $\mu_{\mathscr{F}}$ 对应的博弈游戏也是

Harder-Narasimhan 博弈游戏. 这样可以递归地构造 E 的线性子空间的一个升链

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n = E,$$

使得 E_{i+1}/E_i 是 μ 在 E/E_i 上诱导的博弈游戏中乙方的去平衡策略. 从构造可以看出, 收益函数 μ 在每个子商 E_{i+1}/E_i 上诱导的博弈游戏都满足 Nash 平衡条件. 另外, 从上一段落的推理看出, 如果用 μ_i^* 表示 E_{i+1}/E_i 上博弈游戏的平衡收益, 那么以下不等式成立

$$\mu_1^* > \ldots > \mu_n^*.$$

将这个结论应用于由可积范数族决定的收益函数, 就得到 Harder-Narasimhan 分解的存在唯一性.

定理 5.3.13. *设 E 为有限维非零 K-线性空间, $\xi \in \mathcal{H}_K^{\mathrm{dom}}(E)$. 存在唯一的 E 的线性子空间升链*

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n = E, \tag{5.26}$$

使得每个子商 $\overline{E_i/E_{i-1}} = (E_i/E_{i-1}, \xi_{E_i/E_{i-1}})$ 都是半稳定的 $(i \in \{1, \ldots, n\})$ 并且满足以下不等式

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E_1/E_0}) > \ldots > \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E_n/E_{n-1}}).$$

子空间升链 (5.26) 称为 (E, ξ) 的 Harder-Narasimhan **分解**.

注 5.3.14. Arakelov 几何中经典的 Harder-Narasimhan 理论适用于 Euclid 网格或 Hermite 向量丛, 所使用的方法是基于数域的 Northcott 性质, 也就是说, 给定某数域上算术射影簇 X, 对任意常数 C, 射影簇 X 中高度不超过 C 的有理点只有有限多个. 在 [38, §4.3.11] 中, Harder-Narasimhan 理论在 Adèle 曲线的 Arakelov 几何框架下被推广到了一般的赋范向量丛的情形, 其方法的核心是斜率不等式. 另外, 代数几何和数论的许多方向上都可以发展 Harder-Narasimhan 理论, 比如 Drinfeld 玩意 (chtouca) [82], F-结晶 (F-crystal) [73], φ-模链 (filtered φ-module) [53], Robba 环上的 φ-模 [75], 赋值环上的有限平坦群概形 [51], 线性纠错码 [111], 等等. 同时文献中也出现了一些用范畴化的方法将 Harder-Narasimhan 理论抽象出来的工作 [82, 3, 32, 40]. 这些工作大多是基于度数函数的性质, 比如对短正合列的可加性和平行四边形不等式等. 最近李尧 [88] 在原初 Abel 范畴 (proto-abelian category) 的框架下提出了 Harder-Narasimhan 理论新的范畴化. 李

尧的构造超脱了度数函数的限制, 适用于取值在一般全序集的斜率函数, 从理论上揭示了斜率不等式在 Harder-Narasimhan 理论中的关键作用.

6 算术射影簇

算术几何中的代数数域、代数几何中的射影曲线和复解析几何中的黎曼曲面是类似的对象. 前几节中我们介绍了黎曼曲面、代数函数域和代数数域的几何, 并且用赋范线性空间的方法将这三类对象算术性质统一起来. 在高维的情形, 算术几何研究的对象是代数数域上的代数簇. 通过上述讨论不难想到通过与射影曲线上的射影簇类比来研究代数数域上的射影簇. 注意到代数数域和代数函数域的一个重要的区别是代数数域普遍具有阿基米德绝对值而不存在整体的射影模型, 比方说 §5.1.6 中定义的 Arakelov 度数就可以不是整数, 甚至不是有理数 (和定义 3.4.4 比较). 从而代数数域上的射影簇在概形的范畴内没有整体的射影模型, 这给代数几何方法在算术射影簇研究中的直接运用带了了困难. Arakelov 几何的基本思想是综合代数几何和复解析几何的方法来研究算术代数簇. 更一般地, 从 Adèle 理论的观点来看, 还可以结合非阿基米德解析几何的方法来研究. Arakelov 几何的基本图景是代数数域上的射影簇加上其决定的一族解析流形, 每个解析流形对应于代数数域的一个绝对值. 另外, 代数几何中常见的一些对象, 比方说线丛或者向量丛, 在 Arakelov 几何的框架下需要引进一族度量来考虑. 这一点在算术曲线, 即代数数域的情形的介绍已经有所体现. 本节中将从 Adèle 的观点出发来介绍 Arakelov 几何, 参考的是 [38] 中发展的 Adèle 曲线论方法. 对 Arakelov 几何发展过程感兴趣的读者可以参考 Arakelov 的在算术曲面论上的奠基工作 [4, 5], 以及后续建立一般维数 Arakelov 几何基础 [58], 和 Adèle 观点 [131] 的工作.

6.1 线丛上的度量

6.1.1 Berkovich 拓扑

令 $(k,|\cdot|)$ 为完备赋值域, X 为 $\operatorname{Spec} k$ 上的局部环层空间. 用 X^{an} 表示形如 $z=(j(z),|\cdot|_z)$ 的对构成的集合, 其中 $j(z)$ 是 X 中的元素, $|\cdot|_z$ 是 $j(z)$ 的剩余类域 $\kappa(z)$ 上延拓 $|\cdot|$ 的绝对值. 这样 j 可以看作是从 X^{an} 到 X 的映射. 对任意 $z\in X^{\mathrm{an}}$, 用 $\widehat{\kappa}(z)$ 表示剩余类域相对于绝对值 $|\cdot|_z$ 的完备化. 当 $k=\mathbb{C}$ 并且 $|\cdot|$ 是通常的绝对值时, 由于赋值域 $(\mathbb{C},|\cdot|)$ 只有平凡的扩张, X^{an}

实际上等同于 X 的有理点构成的集合. 但当 $(k,|\cdot|)$ 是非阿基米德绝对值的时候, 映射 j 是满射, 并且对于剩余类域在 k 上超越的那些 X 中的点 x, 集合 $j^{-1}(\{x\})$ 是无穷集.

由定义不难看出, 如果 U 是 X 的开子集, 那么 $j^{-1}(U)=U^{\mathrm{an}}$. 如果 $a\in\mathcal{O}_X(U)$, 对任意 $z\in U^{\mathrm{an}}$, 用 $a(z)$ 表示 a 在 $\kappa(z)$ 中的等价类, 并用 $|a|(z)$ 表示绝对值 $|a(z)|_z$. 这样可以将 $|a|$ 视为 U^{an} 上的实值函数, 称为 U 上正则函数 a 的**绝对值**.

定义 6.1.1. 所谓 X^{an} 上的 Berkovich **拓扑**, 是指使得映射 $j:X^{\mathrm{an}}\to X$ 和所有 X 的开子集上的正则函数的绝对值都连续的最粗的拓扑.

注 6.1.2. 假设 X 是 $\operatorname{Spec}k$ 上的概形, X 上的概形点体现了正则函数在 k 的不同扩张中的取值. 在 Zariski 拓扑之下 X 的开子集可以用正则函数取值非零的区域来刻画. 在 k 上引进绝对值以后, 仅靠概形点来描述正则函数的度量性质会比较繁琐, 这样的困难主要出现在非阿基米德绝对值的情形. Berkovich [10] 提出了非阿基米德解析空间的概念, 用剩余类域的绝对值作为参数空间来刻画. Berkovich 拓扑具有很好的性质, 比方说, 当结构态射 $X\to\operatorname{Spec}k$ 是分离态射时, X^{an} 是 Hausdorff 空间; 当 $X\to\operatorname{Spec}k$ 是真态射时, X^{an} 是紧拓扑空间 (见 [10, §3.4]).

Berkovich 的思想和实分析有些类似. 由于有理数域在实数域中是稠密的, 开区间上连续函数是被其在有理数点上的值决定的, 从而原则上可以将有理数域作为实分析的基准空间来讨论, 然而这样做的话需要排除一些病态的情形. 比方说 $\mathbb{Q}$ 上的连续函数未必是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数在 $\mathbb{Q}$ 上的限制. 虽然用 Grothendieck 拓扑的方法可以重构 "开覆盖" 的概念和连续函数丛, 进而得到和经典实分析等价的一些结果 (在非阿基米德框架下这正是 Tate 刚性空间理论 [119] 所采取的方法), 在实际问题的处理上比构造实数空间要复杂很多. 如今 Berkovich 的理论已成为非阿基米德几何的重要工具.

6.1.2 连续度量

设 L 为 X 上的线丛, 也就是说局部平凡的 $\mathcal{O}_X$-模. 对任意 $z\in X^{\mathrm{an}}$, 用 $L(z)$ 来表示 $L\otimes_k\widehat{\kappa}(z)$. 这是 $\widehat{\kappa}(z)$ 上的一维线性空间. 所谓 L 上的**度量**, 是指一族范数 $\varphi=(|\cdot|_\varphi(z))_{z\in X^{\mathrm{an}}}$, 其中 $|\cdot|_\varphi(z)$ 是 $\widehat{\kappa}(z)$-线性空间 $L(z)$ 上的范数. 如果 U 是 X 的开集且 s 是 $H^0(U,L)$ 中的元素, 用 $|s|$ 来表示映射

$$(z\in U^{\mathrm{an}})\longmapsto |s(z)|_\varphi(z),$$

其中 $s(z)$ 表示 s 在映射 $H^0(U,L)\to L\otimes_{\mathcal{O}_X}\widehat{\kappa}(x)$ 中的像. 如果对任意 L 在 X 的某开子集上的截面 s, 函数 $|s|_\varphi$ 都是连续函数, 那么我们说度量 φ 是**连续的**. 如果 φ 是 L 上的度量, 那么 $|\cdot|_\varphi(z)$ 的对偶范数组成了对偶线丛 $L^\vee$ 上的度量, 记作 $-\varphi$. 如果 φ 是连续度量, 那么 $-\varphi$ 也是连续度量.

设 L_1 和 L_2 为 X 上的线丛, φ_1 和 φ_2 分别为 L_1 和 L_2 上的度量. 用 $\varphi_1+\varphi_2$ 表示 $L_1\otimes L_2$ 上的度量, 使得对任意 $z\in X^{\mathrm{an}}$ 有

$$\forall\,(\ell_1,\ell_2)\in L_1(z)\times L_2(z),\quad |\ell_1\otimes\ell_2|_{\varphi_1+\varphi_2}(z)=|\ell_1|_{\varphi_1}(z)\cdot|\ell_2|_{\varphi_2}(z).$$

如果 φ_1 和 φ_2 都是连续度量, 那么 $\varphi_1+\varphi_2$ 亦然.

例 6.1.3. 设 E 为有限维 k-线性空间. 对任意 k-概形 X, 从 X 到射影空间 $\mathbb{P}(E)$ 的 k-态射 $f:X\to\mathbb{P}(E)$ 组成的集合与 $f^*(E\otimes_k\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)})=E\otimes_k\mathcal{O}_X$ 的商线丛的同构类集合之间有 (相对于 X) 函子性的一一对应. 特别地, $\mathbb{P}(E)$ 到自身的恒同映射对应于 $E\otimes_k\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$ 的一个商线丛, 记作 $\mathcal{O}_E(1)$, 称为 $\mathbb{P}(E)$ 的**泛线丛** (universal line bundle), 相应的商同态

$$E\otimes_k\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}\longrightarrow\mathcal{O}_E(1)$$

称为**泛商同态** (universal quotient homomorphism). 一般的 k-态射 $f:X\to\mathbb{P}(E)$ 对应的 $E\otimes_k\mathcal{O}_X$ 的商线丛等于泛线丛 $\mathcal{O}_E(1)$ 在态射 f 下的拉回.

设 $(E,\|\cdot\|)$ 为有限维赋范 k-线性空间, X 为 k-概形, L 为 X 上的线丛, X^{an} 为 X 的约化概形, L_{red} 为 L 在 X_{red} 上的限制. 注意到 $X^{\mathrm{an}}_{\mathrm{red}}=X^{\mathrm{an}}$, 并且对任意 $z\in X^{\mathrm{an}}$ 有 $L_{\mathrm{red}}(x)\cong L(x)$. 设 $f:X_{\mathrm{red}}\to\mathbb{P}(E)$ 为 k-概形的态射, 使得 $L_{\mathrm{red}}\cong f^*(\mathcal{O}_E(1))$. 对任意 $z\in X^{\mathrm{an}}$, 商映射

$$E\otimes_k\widehat{\kappa}(z)\longrightarrow L(z)$$

在 $L(z)$ 上诱导一个商范数 $|\cdot|(z)$, 使得

$$\forall\,\ell\in L(z),\quad |\ell|(z)=\inf_{\substack{s\in E,\,\lambda\in\widehat{\kappa}(z)^\times\\ s(z)=\lambda\ell}}|\lambda|^{-1}\cdot\|s\|,$$

其中 $s(z)$ 表示 $s\otimes 1$ 在上述泛线性映射下的像. 商范数族 $(|\cdot|(z))_{z\in X^{\mathrm{an}}}$ 组成 L 上的一个连续度量, 称为范数 $\|\cdot\|$ 和 k-态射 f 诱导的**商度量**. 特别地, 如果 f 是 $\mathbb{P}(E)$ 到自身的恒同态射, $\|\cdot\|$ 在 $\mathcal{O}_E(1)$ 上诱导的商度量称为 Fubini-Study **度量**.

设 X 为 k 上的射影概形, L 为 X 上的线丛. 此时 X^{an} 是紧 Hausdorff 拓扑空间. 如果 φ_1 和 φ_2 是 L 上两个连续度量, 用 $d(\varphi_1,\varphi_2)$ 表示

$$\sup_{z\in X^{\mathrm{an}}}\left|\ln\frac{|\cdot|_{\varphi_1}(z)}{|\cdot|_{\varphi_2}(z)}\right|,$$

其中

$$\frac{|\cdot|_{\varphi_1}(z)}{|\cdot|_{\varphi_2}(z)}\text{ 表示 }\frac{|\ell|_{\varphi_1}(z)}{|\ell|_{\varphi_2}(z)},$$

ℓ 是 $L(z)$ 中任一非零元素. 这样 L 上的连续度量构成的集合在映射 d 下构成一个完备的度量空间.

6.1.3 度量的拉回

设 $f:Y\to X$ 为 $\operatorname{Spec}k$ 上局部环层空间的态射. 用 $f^{\mathrm{an}}:Y\to X$ 表示将 $w\in Y^{\mathrm{an}}$ 映为

$$(f(j(w)),|\cdot|_w\text{ 在 }f(j(w))\text{ 的剩余类域上的限制})$$

的映射. 可以验证 f^{an} 在 Berkovich 拓扑下是连续映射.

设 L 为 X 上的线丛, φ 为 L 上的度量. 对任意 $y\in Y$, $L(f(y))$ 上的范数 $|\cdot|_\varphi(f(y))$ 通过赋值域的扩张 $\widehat{\kappa}(y)/\widehat{\kappa}(f(y))$ 诱导 $f^*L(y)$ 上的范数, 记作 $|\cdot|_{f^*(\varphi)}(y)$. 这样便得到线丛 $f^*(L)$ 上的一个度量, 记作 $f^*(\varphi)$, 称为 φ 在 $f^*(L)$ 上的**拉回**. 特别地, 如果 X 是 $\operatorname{Spec}k$ 上的概形, f 是闭浸入, 那么 $f^*(\varphi)$ 也称为 **φ 在 Y 上的限制**.

6.1.4 度量的正性质

设 X 为 k 上的射影概形, L 为 X 上的线丛. 如果 φ 是 L 上的连续度量, 用 $\|\cdot\|_\varphi$ 表示 $H^0(X_{\mathrm{red}},L_{\mathrm{red}})$ 上如下定义的范数

$$\forall\, s\in H^0(X_{\mathrm{red}},L_{\mathrm{red}}),\quad \|s\|_\varphi=\sup_{z\in X^{\mathrm{an}}}|s|(z),$$

其中 X_{red} 是 X 的约化概形, L_{red} 是 L 在 X_{red} 上的限制. 假设 L 没有基点 (base point), 也就是说对任意 $z\in X^{\mathrm{an}}$, 映射

$$H^0(X_{\mathrm{red}},L_{\mathrm{red}})\otimes_k\widehat{\kappa}(z)\longrightarrow L(z),\quad s\longmapsto s(z)$$

是满射, 那么对任意不小于 1 的自然数 n, 范数 $\|\cdot\|_{n\varphi}$ 在 $L^{\otimes n}$ 上诱导一个商度量. 我们用 φ_n 表示 L 上的度量, 使得 $\varphi_n^{\otimes n}$ 等于范数 $\|\cdot\|_{n\varphi}$ 诱导的商度

量. 可以证明, 对任意 L 上的连续度量 φ 和 ψ, 以及任意正整数 n 和 m, 有

$$\varphi_n \geqslant \varphi, \quad \|\cdot\|_{n\varphi_n} = \|\cdot\|_{n\varphi}, \quad d(\varphi_n, \varphi) \leqslant d(\varphi_1, \varphi),$$
$$\varphi_{n+m} \leqslant \varphi_n + \varphi_m, \quad d(\varphi_n, \psi_n) \leqslant d(\varphi, \psi).$$

另外, 如果 $(E, \|\cdot\|)$ 是有限维赋范 k-线性空间, $f : X_{\mathrm{red}} \to \mathbb{P}(E)$ 是 k-态射, φ 是 $\|\cdot\|$ 和 f 诱导的商度量, 那么对任意正整数 n 有 $\varphi_1 = \varphi$.

定义 6.1.4. 设 X 为 k 上的射影概形, L 为 X 上的线丛, φ 为 L 上的连续度量. 假设对于足够大的正整数 n, $L^{\otimes n}$ 没有基点. 用 $\mathrm{dp}(\varphi)$ 表示

$$\lim_{n\to+\infty} d(\varphi_n, \varphi)$$

并称之为 φ 的**失正性指标**. 如果 $\mathrm{dp}(\varphi) = 0$, 那么说 φ 是**半正度量**.

注 6.1.5. 假设 $(k, |\cdot|)$ 是赋通常绝对值的复数域 $\mathbb{C}$. 那么 φ 是半正度量当且仅当其曲率张量分布 (curvature current) 是半正的. 读者可以参考 [132, §2], [97, Theorem 0.2], [38, Theorem 2.3.7].

6.1.5 截面延拓的范数控制

设 X 为 k 上的整射影概形, L 为 X 上的丰沛线丛, Y 为 X 的整闭子概形, $\mathscr{I}_Y$ 为 Y 作为 X 的闭子概形的理想层. Serre 消没定理说明, 对足够大的自然数 n 有

$$H^1(X, \mathscr{I}_Y \otimes L^{\otimes n}) = 0,$$

从而限制映射

$$H^0(X, L^{\otimes n}) \longrightarrow H^0(Y, L|_Y^{\otimes n}), \quad s \longmapsto s|_Y \tag{6.1}$$

是满射.

设 φ 为 L 上的连续度量, φ_Y 为 φ 在 $L|_Y$ 上的限制. 对任意 $s \in H^0(X, L^{\otimes n})$ 有

$$\|s\|_{n\varphi} \geqslant \|s|_Y\|_{n\varphi_Y}.$$

这个不等式说明, 当 n 足够大, 使得限制映射 (6.1) 为满射时, $H^0(X, L^{\otimes n})$ 上的范数 $\|\cdot\|_{n\varphi}$ 在 $H^0(Y, L|_Y^{\otimes n})$ 上诱导的商范数 $\|\cdot\|_{n\varphi,\mathrm{quot}_Y}$ 不小于 $\|\cdot\|_{n\varphi_Y}$. 可以证明, 如果 φ 是半正的连续度量, 那么

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} d(\|\cdot\|_{n\varphi,\mathrm{quot}_Y}, \|\cdot\|_{n\varphi_Y}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sup_{\substack{t\in H^0(Y, L|_Y^{\otimes n})\\ t\neq 0}} \ln \frac{\|t\|_{n\varphi,\mathrm{quot}_Y}}{\|t\|_{n\varphi_Y}} = 0.$$

换句话说, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ 使得对于不小于 N_ε 的自然数 n 来说, 任意 $H^0(Y, L|_Y^{\otimes n})$ 中的截面 t 可以延拓成 $L^{\otimes n}$ 在 X 上的截面 s, 使得

$$\|t\|_{n\varphi_Y} \leqslant \|s\|_{n\varphi} \leqslant \mathrm{e}^{n\varepsilon} \|t\|_{n\varphi_Y}. \tag{6.2}$$

当 $(k, |\cdot|)$ 是赋通常绝对值的复数域并且度量 φ 具有一定正则性的时候, 可以用 Hörmander [69] 的 L^2 估计方法得到更强的估计 (在(6.2) 中将 $\mathrm{e}^{n\varepsilon}$ 替换成多项式增长的函数), 见 [102, 122, 91]. 对于一般的半正连续度量, 可以利用 Grauert [60] 的 1-凸性方法, 详见 [110, §2.7], [16]. 非阿基米德绝对值的情形是方延博 [50] 的结果.

6.2 度量族

令 K 为数域, S_K 为数域 K 上延拓 $\mathbb{Q}$ 上的通常或 p-进绝对值的绝对值全体构成的集合. 设 X 为 K 上的射影概形, L 为 X 上的线丛. 对任意 $v \in S_K$, 用 K_v 表示 K 相对于绝对值 $|\cdot|_v$ 的完备化域, 用 X_v 表示 $X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} K_v$ 并用 L_v 表示 L 在 X_v 上的限制. 用 $\mathcal{M}(L)$ 表示形如 $\varphi = (\varphi_v)_{v \in S_K}$ 的度量族组成的集合, 其中 φ_v 是 L_v 上的连续度量.

6.2.1 度量族的对偶和张量积

设 L 为 X 上的线丛. 对任意 $\varphi = (\varphi_v)_{v \in S_K} \in \mathcal{M}(L)$, 度量族 $(-\varphi_v)_{v \in S_K}$ 是 $\mathcal{M}(L^\vee)$ 中的元素, 我们将它记作 $-\varphi$.

如果 L_1 和 L_2 是 X 上两个线丛, $\varphi_1 = (\varphi_{1,v})_{v \in S_K}$ 和 $\varphi_2 = (\varphi_{2,v})_{v \in S_K}$ 分别是 $\mathcal{M}(L_1)$ 和 $\mathcal{M}(L_2)$ 中的元素, 那么 $(\varphi_{1,v} + \varphi_{2,v})_{v \in S_K}$ 是 $\mathcal{M}(L_1 \otimes L_2)$ 中的元素, 记作 $\varphi_1 + \varphi_2$.

设 L 为 X 上的线丛. 若 $\varphi = (\varphi_v)_{v \in S_K}$ 和 $\psi = (\psi_v)_{v \in S_K}$ 是 $\mathcal{M}(L)$ 中两个元素, 令

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{v \in S_K} [K_v : \mathbb{Q}_v]\, d(\varphi_v, \psi_v) \in [0, +\infty].$$

6.2.2 商度量族

设 X 为 K 上的射影概形, E 为 K 上的有限维线性空间, $f : X \to \mathbb{P}(E)$ 是从 X 到 $\mathbb{P}(E)$ 的 K-态射, $L = f^*(\mathcal{O}_E(1))$. 对任意 $v \in S_K$, 令 $X_v = X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} K_v$, $E_v = E \otimes_K K_v$, 并令 $f_v : X_v \to \mathbb{P}(E_v)$ 为 f 在基域扩张

K_v/K 之下诱导的 K_v-态射. 设 $\xi = (\|\cdot\|_v)_{v\in S_K}$ 为 $\mathcal{N}_K(E)$ 中的范数族. 对任意 $v \in S_K$, 将范数 $\|\cdot\|_v$ 和 K_v-态射

$$X_{v,\mathrm{red}} \longrightarrow X_v \xrightarrow{f} \mathbb{P}(E_v)$$

诱导 L_v 上的商度量记作 $\varphi_{\xi,v}$. 这样就得到 $\mathcal{M}(L)$ 中的一个度量族 $(\varphi_{\xi,v})_{v\in S_K}$. 我们称之为范数族 ξ 和态射 f 诱导的**商度量族**, 并将它记作 φ_ξ.

6.2.3 受控制的度量族

设 X 为 K 上的射影概形, L 为 X 上的线丛, $\varphi \in \mathcal{M}(L)$. 假设存在 X 上的线丛 L_1 和 L_2, 以及其上由受控制的范数族所诱导的商度量族 φ_1 和 φ_2, 使得 $L \cong L_1 \otimes L_2^\vee$ 且

$$d(\varphi, \varphi_1 - \varphi_2) < +\infty,$$

则说 φ 是**受控制的度量族**. 我们用 $\mathcal{M}^{\mathrm{dom}}(L)$ 表示 L 上所有受控制的度量族构成的集合. 可以证明受控制的度量族的张量积和对偶都是受控制的度量族 (见 [38, Proposition 6.1.12]).

6.2.4 度量族的拉回

设 $f : Y \to X$ 是 K 上射影概形之间的 K-态射. 对任意 $v \in S_K$, 用 $f_v : Y_v \to X_v$ 表示 f 在基域扩张 K_v/K 之下诱导的 K_v-态射. 假设 L 是 X 上的线丛, $\varphi = (\varphi_v)_{v\in S_K}$ 是 $\mathcal{M}(L)$ 中的度量族. 对任意 $v \in S_K$, 令 $f_v^*(\varphi_v)$ 为 L_v 上的度量 φ_v 在 $f_v^*(L_v)$ 上的拉回 (见 §6.1.3). 范数族 $(f_v^*(L_v))_{v\in S_K}$ 属于 $\mathcal{M}(f^*(L))$, 记作 $f^*(\varphi)$. 我们称之为 φ 在 $f^*(L)$ 上的**拉回**. 不难验证, 如果 φ 是商度量族, 那么 $f^*(\varphi)$ 也是商度量族; 如果 φ 是可积度量族, 那么 $f^*(\varphi)$ 也是可积度量族.

6.2.5 度量族视为范数族

令 K'/K 为有限扩张, $X = \mathrm{Spec}(K')$. 对任意 $v \in S_K$, X_v^{an} 等同于 K' 上延拓 $|\cdot|_v$ 的所有绝对值构成的集合. 设 L 为 X 上的线丛, 视为一维 K'-线性空间. 设 $\varphi = (\varphi_v)_{v\in S_K}$ 为 $\mathcal{M}(L)$ 中的度量族. 对任意 $v \in S_K$ 及 $x \in X_v^{\mathrm{an}}$, $|\cdot|_\varphi(x)$ 是 $L \otimes_{K'} K'_x$ 上的范数. 这样 $(|\cdot|_\varphi(x))_{x\in S_{K'}}$ 构成了 $\mathcal{N}_{K'}(L)$ 中的范数族. 不难验证, φ 是受控制的度量族当且仅当 $(|\cdot|_\varphi(x))_{x\in S_{K'}}$ 是受控制的范数

族. 为行文方便, 我们也用记号 (L,φ) 来表示带有范数族 $(|\cdot|_\varphi(x))_{x\in S_{K'}}$ 的一维 K'-线性空间 L.

6.3 Arakelov 高度

Arakelov 几何一个重要的动机是绕过坐标环的选取直接从算术射影簇的角度来研究丢番图问题. 所以代数点高度的构造是 Arakelov 几何的一个重要组成部分. Arakelov 高度依赖于算术射影簇上一个带度量族的线丛的选择. 将这个带度量族的线丛拉回到代数点之上, 就得到剩余类域上带范数族的一维线性空间. 这样就可以将代数点的高度定义成这个带范数族线性空间的 Arakelov 度数.

6.3.1 代数点的高度

令 X 为 K 上的射影概形, L 为 X 上的线丛, $\varphi\in\mathcal{M}^{\mathrm{dom}}(L)$ 为 L 上受控制的度量族. 若 P 为 X 中的闭点, $K(P)$ 为其剩余类域, 那么 P 可以看作是从 $\operatorname{Spec}K(P)$ 到 X 的 K-概形态射. 在 §6.2.5 中我们看到拉回度量族 $P^*(\varphi)$ 可以看作是一维 $K(P)$-线性空间 $P^*(L)$ 上的范数族, 并且这个范数族是受控制的. 从而可以依照定义 5.3.4 来求 $(P^*(L),P^*(\varphi))$ 的 Arakelov 度数. 我们用 $h_{(L,\varphi)}(P)$ 来表示

$$\frac{1}{[K(P):\mathbb{Q}]}\widehat{\deg}(P^*(L),P^*(\varphi)),$$

并称之为闭点 P 相对于 (L,φ) 的**高度**.

注 6.3.1. (1) 若 L_1 和 L_2 是 X 上两个线丛, $\varphi_1\in\mathcal{M}^{\mathrm{dom}}(L_1)$, $\varphi_2\in\mathcal{M}^{\mathrm{dom}}(L_2)$, 那么对任意 X 的闭点 P 有

$$h_{(L_1\otimes L_2,\varphi_1+\varphi_2)}(P)=h_{(L_1,\varphi_1)}(P)+h_{(L_2,\varphi_2)}(P).$$

(2) 设 K'/K 为有限扩张, $f:\operatorname{Spec}K'\to X$ 为 K-态射, P 为 f 的像, 那么以下等式成立:

$$\frac{1}{[K':\mathbb{Q}]}\widehat{\deg}(f^*(L),f^*(\varphi))=h_{(L,\varphi)}(P).$$

(3) 设 L 为 X 上的线丛, 如果 φ 和 φ' 是 $\mathcal{M}^{\mathrm{dom}}(L)$ 中两个度量族, 那么对任意 X 的闭点 P 有

$$|h_{(L,\varphi)}(P)-h_{(L,\varphi')}(P)|\leqslant\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}d(\varphi,\varphi').$$

6.3.2 Northcott 性质

Northcott 定理是一个代数点的有限性定理, 它说明了高度函数适用于描述数域上射影簇闭点的复杂度.

定理 6.3.2. 设 X 为数域 K 上的射影概形, L 为 X 上的丰沛线丛, $\varphi \in \mathcal{M}^{\mathrm{dom}}(L)$. 对任意正常数 δ 和 C, 集合

$$\{P \text{ 为 } X \text{ 中的闭点} \mid h_{(L,\varphi)}(P) \leqslant C, \quad [K(P):K] \leqslant \delta\}$$

是有限集.

注 6.3.3. 考虑 $X = \mathbb{P}^n_K = \mathbb{P}(K^{n+1})$ 的情形. 令 $L = \mathcal{O}_X(1)$ 为 X 的泛线丛. 在 K^{n+1} 上引进如下的范数族 $\xi = (\|\cdot\|_v)_{v \in S_K}$. 对任意 $(a_0, \ldots, a_n) \in K_v^{n+1}$, 如果 v 是非阿基米德绝对值, 令

$$\|(a_0, \ldots, a_n)\|_v := \max_{i \in \{0,\ldots,n\}} |a_i|_v;$$

如果 v 是阿基米德绝对值, 则令

$$\|(a_0, \ldots, a_n)\|_v := \sum_{i=0}^n |a_i|_v.$$

用 φ 表示范数族 ξ 诱导的商度量族.

假设 $\widetilde{K}/K$ 是有限扩张, $P : \operatorname{Spec} \widetilde{K} \to X$ 是 X 的取值在 $\widetilde{K}$ 中的代数点,

$$\widetilde{K}^{n+1} \longrightarrow P^*(L)$$

是 P 点处的泛线性映射. 在该泛线性映射的对偶映射

$$P^*(L) \longrightarrow (\widetilde{K}^{n+1})^\vee \cong \widetilde{K}^{n+1}$$

之下可以将 $P^*(L)$ 看成是 $\widetilde{K}^{n+1}$ 的一维线性子空间. 这个线性子空间的任意一个非零元 $(p_0, \ldots, p_n)$ 都定义了 P 的一个射影坐标 $(p_0 : \cdots : p_n)$. 注意到对任意 $x \in S_{\widetilde{K}}$, 如果 $\widetilde{K}$ 上的绝对值 $|\cdot|_x$ 延拓的是 $|\cdot|_v \in S_K$, 那么 $\|\cdot\|_v$ 在 $(\widetilde{K}_x^{n+1})^\vee \cong \widetilde{K}_x^{n+1}$ 上诱导的对偶范数 $\|\cdot\|_{x,*}$ 满足

$$\forall\, (b_0, \ldots, b_n) \in \widetilde{K}_x^{n+1}, \quad \|(b_0, \ldots, b_n)\|_{x,*} = \max_{i \in \{0,\ldots,n\}} |b_i|_x.$$

从而

$$h_{(L,\varphi)}(P) = \sum_{x \in \widetilde{K}} \frac{[\widetilde{K}_x : \mathbb{Q}_x]}{[\widetilde{K} : \mathbb{Q}]} \ln \max\{|p_0|_x, \ldots, |p_n|_x\},$$

其中 $(p_0:\cdots:p_n)$ 是 P 的任意一个射影坐标. 这个 Arakelov 高度函数其实就是经典的 Weil 高度函数.

当 $K=\mathbb{Q}$ 时, X 中的任意有理点 P 具有既约的整射影坐标

$$(p_0:\cdots:p_n),$$

其中 $p_0,\ldots,p_n$ 是整数, 其最大公约数为 1. 此时

$$h_{(L,\varphi)}(p_0:\cdots:p_n)=\max\{|p_0|,\ldots,|p_n|\},$$

其中 $|\cdot|$ 表示整数集上通常的绝对值函数.

6.4 射影概形的高度

从算术几何的观点来看, 射影概形代表的是齐次多项式方程组, 其闭点表示方程组的代数数解. 高度函数描述了 Diophantine 方程组解的复杂度. 如果射影概形是某射影空间 $\mathbb{P}^n$ 中的 δ 次超曲面, 它的齐次方程可以看作是 $\mathbb{P}^{\binom{n+\delta}{\delta}}$ 中的有理点. 这样用射影空间的高度函数可以描述超曲面的复杂度. 一般的射影簇的情形下, Philippon [105] 提出了用周形式 (Chow form) 的方法将问题转化成超曲面的情形. 用这个方法他发展了算术射影簇的高度理论. Faltings 利用算术相交理论给出了算术射影簇高度的另一个构造方法. 其后 Philippon [106, 107, 108] 和 Bost-Gillet-Soulé [19] 分别证明了这两种方法得到的高度函数是相同的.

6.4.1 混合结式

设 K 为域, X 为 K 上的整射影概形, d 为 X 的维数. 对任意 $i\in\{0,\ldots,d\}$, 令 E_i 为 k 上的有限维线性空间, $r_i=\dim_k(E_i)-1$, $f_i:X\to\mathbb{P}(E_i)$ 为闭浸入, L_i 为 $\mathbb{P}(E_i)$ 上的泛线丛 $\mathcal{O}_{E_i}(1)$ 在 X 上的限制. 对任意 $i\in\{0,\ldots,d\}$, 令 δ_i 为相交数

$$\deg(c_1(L_0)\cdots c_1(L_{i-1})c_1(L_{i+1})\cdots c_1(L_d)\cap[X]).$$

对任意 $i\in\{0,\ldots,n\}$, 射影空间 $\mathbb{P}(E_i)$ 上的泛线丛 (见例 6.1.3) $\mathcal{O}_{E_i}(1)$ 的对偶丛 $\mathcal{O}_{E_i}(-1)$ 可以看作自由向量丛

$$(E_i\otimes_K\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_i)})^\vee\cong E_i^\vee\otimes_K O_{\mathbb{P}(E_i)}$$

的子线丛. 用 Q_i 表示商向量丛

$$(E_i^\vee \otimes_K \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_i)})/\mathcal{O}_{E_i}(-1).$$

这是 $\mathbb{P}(E_i)$ 上秩为 r_i 的向量丛. 考虑如下 X-概形

$$I_X = \mathbb{P}(L_0 \otimes (Q_0|_X)) \times_X \cdots \times_X \mathbb{P}(L_d \otimes (Q_d|_X)).$$

注意到 $X \times_K \mathbb{P}(E_i^\vee)$ 可以看作是 X 上的射影空间 $\mathbb{P}(L_i \otimes (E_i^\vee \otimes_K \mathcal{O}_X))$, 其泛线丛是 $L_i \boxtimes \mathcal{O}_{E_i^\vee}(1)$. 由于 $L_i \otimes (Q_i|X)$ 是

$$L_i \otimes (E_i^\vee \otimes \mathcal{O}_X) = L_i \otimes (E_i^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_i)})|_X$$

的秩为 r_i 的商向量丛, $\mathbb{P}(L_i \otimes (Q_i|_X))$ 是 $X \times_K \mathbb{P}(E_i^\vee)$ 中的超曲面. 从而 I_X 可以看作

$$(X \times_K \mathbb{P}(E_0^\vee)) \times_X \cdots \times_X (X \times_K \mathbb{P}(E_d^\vee)) \cong X \times_K \mathbb{P}(E_0^\vee) \times_K \cdots \times_K \mathbb{P}(E_d^\vee)$$

中余维数为 $d+1$ 的闭子簇, 其在

$$\check{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(E_0^\vee) \times_K \cdots \times_K \mathbb{P}(E_d^\vee).$$

中的像是由

$$\mathcal{O}_{E_0^\vee}(\delta_0) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{O}_{E_d^\vee}(\delta_d)$$

的某个非零整体截面定义的超曲面. 我们将定义这个超曲面的任意一个

$$\mathrm{Sym}^{\delta_0}(E_0^\vee) \otimes_K \cdots \otimes_K \mathrm{Sym}^{\delta_d}(E_d^\vee)$$

中的元素称为 $f_0, \ldots, f_d$ 的**混合结式** (multi-resultant), 并用 $\mathscr{R}^X_{f_0,\ldots,f_d}$ 来表示 $f_0, \ldots, f_d$ 的混合结式生成的

$$\mathrm{Sym}^{\delta_0}(E_0^\vee) \otimes_K \cdots \otimes_K \mathrm{Sym}^{\delta_d}(E_d^\vee)$$

的一维线性子空间.

6.4.2 对偶张量积上的范数

设 $(F_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ 为某完备赋值域 $(k, |\cdot|)$ 上的赋范线性空间. 对偶空间的张量积 $F_1^\vee \otimes_k \cdots \otimes_k F_n^\vee$ 中的元素可以视为 $F_1 \times \cdots \times F_n$ 上的多重线性形式. 对任意 $R \in F_1^\vee \otimes_k \cdots \otimes_k F_n^\vee$, 令

$$\|R\| = \sup_{\substack{(s_1,\ldots,s_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n \\ s_1 \neq 0, \ldots, s_n \neq 0}} \frac{|R(s_1, \ldots, s_n)|}{\|s_1\|_1 \cdots \|s_n\|_n}.$$

这样定义的函数 $\|\cdot\|$ 是对偶张量积空间 $F_1^\vee \otimes_k \cdots \otimes_k F_n^\vee$ 上的范数, 称为**多重线性算子范数**. 当 $|\cdot|$ 是非阿基米德绝对值时这个范数是超范数.

6.4.3 Philippon 高度

本小节沿用 §6.4.1 的记号, 并假设 K 是数域. 对任意 $\delta_i \in \mathbb{N}$, 对称积 $\mathrm{Sym}^{\delta_i}(E_i^\vee)$ 中的元素可以视为 E_i 上的 δ_i 次齐次多项式. 事实上, 若用 $\Gamma^{\delta_i}(E_i)$ 表示张量空间 $E_i^{\otimes\delta_i}$ 中在对称群 $\mathfrak{S}_{\delta_i}$ 的作用下不变的张量构成的线性子空间, 那么 $\mathrm{Sym}^{\delta_i}(E_i^\vee)$ 是 $\Gamma^{\delta_i}(E_i)$ 的对偶空间, 这样

$$\mathrm{Sym}^{\delta_0}(E_0^\vee) \otimes_K \cdots \otimes_K \mathrm{Sym}^{\delta_d}(E_d^\vee)$$

中的任意元素 R 决定了从 $E_0 \times \cdots \times E_d$ 到 K 的函数, 将 $(s_0, \ldots, s_r)$ 映为

$$R(s_0^{\otimes\delta_0} \otimes \cdots \otimes s_d^{\otimes\delta_d}).$$

类似地, 对任意 $v \in S_K$,

$$\mathrm{Sym}^{\delta_0}(E_{0,v}^\vee) \otimes_K \cdots \otimes_K \mathrm{Sym}^{\delta_d}(E_{d,v}^\vee)$$

中的任意元素 R 决定了从 $E_{0,v} \times \cdots \times E_{d,v}$ 到 K_v 的函数. 为方便起见, 对任意 $(s_0, \ldots, s_d) \in E_{0,v} \times \cdots \times E_{d,v}$, 我们用 $R(s_0, \ldots, s_d)$ 来表示 $(s_0, \ldots, s_d)$ 在该函数下的像.

对任意 $i \in \{0, \ldots, d\}$, 令 $\xi_i = (\|\cdot|_{i,v})_{v \in S_K}$ 为 E_i 上受控制的范数族 (见定义 5.3.1), 使得当 v 是阿基米德绝对值时 $\|\cdot\|_{i,v}$ 是由内积诱导的范数. 当 v 是非阿基米德绝对值时, 将线性空间

$$\mathrm{Sym}^{\delta_0}(E_{0,v}^\vee) \otimes_K \cdots \otimes_K \mathrm{Sym}^{\delta_d}(E_{d,v}^\vee)$$

看成对偶张量积空间

$$(E_{0,v}^\vee)^{\otimes\delta_0} \otimes_K \cdots \otimes_K (E_{d,v}^\vee)^{\otimes\delta_d}$$

的商空间, 并赋之以多重线性算子范数的商范数 $\|\cdot\|_v$. 假设 v 是阿基米德绝对值, 我们取一个域同态 $\sigma_v : K \to \mathbb{C}$ 使得 $|\cdot|_v$ 是 $\mathbb{C}$ 上通常的绝对值与 σ_v 的复合. 对任意 $i \in \{0, \ldots, d\}$, 范数 $\|\cdot\|_{i,v}$ 对应于 $E_i \otimes_{K,\sigma_v} \mathbb{C}$ 上的一个 Hermite 内积. 令 $\mathbb{S}_{i,v}$ 为 $E_i \otimes_{K,\sigma_v} \mathbb{C}$ 的单位球面并令 $\eta_{i,v}$ 为 $\mathbb{S}_{i,v}$ 上在酉群的作用下不变的 Borel 概率测度. 对任意

$$R \in \mathrm{Sym}^{\delta_0}(E_{0,v}^\vee) \otimes_K \cdots \otimes_K \mathrm{Sym}^{\delta_d}(E_{d,v}^\vee),$$

我们记

$$\|R\|_v := \exp\bigg(\int_{\mathbb{S}_{0,v}\times\cdots\times\mathbb{S}_{d,v}} \ln|R(z_0,\ldots,z_d)|\,\eta_{0,v}(\mathrm{d}z_0)\otimes\cdots\otimes\eta_{d,v}(\mathrm{d}z_d)\bigg) \cdot \exp\bigg(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{d}\sum_{\ell=1}^{r_i}\frac{1}{\ell}\bigg).$$

注意到对任意 $\lambda \in K_v$ 有

$$\|\lambda R\|_v = |\lambda|_v \cdot \|R\|_v,$$

但函数 $\|\cdot\|_v$ 一般不满足三角形不等式.

定义 6.4.1. 假设 R 是 $f_0,\ldots,f_d$ 的混合结式. 那么 X 相对于 $\xi_0,\ldots,\xi_d$ 和 $f_0,\ldots,f_d$ 的 Philippon **高度**定义为

$$h_{\xi_0,\ldots,\xi_d}^{f_0,\ldots,f_d}(X) := \sum_{v\in S_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \ln\|R\|_v.$$

注 6.4.2. 对任意 $i \in \{0,\ldots,d\}$, 令 φ_i 为范数族 ξ_i 在 $L_i = f_i^*(\mathcal{O}_{E_i}(1))$ 上诱导的商度量族 (见 §6.2.2). 可以证明 Philippon 高度 $h_{\xi_0,\ldots,\xi_d}^{f_0,\ldots,f_d}(X)$ 等于算术相交数

$$\big((L_0,\varphi_0)\cdots(L_d,\varphi_d)\big).$$

更进一步地, 如果 $s_0,\ldots,s_d$ 分别是 $L_0,\ldots,L_d$ 的整体截面, 使得它们定义的除子完全相交 (intersect completely), 那么在混合结式空间 $\mathscr{R}^X_{f_0,\ldots,f_d}$ 中存在唯一的一个元素 R 使得

$$R(s_0,\ldots,s_d) = 1.$$

此时对任意 $v \in S_K$, $\ln\|R\|_v$ 等于算术除子 $\widehat{\mathrm{div}}(s_0),\ldots,\widehat{\mathrm{div}}(s_d)$ 在 v 处的局部相交数. 读者可以参考 [39].

更一般地, 如果 $M_0,\ldots,M_d$ 是 X 上丰沛的线丛, $\psi_0,\ldots,\psi_d$ 是 $M_0,\ldots,M_d$ 上由半正度量 (见定义 6.1.4) 组成的受控制的度量族 (见 §6.2.3), 文献中将 X 相对于 $\overline{M}_0,\ldots,\overline{M}_d$ 的**高度** 定义为 $(M_0,\psi_0),\ldots,(M_d,\psi_d)$ 的算术相交数. 特别地, 当 $(M_0,\psi_0),\ldots,(M_d,\psi_d)$ 都等于某个带度量族的线丛 (L,φ) 时, X 相对于 (L,φ) 的高度定义为 (L,φ) 的算术自相交数, 记作 $h_{(L,\varphi)}(X)$.

6.5 Hilbert-Samuel 定理

设 X 为域 K 上的射影概形, L 为 X 上的丰沛线丛, 渐近 Riemann-Roch 定理说明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dim_K(H^0(X,L^{\otimes n}))}{n^d}=\frac{(L^d)}{d!},\tag{6.3}$$

其中 d 是 X 的 Krull 维数, (L^d) 表示 L 的自相交数. 在 Arakelov 几何之中, 与这个命题类似的结论叫作算术 Hilbert-Samuel 定理. 它揭示了算术分次线性系 (arithmetic graded linear series) 的渐近性质与算术相交数之间的联系.

6.5.1 线丛的分次线性系

设 K 为域, X 为 K 上的整射影概形, L 为 X 上的线丛. 那么

$$V_\bullet(L):=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}H^0(X,L^{\otimes n})$$

是 K 上的分次代数. 这个代数的分次子代数称为 L 的**分次线性系**. 一般来说 $V_\bullet(L)$ 不是有限生成 K-代数, 但当 L 是丰沛线丛时 $V_\bullet(L)$ 是有限生成的. 对于一般的线丛 L, 存在某丰沛的线丛 M 使得 $L^\vee\otimes M$ 有非零的整体截面 s. 这个整体截面定义了 K-代数的单同态

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}H^0(X,L^{\otimes n})\longrightarrow\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}H^0(X,M^{\otimes n}),\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto(s^nu_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

这说明了 X 上任意一个线丛的分次线性系都是**子有限生成的**, 也就是说它是某个有限生成 K 代数的子代数.

6.5.2 算术分次线性系

设 K 为数域, X 为 K 上几何整的射影概形, L 为 X 上的线丛, $\varphi=(\varphi_v)_{v\in S_K}$ 为 L 上受控制的度量族. 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 及 $v\in S_K$, $L_v^{\otimes n}$ 上的度量 $n\varphi_v$ 诱导了

$$V_n(L)\otimes_K K_v\cong H^0(X_v,L_v^{\otimes n})$$

上的范数 $\|\cdot\|_{n\varphi_v}$, 其定义为

$$\forall\, s_n\in H^0(X_v,L_v^{\otimes n}),\quad \|s_n\|_{n\varphi_v}=\sup_{x\in X_v^{\mathrm{an}}}|s_n|_{n\varphi_v}(x).$$

注意到对任意 $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ 及任意

$$(s_n,s_m)\in H^0(X_v,L_v^{\otimes n})\times H^0(X_v,L_v^{\otimes m}),$$

以下不等式成立

$$\|s_n\cdot s_m\|_{(n+m)\varphi_v}\leqslant\|s_n\|_{n\varphi_v}\cdot\|s_m\|_{m\varphi_v}.$$

另外, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $V_n(L)$ 上的范数族 $(\|\cdot\|_{n\varphi_v})_{v\in S_K}$ 是受控制的范数族. 如果 $V_\bullet$ 是 L 的分次线性系, ξ_n 是范数族 $(\|\cdot\|_{n\varphi_v})_{v\in S_K}$ 在 V_n 上的限制, 那么

$$(V_n,\xi_n),\quad n\in\mathbb{N}$$

称为 (L,φ) 的算术分次线性系.

定理 6.5.1 (**算术** Hilbert-Samuel **定理**)**.** *设 K 为数域, X 为 K 上几何整的射影概形, $d=\dim(X)$, L 为 X 上的丰沛线丛, $\varphi=(\varphi_v)_{v\in S_K}$ 为 L 上由半正度量组成的受控制的度量族. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\xi_n=(\|\cdot\|_{n\varphi_v})_{v\in S_K}$. 那么序列*

$$\frac{1}{n^{d+1}}\widehat{\deg}(H^0(X,L^{\otimes n}),\xi_n),\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 1$$

收敛到

$$\frac{h_{(L,\varphi)}(X)}{(d+1)!}=\frac{(\overline{L}^{d+1})}{(d+1)!}.$$

这个定理最初是 Gillet 和 Soulé 用他们的算术 Riemann-Roch 定理证明的. 但为了适用算术 Riemann-Roch 定理的条件, 对算术线丛的度量有光滑性的要求. 之后 Abbes 和 Bouche [1] 用与代数几何中 Hilbert-Samuel 定理证明类似的方法给出了不依赖于算术 Riemann-Roch 定理的证明, 但他们的证明用到了 L^2 估计, 仍对度量的正则性有要求. 之后 Maillot [90] 和 Randriambololona [110] 分别将算术 Hilbert-Samuel 定理推广到一般的连续度量和非约化算术射影簇的情形. Adèle 语言下的算术 Hilbert-Samuel 定理可以参考 [131].

注 6.5.2. 在定理 6.5.1 的记号和假设下, 结合几何 Hilbert-Samuel 定理 (6.3) 可以得到如下公式:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\widehat{\deg}(H^0(X,L^{\otimes n}),\xi_n)}{n\dim_K(H^0(X,L^{\otimes n}))}=\frac{(\overline{L}^{d+1})}{(d+1)(L^d)}.\tag{6.4}$$

7 代数几何和算术几何中的凸分析方法

代数几何中的凸几何方法具有将近半个世纪的历史, 最初起源于 Demazure [45] 在上个世纪七十年代引进的环面簇的概念. 很快人们发现环面簇是代数几何研究很好的模型. 环面簇的构造具有组合意味, 很多代数几何的结果在环面簇的情形可以非常具体地计算并和凸几何建立紧密的联系. 这为代数几何的研究带来了新方法. 特别地, Bernstein, Kušnirenko, 和 Khovanskiĭ [11, 79, 12] 将 Laurent 多项式公共根的个数和它们的 Newton 多面体的混合容量建立了联系, 之后 Teissier [121] 和 Khovanskiĭ [76] 反过来用环面簇的代数几何方法 (Hodge 指标定理) 证明多面体混合容量的 Alexandrov-Fenchel 不等式. 近年来, Lazarsfeld, Mustaţă [85] 和 Kaveh, Khovanskiĭ [74] 将凸几何的思想运用到一般射影簇的研究上, 得到了关于分次线性系渐近性质的一系列新成果. 由于涉及的线丛只具有非常弱的正性质, 传统的代数几何方法, 比如 Riemann-Roch 定理或消没定理等, 难以适用于如此一般的情形. 其后他们的结果又在 [130] 和 [21] 中以两种不同的方式移植到 Arakelov 几何的框架之中.

7.1 半群代数的组合

7.1.1 多项式代数

设 k 为域, $R=k[T_0,\ldots,T_d]$ 为 k 上的 $d+1$ 元多项式代数, 其中 $d\in\mathbb{N}$. 可以将多项式代数 R 按照次数分解成齐次多项式空间的直和, 这样得到一个 $\mathbb{N}$-分次 k-代数 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}R_n$, 其中 R_n 为 n 次齐次多项式组成的线性空间. 我们将这个分次代数记作 $R_\bullet$. 从代数几何的角度也可以将 $R_\bullet$ 看成射影空间 $\mathbb{P}^d_k$ 上泛线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_k}(1)$ 张量幂的截面代数

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}H^0(\mathbb{P}^d_k,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_k}(n)).$$

注意到 n 次单项式

$$T_0^{a_0}\cdots T_d^{a_d},\quad (a_0,\ldots,a_d)\in\mathbb{N}^d,\ a_0+\cdots+a_d=n$$

构成 R_n 作为 k 线性空间的一组基. 这组基一一对应于单纯形

$$\Delta_d=\{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d_{\geqslant 0}\mid x_1+\cdots+x_d\leqslant 1\}$$

中以分母整除 n 的分数为坐标的点构成的集合. 特别地, $R_\bullet$ 的 Hilbert 函数

$$\dim_k(R_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

满足条件

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dim_k(R_n)}{n^d} = \mathrm{vol}(\Delta_d) = \frac{1}{d!}.$$

当然这个关系也可以从等式

$$\dim_k(R_n) = \binom{d+n}{d}$$

出发, 通过关系

$$\binom{d+n}{n} = \frac{(n+d)\cdots(n+1)}{d!} = \frac{1}{d!}n^d + O(n^{d-1}), \quad n \to +\infty$$

得到.

7.1.2 半群代数

令 $d \in \mathbb{N}$, Γ 为 $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ 的加法子幺半群, 使得

$$\Gamma_0 := \{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d \mid (0, a_1, \ldots, a_d) \in \Gamma\} = \{(0, \ldots, 0)\}.$$

用 $k[\Gamma]$ 表示 Γ 生成的半群代数. 作为 k-线性空间 $k[\Gamma]$ 是 Γ 生成的自由 k-线性空间. 我们将 $k[\Gamma]$ 的标准基形式地记为

$$\mathrm{e}^\gamma, \quad \gamma \in \Gamma.$$

作为 k-代数, $k[\Gamma]$ 的乘法运算满足

$$\forall\, (\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma, \quad \mathrm{e}^\gamma \cdot \mathrm{e}^{\gamma'} = \mathrm{e}^{\gamma+\gamma'}.$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\Gamma_n = \{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d \mid (n, a_1, \ldots, a_d) \in \Gamma\}.$$

这样 k-代数 $k[\Gamma]$ 具有如下 $\mathbb{N}$-分次结构

$$k[\Gamma]_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} k^{\oplus\Gamma_n}$$

例 7.1.1. 设 Δ 为 $\mathbb{R}^d$ 的内部非空的凸子集. 构造 $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ 的子集 $\Gamma(\Delta)$ 如下:

$$\Gamma(\Delta) := \{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d \mid \alpha\in n\Delta\},$$

其中 $n\Delta := \{nx \mid x\in\Delta\}$. 由 Δ 的凸性知 $\Gamma(\Delta)$ 是 $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ 的子幺半群. 另外, 对任意正整数数 n, 有

$$\Gamma(\Delta)_n = \{\alpha\in\mathbb{Z}^d \mid \tfrac{1}{n}\alpha\in\Delta\}.$$

当 n 趋于无穷时, 凸集 Δ 中坐标为分母整除 n 的分数的有理点上的加权 Riemann 和收敛到 Lebesgue 积分, 所以

$$\#\Gamma(\Delta)_n = \mathrm{vol}(\Delta)n^d + o(n^d),\quad n\to+\infty.$$

特别地, 当 Δ 有界时半群代数 $k[\Gamma]_\bullet$ 的 Hilbert 函数满足

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dim_k(k[\Gamma(\Delta)]_n)}{n^d} = \mathrm{vol}(\Delta). \tag{7.1}$$

当 Δ 是单纯形

$$\{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d_{\geqslant} \mid x_1+\cdots+x_d\leqslant 1\}$$

时, 半群代数 $k[\Gamma(\Delta)]$ 同构于多项式代数 $k[T_0,\ldots,T_d]$, 从而 §7.1.1 可以看作半群代数的特例.

回到 Γ 是一般的 $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ 的加法子幺半群的情形. 令 $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ 为 Γ 生成的 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d$ 的子群, $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 为 Γ 生成的 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 的 $\mathbb{R}$-线性子空间. 对任意 $n\in\mathbb{Z}$, 令

$$\Gamma_{\mathbb{Z},n} = \{\alpha\in\mathbb{Z}^d \mid (n,\alpha)\in\Gamma_{\mathbb{Z}}\}.$$

另外, 用 $\mathbb{N}(\Gamma)$ 和 $\mathbb{Z}(\Gamma)$ 分别表示

$$\{n\in\mathbb{N} \mid \Gamma_n\neq\varnothing\}\text{ 和 }\{n\in\mathbb{N} \mid \Gamma_{\mathbb{Z},n}\neq\varnothing.\}$$

从定义看出, $\mathbb{N}(\Gamma)$ 是 $\mathbb{N}$ 的子幺半群, $\mathbb{Z}(\Gamma)$ 是 $\mathbb{N}(\Gamma)$ 生成的 $\mathbb{Z}$ 的子群. 从而存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathbb{Z}(\Gamma)=n_0\mathbb{Z}$. 另外存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $n_0a\in\mathbb{N}(\Gamma)$ 对任意 $a\in\mathbb{N}_{\geqslant N}$ 成立. 利用 Bézout 定理不难证明 $(\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}(\Gamma))\setminus\mathbb{N}(\Gamma)$ 是有限集, 换句话说, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathbb{Z}(\Gamma)$ 中任意不小于 N 的整数都属于 $\mathbb{N}(\Gamma)$.

假设 $\mathbb{Z}(\Gamma)\neq\{0\}$, 那么

$$\Gamma_{\mathbb{R}}\cap(\{1\}\times\mathbb{R}^d)$$

是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 的仿射子空间[46], 其对应的平行线性子空间是

$$\Gamma_{\mathbb{R}}\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^d).$$

另外,

$$\Gamma_{\mathbb{Z}}\cap(\{0\}\times\mathbb{Z}^d)$$

是这个线性子空间中的网格, 也就是说生成该线性子空间的离散子群. 我们赋

$$\Gamma_{\mathbb{R}}\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^d).$$

以唯一的使得该网格的余体积为 1 的 Haar 测度.

令 $A(\Gamma)$ 为仿射空间 $\Gamma_{\mathbb{R}}\cap(\{1\}\times\mathbb{R}^d)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的投影. 它是 $\mathbb{R}^d$ 的仿射子空间. 前面提到的 $\Gamma_{\mathbb{R}}\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^d)$ 上的 Haar 测度通过平移和投影诱导 $A(\Gamma)$ 上的 Borel 测度, 记作 $\mathrm{vol}(\cdot)$. 用 $\Delta(\Gamma)$ 表示

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N},\,n\geqslant 1}\{\tfrac{1}{n}\alpha\mid\alpha\in\Gamma_n\}$$

在 $\mathbb{R}^d$ 中的闭包. 它是仿射空间 $A(\Gamma)$ 的凸闭子集, 并且张成整个仿射空间 $A(\Gamma)$ (也就是说 $A(\Gamma)$ 中的每个元素可以写成 $\Delta(\Gamma)$ 中一些元素的系数和为 1 的实线性组合). 另外, $\Delta(\Gamma)$ 在 $A(\Gamma)$ 中的相对内点集非空, 这说明了 $\Delta(\Gamma)$ 是仿射空间 $A(\Gamma)$ 中的凸体.

Khovanskiĭ [77, §1] 将 Bésout 定理推广到了高维网格的情形 (读者也可以参考 [20, §1]).

命题 7.1.2. 设 E 为 $A(\Gamma)$ 的紧的凸子集, $\Delta(\Gamma)^\circ$ 为 $\Delta(\Gamma)$ 在 $A(\Gamma)$ 中的相对内部. 假设 $E\subset\Delta(\Gamma)^\circ$, 那么存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对于不小于 N 的自然数 n 有

$$E\cap\{\tfrac{1}{n}\alpha\mid\alpha\in\Gamma_n\}=E\cap\{\tfrac{1}{n}\alpha\mid\alpha\in\Gamma_{\mathbb{Z},n}\}.$$

利用这个命题 Kaveh 和 Khovanskiĭ [74, Theorem 1.15] 在 Γ 为 $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ 一般的子幺半群的情形得到了类似于例 7.1.1 的结论.

定理 7.1.3. 设 Γ 为 $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ 的加法子幺半群, $R_\bullet=k[\Gamma]$. 假设 $\mathbb{N}(\Gamma)\neq\{0\}$, 那么如下等式成立:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}(\Gamma),\,n\to+\infty}\frac{\dim_k(R_n)}{n^{\dim(A(\Gamma))}}=\mathrm{vol}(\Delta(\Gamma)).$$

[46] 即线性子空间的平移.

7.2 环面簇

关于环面簇的几何, 读者可以参考 [101, 55].

7.2.1 环面与环面簇

设 k 为域. 用 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ 表示 $\operatorname{Spec}(k[T,T^{-1}])$. 对任意 k-代数 A, 从 $\operatorname{Spec} A$ 到 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ 的 k-态射的集合 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}(A)$ 和 A 的乘法可逆元构成的乘法群 $A^{\times}$ 有函子性的一一对应, 从而 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ 具有一个 $\operatorname{Spec} k$ 上的群概形结构. 对任意 $d\in\mathbb{N}$, $\operatorname{Spec} k$-上的群概形 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 称为 k **上的** d **维环面**. 特别地, $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 的群概形结构对应于一个概形的 k-态射

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d\times_k\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d\longrightarrow\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d \tag{7.2}$$

这个态射也可以看成是 k-群概形 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 在自身上的作用.

所谓 k 上的 d 维**环面簇**, 是指在 $\operatorname{Spec} k$ 上整闭的整概形 X, 赋有一个从 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 到 X 的开浸入和 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 在 X 上的左作用

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d\times_k X\longrightarrow X,$$

使得在上述开浸入 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d\to X$ 之下该 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 在 X 上的左作用延拓 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 在自身上的作用 (7.2).

7.2.2 组合描述

设 d 为自然数. 用 N 来表示从 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ 到 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 的所有 k-群概形的态射组成的群. 这个群自然同构于 $\mathbb{Z}^d$. 用 M 表示 N 的对偶 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Z})$, 也就是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 的特征标组成的群. 用 $N_{\mathbb{R}}$ 和 $M_{\mathbb{R}}$ 分别表示 $N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 和 $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$.

所谓 $N_{\mathbb{R}}$ 中的**有理多面体锥**, 是指形如

$$\sigma=\{\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_rv_r\mid(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in\mathbb{R}_{\geqslant0}^r\}$$

的 $N_{\mathbb{R}}$ 的子集, 其中 $\{v_1,\ldots,v_r\}$ 是 N 的有限子集 (我们说 σ 是由 $\{v_1,\ldots,v_r\}$ **生成的**); 类似地可以定义 $M_{\mathbb{R}}$ 中的有理多面体锥. 如果 σ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 中的有理多面体锥, 用 $\sigma^{\vee}$ 表示

$$\{\alpha\in M_{\mathbb{R}}\mid\forall\,x\in\sigma,\ \alpha(x)\geqslant0\}.$$

可以证明 $\sigma^\vee$ 是 $M_\mathbb{R}$ 中的有理多面体锥, 称为 σ 的**对偶锥**. 如果将 N 与其双重对偶等同起来, 那么有 $\sigma^{\vee\vee}=\sigma$. 另外, Gordon 引理说明了, 对任意 $N_\mathbb{R}$ 中的有理多面体 σ, 集合 $M_\sigma := M\cap\sigma^\vee$ 是 M 的有限生成子幺半群.

令 σ 为 $N_\mathbb{R}$ 中的有理多面体锥, 所谓 σ 的**面**, 是指 M_σ 中某线性形式的核与 σ 的交. 可以证明 σ 的面都是有理多面体锥. 如果 $\{0\}$ 是 σ 的面, 或等价地, M_σ 张成整个 $\mathbb{R}$-线性空间 $M_\mathbb{R}$, 我们说 σ 是**严格凸**的并用 X_σ 来表示仿射概形 $\mathrm{Spec}(k[M_\sigma])$, 其中 $k[M_\sigma]$ 表示幺半群 M_σ 生成的 k 上的幺半群代数. 作为 k-线性空间 $k[M_\sigma]$ 是由 M_σ 生成的自由 k-线性空间, 其标准基形式地记为

$$\mathrm{e}^\alpha,\quad \alpha\in M_\sigma.$$

作为 k-代数, $k[M_\sigma]$ 的乘法运算满足

$$\forall\,(\alpha,\alpha')\in M_\sigma\times M_\sigma,\quad \mathrm{e}^\alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha'}=\mathrm{e}^{\alpha+\alpha'}.$$

如果 τ 是 σ 的面, 那么 $k[M_\tau]$ 同构于 $k[M_\sigma]$ 相对于一个元素的局部化, 从而 X_τ 可以看作是 X_σ 的一个开子概形. 特别地, $X_{\{0\}}=\mathrm{Spec}(k[M])$ 等同于环面 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$, 从而环面 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 是 X_σ 的开子概形. 可以证明 X_σ 总是整闭的整 k-概形, 它是正则概形当且仅当 σ 由 N 在 $\mathbb{Z}$ 上的一组基生成. 注意到 k-代数同态

$$k[M_\sigma]\longrightarrow k[M_\sigma]\otimes_k k[M],\quad \mathrm{e}^\alpha\longmapsto \mathrm{e}^\alpha\otimes\mathrm{e}^\alpha$$

对应的 k-概形态射

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d\times X_\sigma\longrightarrow X_\sigma \tag{7.3}$$

是群概形 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 在 X_σ 上的左作用. 这个左作用延拓环面 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 在自身上的作用, 从而 X_σ 是一个环面簇.

所谓 $N_\mathbb{R}$ 中的**扇**, 是指 $N_\mathbb{R}$ 中有限多个严格凸的有理多面体锥组成的非空集合 Σ, 使得对任意 $(\sigma,\sigma')\in\Sigma\times\Sigma$, 交集 $\sigma\cap\sigma'$ 是有理多面体锥 σ 与 σ' 的公共面. 从而 $X_{\sigma\cap\sigma'}$ 同时是 X_σ 和 $X_{\sigma'}$ 开子概形. 给定 $N_\mathbb{R}$ 中的扇 Σ, 将仿射 k-概形 $(X_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ 粘贴起来得到一个 k-概形 X_Σ. 上述环面的左作用 (7.3) 也可粘贴起来得到 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 在 X_Σ 的左作用, 这个左作用也延拓环面 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 在自身上的作用, 从而 X_Σ 是环面簇. 令 $|\Sigma|$ 为扇 Σ 的**支集**, 其定义为

$$|\Sigma|:=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\sigma.$$

可以证明, 结构态射 $X_\Sigma \to \operatorname{Spec} k$ 是真态射 (proper morphism) 当且仅当 $|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$; X_Σ 是正则概形 (regular scheme) 当且仅当 Σ 中的每个有理多面体锥 σ 都是由 N 的某一组整基中的一些向量生成的.

7.2.3 环面除子

本小节中我们沿用 §7.2.2 的记号. 令 Σ 为 $N_{\mathbb{R}}$ 中的扇, X_Σ 为 Σ 对应的环面簇. 所谓 X_Σ 上的**环面除子**, 是指 X_Σ 的在环面 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 的作用下不变的 Cartier 除子.

设 D 为 X_Σ 上的环面除子, 在每个仿射开集 X_σ 上, D 对应于一个在环面 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ 的作用下不变的有理函数, 它形如 $\mathrm{e}^{-\alpha_\sigma}$, 其中 α_σ 是 M 中的元素. 另外, 对任意 $(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma$ 有 $\alpha_\sigma - \alpha_{\sigma'} \in M_{\sigma \cap \sigma'}$. 特别地, $\alpha_\sigma - \alpha_{\sigma'}$ 和 $\alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma$ 同时在 $\sigma \cap \sigma'$ 上非负, 这说明 α_σ 和 $\alpha_{\sigma'}$ 在 $\sigma \cap \sigma'$ 上的限制相等. 这样可以将 X_Σ 上的环面除子用拟支撑函数来表示. 所谓 $|\Sigma|$ 上的**拟支撑函数**, 是指实值连续函数 $\psi : |\Sigma| \to \mathbb{R}$, 在每个 Σ 中的有理多面体锥 σ 上的限制与 M 中的某个线性形式在 σ 上的限制相等. 我们用 D_ψ 来表示拟支撑函数 ψ 对应的环面除子. 不难验证, D_ψ 是实效除子 (effective divisor) 当且仅当 ψ 是非负函数. 两个环面除子 D_ψ 和 $D_{\psi'}$ 有理等价当且仅当对应的拟支撑函数 ψ 和 ψ' 之差等于 M 中的某个线性形式.

7.2.4 环面除子的整体截面

本小节中仍沿用 §7.2.2 的记号. 设 Σ 为 $N_{\mathbb{R}}$ 中的扇, $\psi : |\Sigma| \to \mathbb{R}$ 为拟支撑函数. 可以证明,

$$\{\mathrm{e}^\alpha \mid \alpha \in M,\ \forall\, x \in |\Sigma|,\ \psi(x) \leqslant \alpha(x)\}$$

是实线性空间 $H^0(X_\Sigma, D_\psi)$ 的一组基. 特别地, 如果用 Δ_ψ 表示集合

$$\bigcap_{\sigma \in \Sigma} \{\alpha \in M_{\mathbb{R}} \mid \forall\, x \in \sigma,\ \psi(x) \leqslant \alpha(x)\},$$

那么

$$H^0(X_\Sigma, D_\psi) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_\psi \cap M} k\,\mathrm{e}^\alpha.$$

这说明了分次代数 $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^0(X_\Sigma, nD_\psi)$ 等于 $\mathbb{N} \times M \cong \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ 的子幺半群

$$\Gamma(\Delta_\psi) = \{(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times M \mid \alpha \in n\Delta_\psi\}$$

生成的半群代数. 由定理 7.1.3 得到, 当 Δ_ψ 非空时,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dim_k(H^0(X_\Sigma, nD_\psi))}{n^{\dim(\Delta_\psi)}}=\mathrm{vol}(\Delta_\psi).$$

7.3 Newton-Okounkov 凸体

设 k 为域, X 为 $\operatorname{Spec} k$ 上的整概形, $k(X)$ 为 X 上的有理函数域. 所谓 X 上的**分次线性系**, 是指多项式环

$$k(X)[T]=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}k(X)T^n$$

的分次子 k-代数

$$V_\bullet=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}V_nT^n,$$

使得每个 V_n 都是有限维 k-线性空间. 给定 X 上的分次线性系 $V_\bullet$, 在 $\mathbb{N}$ 上定义的函数

$$F_{V_\bullet}:(n\in\mathbb{N})\longmapsto\dim_k(V_n)$$

称为 $V_\bullet$ 的 Hilbert 函数. 当 $V_\bullet$ 是有限生成 k-代数时, 用 Poincaré 级数的方法可以得到 Hilbert 函数 $F_{V_\bullet}$ 当 n 趋于无穷时的渐近公式 (读者可以参考 [23, chap. VIII, §4, n°2]). 当 $V_\bullet$ 不具有有限生成性的条件时, $F_{V_\bullet}$ 的渐近性质是困难的问题. 在 X 具有正则有理点的情形, Lazarsfeld, Mustaţă [85] 和 Kaveh, Khovanskiĭ [74] 分别利用 Okounkov [103] 的凸几何方法解决了这个问题. 一般的情形需要用到函数域上的 Arakelov 几何, 读者可以参考 [35].

7.3.1 单叶赋值

令 d 为正整数. 所谓 $\mathbb{Z}^d$ 上的**单项式序** (monomial order), 是指 $\mathbb{Z}^d$ 上的全序关系 $\leqslant$, 满足如下条件:

(1) 对任意 $\alpha\in\mathbb{N}^d$, $0\leqslant\alpha$,

(2) 对任意 $\mathbb{Z}^d$ 中的元素 α, β 和 γ, 如果 $\beta\leqslant\gamma$, 那么 $\alpha+\beta\leqslant\alpha+\gamma$.

比方说由 $\mathbb{Z}$ 上通常的序关系所诱导的 $\mathbb{Z}^d$ 上的字典排序就是一种单项式序. 沿用序理论的习惯记法, $\alpha<\beta$ 表示 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$, $\alpha\geqslant\beta$ 表示 $\beta\leqslant\alpha$, $\alpha>\beta$ 表示 $\beta<\alpha$. 另外, 我们在全序集 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中形式地添加一个最大元 ∞, 并约定对任意 $\alpha\in\mathbb{Z}^d\cup\{\infty\}$ 有 $\alpha+\infty=\infty$.

定义 7.3.1. 设 K/k 为域的有限生成扩张. 给定 $\mathbb{Z}^d$ 上的一个单项式序 $\leqslant$. 所谓 K/k 在 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中的**赋值**, 是指映射

$$v : K \longrightarrow \mathbb{Z}^d \cup \{\infty\},$$

满足以下条件:

(a) 对任意 $a \in K$, $v(a) = \infty$ 当且仅当 $a = 0$,

(b) 对任意 $(a, b) \in K \times K$,

$$v(ab) = v(a) + v(b), \quad v(a + b) \geqslant \min\{v(a), v(b)\},$$

(c) 对任意 $a \in k^\times$, $v(a) = 0$.

设 v 为 K/k 在 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中的赋值. 对任意 $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, 令

$$K^{\geqslant\alpha} := \{b \in K \mid v(b) \geqslant \alpha\}, \quad K^{>\alpha} := \{b \in K \mid v(b) > \alpha\}.$$

注意到 $K^{\geqslant\alpha}$ 和 $K^{>\alpha}$ 都是 K 的 k-线性子空间, 并且 $K^{>\alpha} \subset K^{\geqslant\alpha}$. 如果对任意 $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ 有

$$\dim_k(K^{\geqslant\alpha}/K^{>\alpha}) = 1 \text{ 或 } 0,$$

那么说 v 是 K/k 在 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中的**单叶赋值**. 不难看出, 如果 v 是 K/k 在 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中的单叶赋值, 那么对于任意 K 的包含 k 的子域 K', v 在 K' 上的限制是 K'/k 在 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中的**单叶赋值**.

例 7.3.2. 设 X 为 K/k 的一个代数几何模型, 也就是说 X 是一个 $\operatorname{Spec} k$ 上的整概形, 其有理函数域等于 K. 假设 X 具有一个正则有理点 x. 那么 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是正则局部环, 其分式域等于 K, 其剩余类域等于 k. 由 Cohen 结构定理 (见 [46, Proposition 10.16]) 知局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的完备化同构于 d 元 k-系数形式幂级数环, 其中 d 是域扩张 K/k 的超越维数, 也等于局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的 Krull 维数. 给定 $\mathbb{Z}^d$ 上的单项式序 $\leqslant$, 从形式幂级数环 $k[\![T_1, \ldots, T_d]\!]$ 到 $\mathbb{Z}^d \cup \{\infty\}$ 的映射

$$\sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d} \lambda_\alpha T_1^{\alpha_1} \cdots T_d^{\alpha_d} \longmapsto \inf\{\alpha \in \mathbb{N}^d \mid \lambda_\alpha \neq 0\}$$

满足如下条件:

(1) 对任意 $F \in k[\![T_1, \ldots, T_d]\!]$, $v(F) = \infty$ 当且仅当 $F = 0$,

(2) 如果 F 是非零常值形式幂级数, 那么 $v(F)=0$,

(3) 如果 F 和 G 是 $k[\![T_1,\ldots,T_d]\!]$ 中两个形式幂级数, 那么

$$v(FG)=v(F)+v(G),\quad v(F+G)\geqslant\min\{v(F),v(G)\}.$$

从而我们可以将映射 v 延拓到 $k[\![T_1,\ldots,T_d]\!]$ 的分式域上, 使得对任意 $(F,G)\in k[\![T_1,\ldots,T_d]\!]$, $G\neq 0$ 有

$$v(F/G)=v(F)-v(G).$$

不难验证这样得到的函数是 $\mathrm{Frac}(k[\![T_1,\ldots,T_d]\!])/k$ 上取值在 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中的单叶赋值. 从而函数 $v(\cdot)$ 在 K 上的限制构成 K/k 上取值在 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中的单叶赋值.

注 7.3.3. 设 K/k 为域的有限生成扩张. 假设 K/k 上存在某取值在 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中的单叶赋值 v, 那么域扩张 K/k 是几何整的 (geometrically integral). 事实上, 若 k^{a} 表示 k 的代数闭包, 那么 $K\otimes_k k^{\mathrm{a}}$ 中的任意元素 y 都可以写成

$$x_1\otimes a_1+\cdots+x_n\otimes a_n$$

的形式, 其中 $a_1,\ldots,a_n$ 是 k^{a} 中的非零元, $x_1,\ldots,x_n$ 是 K 中的非零元, 使得

$$v(x_1)>v(x_2)\geqslant\ldots,\geqslant v(x_n).$$

另外, $v(x_1)$ 的值不依赖于 y 满足上述条件的张量分解. 读者可以通过对 y 的张量秩 (不同的张量分解中分裂张量的最少个数) 归纳来证明这一点. 这样可以将映射 $v(\cdot)$ 延拓到 $K\otimes_k k^{\mathrm{a}}$ 之上, 在上述的元素 y 上取 $v(x_1)$ 为其值. 这样延拓得到的映射将 $K\otimes_k k^{\mathrm{a}}$ 的乘法转化为 $\mathbb{Z}^d\cup\{\infty\}$ 的加法, 这说明了 $K\otimes_k k^{\mathrm{a}}$ 是整环.

7.3.2 分次线性系的运算转化

令 K/k 为域的有限生成扩张. 设 d 为正整数, $\leqslant$ 为 $\mathbb{Z}^d$ 上的单项式序. 我们假设存在 K/k 在 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中的单叶赋值 v.

所谓 K/k 的**分次线性系**, 是指多项式环 $K[T]$ 的分次子 k-代数

$$V_\bullet=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}V_nT^n,$$

使得每个 V_n 都是有限维 k-线性空间. 这个分次代数一般不同构于半群代数, 但是通过单叶赋值 v 可以改变这个分次代数的乘法运算使之同构于某个半群代数. 注意到这个乘法运算的变化并不改变分次代数的 Hilbert 函数, 从而可以用前文中介绍的凸几何方法来研究.

对任意 $n\in\mathbb{N}$ 及 $\alpha\in\mathbb{Z}^d$, 令

$$V_n^{\geqslant\alpha}:=\{b\in V_n\mid v(b)\geqslant\alpha\},\quad V_n^{>\alpha}:=\{b\in V_n\mid v(b)>\alpha\}.$$

那么 $V_n^{>\alpha}$ 是 $V_n^{\geqslant\alpha}$ 的 k-线性子空间. 我们用 $\mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet)$ 来表示商空间

$$V_n^{\geqslant\alpha}/V_n^{>\alpha}.$$

由于 v 是 K/k 在 $(\mathbb{Z}^d,\leqslant)$ 中的赋值, $V_\bullet$ 的分次 k-代数结构在 k-线性空间

$$\mathrm{gr}(V_\bullet):=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}\mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet)$$

上诱导一个 $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$-分次 k-代数结构. 另外, 由于 v 是单叶赋值, 知 $\mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet)$ 要么是零线性空间, 要么是 1 维 k-线性空间. 特别地,

$$\dim_k(V_n)=\mathrm{card}(\{\alpha\in\mathbb{Z}^d\mid \mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet)\neq\{0\}\}).$$

若记

$$\Gamma(V_\bullet):=\{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d\mid \mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet)\neq\{0\}\},$$

那么 $\Gamma(V_\bullet)$ 是 $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ 的加法子幺半群, 称为 $V_\bullet$ 的 Okounkov **半群**. 另外, $\mathrm{gr}(V_\bullet)$ 同构于半群代数 $k[\Gamma(V_\bullet)]$. 从而由定理 7.1.3 导出如下结论.

定理 7.3.4 (Kaveh-Khovanskiĭ, Lazarsfeld-Mustaţă). *令 $\mathbb{N}(V_\bullet)=\{n\in\mathbb{N}\mid V_n\neq\{0\}\}$, 并令 d 为仿射空间 $A(\Gamma(V_\bullet))$ 的维数. 假设 $\mathbb{N}(V_\bullet)\neq\{0\}$, 那么如下等式成立:*

$$\lim_{n\in\mathbb{N}(V_\bullet),\,n\to+\infty}\frac{\dim_k(V_n)}{n^d}=\mathrm{vol}(\Delta(\Gamma(V_\bullet))).$$

7.3.3 Newton-Okounkov 凸体

令 K/k 为域的有限生成扩张. 设 $V_\bullet$ 和 $V'_\bullet$ 为 K/k 的两个分次线性系, 如果对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $V_n\subset V'_n$, 则说 $V'_\bullet$ **包含** $V_\bullet$ 或说 $V_\bullet$ **包含于** $V'_\bullet$. 如果 $V_\bullet$ 作为 k-代数是有限生成代数, 则说 $V_\bullet$ 是**有限生成**的分次线性系. 如果 $V_\bullet$ 包含于某个有限生成的分次线性系, 则说 $V_\bullet$ 是**子有限生成的**. 一般情形下,

子有限生成的分次线性系不一定是有限生成的, 这一点和 Hilbert 第 14 问题有紧密的联系, 从 Nagata 的反例出发可以构造一个非有限生成的子有限生成分次线性系, 读者可以参考 [37, §5].

如果 $V_\bullet$ 是 K/k 的分次线性系, 用 $k(V_\bullet)$ 来表示由集合

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{f}{g}\,\middle|\, f\in V_n,\ g\in V_n\setminus\{0\}\right\}$$

生成的 K/k 的子扩张. 如果 $k(V_\bullet)=K$, 则说分次线性系 $V_\bullet$ 是**双有理的**.

定义 7.3.5. 我们用 $\mathcal{A}(K/k)$ 表示 K/k 的所有满足下列条件的子有限生成双有理分次线性系 $V_\bullet$ 构成的集合:

(1) $V_0=k$

(2) 对足够大的正整数 n 有 $V_n\neq\{0\}$.

令 d 为域扩张 K/k 的超越维数. 用 $\mathrm{Conv}(d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的内部非空的紧凸子集组成的集合. 所谓 K/k 上的一个 Newton-Okounkov **凸体理论**, 是指满足如下条件的映射

$$\Delta:\mathcal{A}(K/k)\longrightarrow\mathrm{Conv}(d)$$

(a) 如果 $V_\bullet$ 和 $V'_\bullet$ 是 $\mathcal{A}(K/k)$ 中两个分次线性系, 使得 $V_\bullet$ 包含于 $V'_\bullet$, 那么 $\Delta(V_\bullet)\subset\Delta(V'_\bullet)$,

(b) 如果 $V_\bullet$ 和 $W_\bullet$ 是 $\mathcal{A}(K/k)$ 中两个分次线性系, 那么

$$\Delta(V_\bullet\cdot W_\bullet)\supset\Delta(V_\bullet)+\Delta(W_\bullet),$$

其中 $V_\bullet\cdot W_\bullet$ 表示分次线性系

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Vect}_k(\{fg\mid f\in V_n,\ g\in W_n\}),$$

$\Delta(V_\bullet)+\Delta(W_\bullet)$ 表示 Minkowski 和

$$\{x+y\mid x\in\Delta(V_\bullet),\ y\in\Delta(W_\bullet)\},$$

(c) 对任意 $V_\bullet\in\mathcal{A}(K/k)$, 序列

$$\frac{\dim_n(V_n)}{n^d}$$

收敛到 $\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet))$.

例 7.3.6. 在 §7.3.2 中我们了解到, 如果 K/k 在赋某个单项式序的 $\mathbb{Z}^d$ 中具有一个单叶赋值, 那么

$$(V_\bullet \in \mathcal{A}(K/k)) \longmapsto \Delta(\Gamma(V_\bullet))$$

构成一个 Newton-Okounkov 凸体理论; 它依赖于 $\mathbb{Z}^d$ 上的单项式序和单叶赋值的选取.

注 7.3.7. 由注 7.3.3 知例 7.3.6 的构造要求域扩张 K/k 是几何整的. 但用代数函数域上 Arakelov 几何的方法可以对一般的情形归纳地构造 Newton-Okounkov 凸体理论, 这种构造只依赖于扩张 K/k 的一个子域链

$$k = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \ldots \subsetneq K_d = K,$$

其中每个 K_i/K_{i-1} 都是单超越扩张, 从而可以将 K_i 看成是定义在 K_{i-1} 上的某个正则射影曲线的有理函数域. 具体的构造方法见 [35, §4]. 另外, 如果 $V_\bullet$ 是一般的子有限生成分次线性系, 使得 $V_0 = k$, 那么存在域扩张 K/k 的有限生成分次线性系 $W_\bullet$ 使得 $W_\bullet$ 包含 $V_\bullet$ 并且 $k(W_\bullet) = k(V_\bullet)$ (见 [37, Theorem 1.2]). 这说明了 $V_\bullet$ 作为分次 k-代数同构于 $k(V_\bullet)/k$ 的一个子有限生成的双有理分次线性系, 从而 Newton-Okounkov 凸体的构造适用于一般的子有限生成分次线性系.

对任意 K/k 的子有限生成分次线性系 $V_\bullet$, 域扩张 $k(V_\bullet)/k$ 的超越维数称为 $V_\bullet$ 的 Kodaira-Iitaka **维数**. 用 Newton-Okounkov 凸体的方法, 可以证明以下结论.

(1) Fujita **逼近**: 设 $V_\bullet$ 为 K/k 的子有限生成分次线性系 $V_\bullet$, d 为 $V_\bullet$ 的 Kodaira-Iitaka 维数. 假设

$$\mathbb{N}(V) := \{n \in \mathbb{N} \mid V_n \neq \{0\}\} \neq \{0\},$$

那么当 $n \in \mathbb{N}(V_\bullet)$ 趋于无穷时序列

$$\frac{\dim_k(V_n)}{n^d/d!}, \quad n \in \mathbb{N}(V_\bullet)$$

收敛到一个正实数, 记作 $\mathrm{vol}(V_\bullet)$, 称为 $V_\bullet$ 的**容量** (volume). 另外, 如下等式成立

$$\mathrm{vol}(V_\bullet) = \sup_{\substack{W_\bullet \subset V_\bullet \\ W_\bullet \text{ 有限生成} \\ \mathrm{trdeg}(k(W_\bullet)/k) = d}} \mathrm{vol}(W_\bullet),$$

其中 $W_\bullet$ 取遍包含于 $V_\bullet$ 且 Kodaira-Iitaka 维数等于 d 的有限生成分次线性系. 读者可以参考 [74, Corollary 3.11], [85, Theorem D], [37, Theorem 6.2].

(2) Brunn-Minkowski **不等式**: 设 $V_\bullet$ 和 $W_\bullet$ 为 $\mathcal{A}(K/k)$ 中的两个分次线性系, d 为 K 在 k 上的超越维数. 那么用凸几何中的 Brunn-Minkowski 不等式[47]可以从 Newton-Okounkov 凸体理论的条件 (b) 导出如下不等式:
$$\mathrm{vol}(V_\bullet\cdot W_\bullet)^{\frac{1}{d}}\geqslant \mathrm{vol}(V_\bullet)^{\frac{1}{d}}+\mathrm{vol}(W_\bullet)^{\frac{1}{d}}.$$

注 7.3.8. 设 $V_\bullet$ 为 K/k 的子有限生成分次线性系, 使得对足够大的自然数 n 有 $V_n\neq\{0\}$. 由 Fujita 逼近知
$$\dim_k(V_n)=\frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{d!}n^d+o(n^d),\quad n\to+\infty.$$
通过函数域的算术几何方法和注 7.3.7 中提到的 Newton-Okounkov 凸体的归纳构造可以证明存在某函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 满足
$$f(n)=\frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{d!}n^d+O(n^{d-1})$$
并且使得不等式
$$\dim_k(V_n)\leqslant f(n)$$
对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立. 读者可以参考 [33] 和 [37, Theorem 6.4].

7.4 算术分次线性系的凹变换

本节中令 k 为数域, X 为 k 上几何整的射影概形, L 为 X 上的线丛, $V_\bullet$ 为 L 的分次线性系. 假设 $V_1\neq\{0\}$ 并在 V_1 中任取一个非零元 u. 令 $K=k(X)$ 为 X 上的有理函数域. 这样映射
$$V_\bullet\longrightarrow K[T],\quad (s_n)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{s_n}{u^n}T^n$$

[47] 设 Δ_1 和 Δ_2 为 $\mathbb{R}^d$ 中两个紧凸集, $\Delta_1+\Delta_2=\{x+y\mid(x,y)\in\Delta_1\times\Delta_2\}$ 为其 Minkowski 和, Brunn-Minkowski 不等式断言
$$\mathrm{vol}(\Delta_1+\Delta_2)^{\frac{1}{d}}\geqslant\mathrm{vol}(\Delta_1)^{\frac{1}{d}}+\mathrm{vol}(\Delta_2)^{\frac{1}{d}}.$$
读者可以参考 [9] 中用现代观点对 Brunn-Minkowski 不等式的综述.

是分次 k-代数的单同态, 利用这个单同态可以将 $V_\bullet$ 看成域扩张 K/k 的分次线性系. 我们固定一个 Newton-Okounkov 凸体理论 Δ. 令 d 为 $V_\bullet$ 的 Kodaira-Iitaka 维数并令 $\Delta(V_\bullet)$ 为 $V_\bullet$ 的 Newton-Okounkov 凸体. 依定义, $\Delta(V_\bullet)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的内部非空的紧凸子集, 并且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dim_k(V_n)}{n^d}=\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet)).$$

特别地,

$$\mathrm{vol}(V_\bullet)=d!\,\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet)).$$

给定 L 上受控制的度量族 $\varphi=(\varphi_v)_{v\in S_k}$. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\xi_n=(\|\cdot\|_{n,v})_{v\in S_k}$$

为 V_n 上如下定义的范数族:

$$\forall\, s\in V_n\otimes_k k_v\subset H^0(X_v,L_v^{\otimes n}),\quad \|s\|_{n,v}:=\sup_{x\in X_v^{\mathrm{an}}}|s|_{n\varphi_v}(x).$$

注意到 ξ_n 是受控制的范数族, 并且以下不等式成立:

$$\forall\,(s_n,s_m)\in V_{n,k_v}\times V_{m,k_v}.$$

所谓算术分次线性系的**凹变换**, 是指从 V_n 上的范数族 ξ_n 出发构造 Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(V_\bullet)$ 上的一个凹函数用来描述算术分次线性系 $(\overline{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 在这个构造中起到关键作用的是 Harder-Narasimhan $\mathbb{R}$-链的工具.

7.4.1 Harder-Narasimhan $\mathbb{R}$-链

令 E 为有限维 k-线性空间, ξ 为 E 上受控制的范数族. 所谓 (E,ξ) 的 Harder-Narasimhan $\mathbb{R}$-**链**, 是指 E 的线性子空间族 ($\widehat{\mu}_{\min}(\cdot)$ 的构造见定义 5.3.10)

$$\mathcal{F}^t(E,\xi):=\sum_{\substack{\{0\}\neq F\subset V_n\\ \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F})\geqslant t}}F,$$

其中 F 取遍 V_n 的非零线性子空间, 并且在 $\overline{F}$ 中我们考虑 ξ 在 F 上的限制. 这个子空间族以 $\mathbb{R}$ 为指标, 同时体现了 (E,ξ) 的 Harder-Narasimhan 分解和其中各个子商空间的极小斜率的信息 (见定理 5.3.13). 事实上, 如果

$$0=E_0\subsetneq E_1\subsetneq\ldots\subsetneq E_n=E$$

是 (E,ξ) 的 Harder-Narasimhan 分解, 那么当 $t > \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_1)$ 时 $\mathcal{F}^t(E,\xi) = \{0\}$, 当 $t \leqslant \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E_n/E_{n-1}})$ 时 $\mathcal{F}^t(E,\xi) = E$; 对任意 $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, 当

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E_{i+1}/E_i}) < t \leqslant \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E_i/E_{i-1}})$$

时 $\mathcal{F}^t(E,\xi) = E_i$. Hader-Narasimhan $\mathbb{R}$-链还可以用来估计 Arakelov 度数. 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 令

$$r_t = \dim_k(\mathcal{F}^t(E,\xi)),$$

那么如下不等式成立 (见 [])

$$-\int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}r_t \leqslant \widehat{\deg}(\overline{E}) \leqslant -\int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}r_t + \frac{\ln(r)}{2r}[K:\mathbb{Q}] \tag{7.4}$$

7.4.2 $\mathbb{R}$-链的泛函分析解释

设 E 为有限维 k-线性空间. 用 $\Theta(E)$ 表示 E 的所有非零线性子空间构成的集合. 这个集合在包含关系下构成一个偏序集. 用 $|\cdot|'$ 表示 k 上平凡的绝对值, 也就是说 $|0|' = 0$ 并且对任意 $a \in k^{\times}$ 有 $|a|' = 1$. 如果 $\|\cdot\|'$ 是 E 上 (相对于绝对值 $|\cdot|'$) 的超范数, 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 用

$$(E,\|\cdot\|')_{\leqslant\varepsilon} := \{s \in E \mid \|s\|' \leqslant \varepsilon\}$$

来表示 $(E,\|\cdot\|')$ 的以原点为中心且半径为 ε 的闭球. 可以证明, $(E,\|\cdot\|')_{\leqslant\varepsilon}$ 是 E 的线性子空间. 这样 E 的子空间族

$$(E,\|\cdot\|')_{\leqslant \mathrm{e}^{-t}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

构成一个以 $\mathbb{R}$ 为指标的降链. 反过来, 如果 $(\mathcal{F}^t(E))_{t\in\mathbb{R}}$ 是 E 的线性子空间构成的降链, 满足以下条件:

(1) 存在 $t_0 > 0$ 使得 $\mathcal{F}^{t_0}(E) = \{0\}$, $\mathcal{F}^{-t_0}(E) = E$,

(2) 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 存在 $\delta_t > 0$ 使得 $\mathcal{F}^{t-\delta_t}(E) = \mathcal{F}^t(E)$.

那么映射 $\|\cdot\|'_{\mathcal{F}} : E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$,

$$\|s\|'_{\mathcal{F}} := \exp\Big(-\sup\{t \in \mathbb{R} \mid s \in \mathcal{F}^t(E)\}\Big)$$

构成了 E 上的一个超范数, 使得

$$(E,\|\cdot\|'_{\mathcal{F}})_{\leqslant \mathrm{e}^{-t}} = \mathcal{F}^t(E).$$

7.4.3 算术分次线性系的极限定理

我们用 Hader-Narasimhan $\mathbb{R}$-链为工具来研究本节开头设定的算术分次线性系. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 从 k-线性空间 V_n 上受控制的范数族 ξ_n 出发在 V_n 上定义 Harder-Narasimhan $\mathbb{R}$-链的结构. 对任意 $t\in\mathbb{R}$, 令

$$\mathcal{F}^t(V_n,\xi_n)=\sum_{\substack{\{0\}\neq F\subset V_n\\ \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F})\geqslant t}}F$$

为 (V_n,ξ_n) 的 Harder-Narasimhan $\mathbb{R}$-链并用 $\|\cdot\|_n'$ 表示 $(\mathcal{F}^t(V_n,\xi_n))_{t\in\mathbb{R}}$ 所对应的 V_n 上 (相对于 k 上平凡绝对值 $|\cdot|'$) 的超范数. 可以证明, 对任意 $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, $(t_n,t_m)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 有

$$\mathcal{F}^{t_n}(V_n,\xi_n)\cdot\mathcal{F}^{t_m}(V_m,\xi_m)\subset\mathcal{F}^{t_n+t_m-\frac{3}{2}[K:\mathbb{Q}]\ln(r_n\cdot r_m)}(V_{n+m},\xi_{n+m}),\qquad(7.5)$$

其中 $r_n=\dim_k(V_n)$, $r_m=\dim_k(V_m)$. 从这个关系以及

$$r_n=O(n^d),\quad n\to+\infty$$

可以推出, 对任意 $s\in V_n$, 序列 $((\|s^\ell\|_{n\ell}')^{\frac{1}{\ell}})_{\ell\in\mathbb{N},\,\ell\geqslant1}$ 收敛. 我们用 $\|s\|_n''$ 来表示这个序列的极限. 从关系 (7.5) 还可以推出, 这样构造的函数 $\|\cdot\|_n''$ 仍是 V_n 上的超范数, 并且对任意 $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ 及 $(t_n,t_m)\in\mathbb{R}^2$, 有

$$\|s_n\cdot s_m\|_{n+m}''\leqslant\|s_n\|_n''\cdot\|s_m\|_m''.\qquad(7.6)$$

对任意 $t\in\mathbb{R}$, 令

$$V_\bullet^t:=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\{s_n\in V_n\mid\|s_n\|_n''\leqslant\mathrm{e}^{-nt}\}.$$

由不等式 (7.6) 知 $V_\bullet^t$ 是分次线性系. 这样我们就得到 $\Delta(V_\bullet)$ 的闭子集降链 $\Delta(V_\bullet^t)$. 而且 $\Delta(V_\bullet^t)$ 非空的时候是闭凸集.

定义 7.4.1. 所谓算术分次线性系

$$\overline{V}_\bullet=\big((V_n,\xi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

的**凹变换**, 是指 Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(V_\bullet)$ 上如下定义的函数

$$G_{\overline{V}_\bullet}:\Delta(V_\bullet)\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto\sup\{t\in\mathbb{R}\mid x\in\Delta(V_\bullet^t)\}.$$

这是 $\Delta(V_\bullet)$ 上的凹函数. 当 $V_\bullet$ 是线丛 L 的完全分次线性系 $V_\bullet(L)$ 时, 也将函数 $G_{\overline{V}_\bullet}$ 记为 $G_{(L,\varphi)}$.

定理 7.4.2. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$, 令 ν_n 为 $\mathbb{R}$ 上如下定义的 Borel 概率测度:

$$\nu_n(\mathrm{d}t)=-\frac{\mathrm{d}(\dim_k(\mathcal{F}^{nt}(V_n,\xi_n)))}{\dim_k(V_n)},$$

那么对任意 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数 f,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}f(t)\,\nu_n(\mathrm{d}t)=\frac{1}{\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet))}\int_{\Delta(V_\bullet)}f(G_{\overline{V}_\bullet}(x))\,\mathrm{d}x.$$

换句话说, 概率测度的序列 $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到 $\Delta(V_\bullet)$ 上的均匀分布在映射 $G_{\overline{V}_\bullet}$ 下的像.

注 7.4.3. 用概率论的语言可以将上述定理的结论重新叙述如下. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 令 X_n 为一个实值随机变量, 以 ν_n 为其分布. 又令 Z 为取值在 $\Delta(V_\bullet)$ 中并且均匀分布的随机变量. 那么随机变量的序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 依分布收敛到 $G_{\overline{V}_\bullet}(Z)$. 当 $V_\bullet$ 是有限生成 k-代数时, $G_{\overline{V}_\bullet}$ 是有界函数. 此时 X_n 的期望收敛到 $G_{\overline{V}_\bullet}(Z)$ 的期望. 再利用估计 (7.4) 可以得到如下渐近性质:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\widehat{\deg}(V_n,\xi_n)}{n\dim_k(V_n)}=\frac{1}{\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet))}\int_{\Delta(V_\bullet)}G_{\overline{V}_\bullet}(x)\,\mathrm{d}x,\tag{7.7}$$

其中 d 是 $V_\bullet$ 的 Kodaira-Iitaka 维数. 再结合

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dim_k(V_n)}{n^d}=\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet))$$

就得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\widehat{\deg}(V_n,\xi_n)}{n^{d+1}}=\int_{\Delta(V_\bullet)}G_{\overline{V}_\bullet}(x)\,\mathrm{d}x.\tag{7.8}$$

类似地, 若令

$$\widehat{\deg}_+(V_n,\xi_n):=\sup_{F\subset V_n}\widehat{\deg}(\overline{F}),$$

其中 F 取遍 V_n 的线性子空间, 在 $\overline{F}$ 中我们考虑 ξ_n 在 F 上的限制. 那么 (这里不需要假设 $V_\bullet$ 是有限生成代数)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\widehat{\deg}_+(V_n,\xi_n)}{n\dim_k(V_n)}=\frac{1}{\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet))}\int_{\Delta(V_\bullet)}\max\{G_{\overline{V}_\bullet}(x),0\}\,\mathrm{d}x.\tag{7.9}$$

7.4.4 算术容量函数与 Brunn-Minkowski 不等式

设 k 为数域, X 为 k 上几何整的射影概形, L 为 X 上的线丛, $\varphi=(\varphi_v)_{v\in S_k}$ 为 L 上受控制的度量族. 若 $V_\bullet$ 是 L 的分次线性系, 使得其

Kodaira-Iitaka 维数等于 X 的 Krull 维数 d, 则定义 $V_\bullet$ 相对于度量族 φ 的**算术容量** 为

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\varphi(V_\bullet) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\deg}_+(V_n,\xi_n)}{n^{d+1}/(d+1)!}. \tag{7.10}$$

这个定义最早是 Moriwaki [95, 96] 提出来的, 原始定义中替代 $\widehat{\deg}_+(V_n,\xi_n)$ 的是 (V_n,ξ_n) 作为赋范线性空间网格位于单位球中格点个数的对数. 可以证明上式中极限和原始定义的算术容量函数相等 (见 [38, §4.3.6]).

用算术分次线性系 $\overline{V}_\bullet$ 的凹变换 $G_{\overline{V}_\bullet}$ 可以构造 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的如下子集

$$\widehat{\Delta}(\overline{V}_\bullet) = \{(x,t)\in\Delta(V_\bullet)\times\mathbb{R} \mid 0\leqslant t\leqslant G_{\overline{V}_\bullet}(x)\}. \tag{7.11}$$

由于 $G_{\overline{V}_\bullet}$ 是 $\Delta(V_\bullet)$ 上的凹函数, $\widehat{\Delta}(\overline{V}_\bullet)$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的凸体, 并且其体积为

$$\mathrm{vol}(\widehat{\Delta}(\overline{V}_\bullet)) = \int_{\Delta(\overline{V}_\bullet)} \max\{G_{\overline{V}_\bullet}(x),0\}\,\mathrm{d}x.$$

我们称之为**算术** Newton-Okounkov **凸体**. 结合 (7.9) 和关系

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dim_k(V_n)}{n^d} = \mathrm{vol}(V_\bullet)$$

得到

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\varphi(V_\bullet) = (d+1)!\,\mathrm{vol}(\widehat{\Delta}(\overline{V}_\bullet)).$$

设 (L,φ) 和 (M,ψ) 为 X 上带有受控制度量族的线丛, $V_\bullet$, $W_\bullet$ 和 $U_\bullet$ 分别为 L, M 和 $L\otimes M$ 的分次线性系, 其 Kodaira-Iitaka 维数都等于 d. 假设对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$V_n\cdot W_n := \mathrm{Span}_k(\{s\cdot t \mid s\in V_n,\ t\in W_n\})\subset U_n.$$

此时如下关系成立

$$\Delta(V_\bullet)+\Delta(W_\bullet) := \{x+y \mid x\in\Delta(V_\bullet),\ y\in\Delta(W_\bullet)\}\subset\Delta(U_\bullet), \tag{7.12}$$

$$\forall\,(x,y)\in\Delta(V_\bullet)+\Delta(W_\bullet),\quad G_{\overline{U}_\bullet}(x+y)\geqslant G_{\overline{V}_\bullet}(x)+G_{\overline{W}_\bullet}(y). \tag{7.13}$$

从中可以推出

$$\widehat{\Delta}(\overline{U}_\bullet)\supset\widehat{\Delta}(\overline{V}_\bullet)+\widehat{\Delta}(\overline{W}_\bullet).$$

这样由经典的 Brunn-Minkowski 不等式得到算术 Brunn-Minkowski 不等式

$$\widehat{\mathrm{vol}}_{\varphi+\psi}(U_\bullet)^{\frac{1}{d+1}}\geqslant\widehat{\mathrm{vol}}_\varphi(V_\bullet)^{\frac{1}{d+1}}+\widehat{\mathrm{vol}}_\psi(W_\bullet)^{\frac{1}{d+1}} \tag{7.14}$$

在 $U_\bullet$, $V_\bullet$ 和 $W_\bullet$ 都是完全分次线性系的情形下, 这个不等式是袁新意 [130] 的结果. 他的方法也是基于凸几何, 但他的算术 Newton-Okounkov 凸体的构造方法与这里介绍的不同.

8 随机耦合与测度传输在算术几何中的应用

本章介绍凸几何结合应用数学中两个方法, 随机变量耦合和测度传输, 在算术几何研究中的应用.

8.1 随机变量的耦合与 Hodge 指标定理

8.1.1 凸体的耦合系数

随机变量的耦合是数理统计中处理随机变量相关性的数学方法, 它的主要思想是在已知边缘分布的前提下模拟随机变量族的各种可能的联合分布. 这里我们讨论 Euclid 空间凸体中均匀分布的耦合. 用 $\mathrm{Conv}(d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的内部非空的紧凸子集构成的集合. 如果 Δ_0 和 Δ_1 是 $\mathrm{Conv}(d)$ 中两个元素, 用 $\Delta_0+\Delta_1$ 表示它们的 Minkowski **和**, 其定义为

$$\Delta_0+\Delta_1:=\{x+y\mid x\in\Delta_0,\ y\in\Delta_1\}.$$

这样 $\mathbb{R}^d$ 中向量的加法定义了从 $\Delta_0\times\Delta_1$ 到 $\Delta_0+\Delta_1$ 的满射, 将 $(x,y)\in\Delta_0\times\Delta_1$ 映为 $x+y$.

定义 8.1.1. 用 $\mathscr{A}(\Delta_0,\Delta_1)$ 表示由满足如下条件的 $\Delta_0\times\Delta_1$ 上的 Borel 概率测度 ν 构成的集合:

> *ν 在两个投影 $\Delta_0\times\Delta_1\to\Delta_0$ 和 $\Delta_0\times\Delta_1\to\Delta_1$ 下的像分别是 Δ_0 和 Δ_1 上的均匀分布.*

换句话说, $\mathscr{A}(\Delta_0,\Delta_1)$ 是取值在 $\Delta_0\times\Delta_1$ 中并且边缘分布是均匀分布的随机变量所有可能的联合分布组成的集合. 如果 ν 是 $\mathscr{A}(\Delta_0,\Delta_1)$ 中的元素, 令

$$\rho(\nu):=\sup_f\frac{\int_{\Delta_0\times\Delta_1}f(x+y)\,\nu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)}{\int_{\Delta_0+\Delta_1}f(z)\,\mathrm{d}z},$$

其中 f 取遍所有 $\Delta_0+\Delta_1$ 上 Lebesgue 积分大于 0 的非负 Borel 函数.

注 8.1.2. 用概率论的语言来讲, 如果 (Z_0,Z_1) 是取值在 $\Delta_0\times\Delta_1$ 中以 ν 为分布的随机变量, Z 是取值在 $\Delta_0+\Delta_1$ 中均匀分布的随机变量, 那么对任意 Borel 函数 $f:\Delta_0\times\Delta_1\to\mathbb{R}_{\geqslant0}$ 有

$$\mathbb{E}[f(Z_1+Z_2)]\leqslant\rho(\nu)\,\mathbb{E}[f(Z)]$$

设 a 为不小于 1 的实数. 用单调类定理可以证明, 要验证关系 $\rho(\nu) \leqslant a$, 只须证明不等式

$$\mathbb{E}[f(Z_1+Z_2)] \leqslant a\,\mathbb{E}[f(Z)]$$

对任意 $\Delta_1+\Delta_2$ 上的非负连续函数成立.

令 $\mathscr{P}(\Delta_0\times\Delta_1)$ 为 $\Delta_0\times\Delta_1$ 上的 Borel 概率测度构成的集合. 由 Prokhorov 定理, $\mathscr{P}(\Delta_0\times\Delta_1)$ 在密收敛 (tight convergence) 拓扑[48]下是可度量化的可分紧拓扑空间. 而 $\mathscr{A}(\Delta_0,\Delta_1)$ 是 $\mathscr{P}(\Delta_0\times\Delta_1)$ 的闭子集, 从而也是紧拓扑空间. 注意到

$$\rho : \mathscr{A}(\Delta_0,\Delta_1) \longrightarrow [1,+\infty]$$

可以写成一族连续函数的上确界, 从而是下半连续的函数. 特别地, $\rho(\cdot)$ 在 $\mathscr{A}(\Delta_0,\Delta_1)$ 上取到其最小值. 我们将这个最小值记作 $\rho(\Delta_0,\Delta_1)$, 称为凸体 Δ_0 和 Δ_1 的**耦合系数**. 从函数 ρ 的定义不难看出对任意 $\nu\in\mathscr{A}(\Delta_0,\Delta_1)$ 有 $\rho(\nu)\geqslant 1$. 从而

$$\rho(\Delta_0,\Delta_1)\geqslant 1.$$

另外, 由 Bobkov 和 Madiman [13] 的结果知, 如果 ν 是 $\Delta_0\times\Delta_1$ 上的均匀分布, 那么

$$\rho(\nu)\leqslant\binom{2d}{d}.$$

这说明了

$$\rho(\Delta_0,\Delta_1)\leqslant\binom{2d}{d}.$$

例 **8.1.3.** 假设存在 $r>0$ 以及 $y\in\mathbb{R}^d$ 使得

$$\Delta_1 = r\Delta_0 + y := \{rx+y \mid x\in\Delta_0\}.$$

那么 $\rho(\Delta_0,\Delta_1)=1$. 事实上, 若 Z 为在 Δ_0 中均匀分布的随机变量, 那么 $rZ+y$ 是在 Δ_1 中均匀分布的随机变量, 并且 $Z+(rZ+y)$ 是在 $\Delta_0+\Delta_1=(r+1)\Delta_0+y$ 中均匀分布的随机变量. 从而函数 ρ 在 $(Z, rZ+y)$ 的联合分布上取到最小值 1. 特别地, 如果 $d=1$, 那么对任意 $\mathrm{Conv}(d)$ 中的凸体 Δ_0 和 Δ_1 有 $\rho(\Delta_0,\Delta_1)=1$.

[48]也就是说, 使得对任意连续函数 $f:\Delta_1\times\Delta_2\to\mathbb{R}$ 来说映射

$$(\nu\in\mathscr{P}(\Delta_0\times\Delta_1)) \longmapsto \int_{\Delta_1\times\Delta_2} f(x,y)\,\nu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$$

都连续的最粗的拓扑.

8.1.2 平均值估计

设 Δ_0 和 Δ_1 为 $\mathrm{Conv}(d)$ 中的两个元素, $G_0:\Delta_0\to\mathbb{R}$, $G_1:\Delta_1\to\mathbb{R}$ 和 $G:\Delta_0+\Delta_1\to[0,+\infty[$ 为有上界的 Borel 函数. 假设以下不等式成立

$$\forall\,(x,y)\in\Delta_0\times\Delta_1,\quad G(x+y)\geqslant G_0(x)+G_1(y).$$

如果 (Z_0,Z_1) 是取值在 $\Delta_0\times\Delta_1$ 中的随机变量, 边缘分布是均匀分布, ν 是其联合分布, 那么

$$\mathbb{E}[G_0(Z_0)+G_1(Z_1)]\leqslant\mathbb{E}[G(Z_0+Z_1)]\leqslant\rho(\nu)\,\mathbb{E}[G(Z)],$$

其中 Z 是在 $\Delta_0+\Delta_1$ 中均匀分布的随机变量. 对 ν 取下确界就得到下列不等式

$$\frac{\int_{\Delta_0+\Delta_1}G(z)\,\mathrm{d}z}{\mathrm{vol}(\Delta_0+\Delta_1)}\geqslant\frac{1}{\rho(\Delta_0,\Delta_1)}\bigg(\frac{\int_{\Delta_0}G_0(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}(\Delta_0)}+\frac{\int_{\Delta_1}G_1(y)\,\mathrm{d}y}{\mathrm{vol}(\Delta_1)}\bigg).\tag{8.1}$$

注 8.1.4. 假设 Δ_0 和 Δ_1 的耦合系数等于 1, 那么存在随机变量 Z_0 和 Z_1, 分别在 Δ_0 和 Δ_1 中均匀分布, 使得 Z_0+Z_1 在 $\Delta_0+\Delta_1$ 中均匀分布. 假设 G_0, G_1 和 G 分别是 Δ_0, Δ_1 和 $\Delta_0+\Delta_1$ 上的实值 Borel 函数, 对 Lebesgue 测度可积, 并使得

$$\forall\,(x,y)\in\Delta_0\times\Delta_1,\quad G(x+y)\geqslant G_0(x)+G_1(y).$$

那么如下不等式成立

$$\mathbb{E}[G(Z_0+Z_1)]\geqslant\mathbb{E}[G_0(Z_0)]+\mathbb{E}[G_1(Z_1)].$$

用积分的形式可以将该不等式表示为:

$$\frac{\int_{\Delta_0+\Delta_1}G(z)\,\mathrm{d}z}{\mathrm{vol}(\Delta_0+\Delta_1)}\geqslant\frac{\int_{\Delta_0}G_0(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}(\Delta_0)}+\frac{\int_{\Delta_1}G_1(y)\,\mathrm{d}y}{\mathrm{vol}(\Delta_1)}.\tag{8.2}$$

8.1.3 算术 Hodge 指标定理

本节中令 k 为数域. 设 X 为 $\mathrm{Spec}\,k$ 上几何整的射影曲线并且在 X 上固定一个 Newton-Okounkov 凸体理论 (见定义 7.3.5). 如果 L 是 X 上的线丛, 使得 $\deg(L)>0$, 那么 $\Delta(L)$ 是 $\mathbb{R}$ 中长度为 $\deg(L)$ 的闭区间. 由于 $\mathbb{R}$ 中长度为正值的闭区间都是相似图形, 由例 8.1.3 知, 对任意 X 上两个线丛 L_0 和 L_1, 区间 $\Delta(L_0)$ 和 $\Delta(L_1)$ 的耦合系数等于 1. 这样, 结合极限公式 (7.7)、均值不等式 (8.1) 和算术 Hilbert-Samuel 公式得到如下结果 (见 [34]).

定理 8.1.5. 设 X 为 $\operatorname{Spec} k$ 上几何整的射影曲线. 设 L 和 M 为 X 上的丰沛线丛, $\varphi = (\varphi_v)_{v \in S_k}$ 和 $\psi = (\psi_v)_{v \in S_k}$ 分别为 L 和 M 上受控制的度量族, 使得每个度量 φ_v 和 ψ_v 都是半正度量. 那么如下不等式成立:

$$2(\overline{L} \cdot \overline{M}) \geqslant \frac{\deg(M)}{\deg(L)}(\overline{L}^2) + \frac{\deg(L)}{\deg(M)}(\overline{M}^2). \tag{8.3}$$

证明: 将不等式 (8.2) 用于 (L, φ), (M, ψ) 和 $(L \otimes M, \varphi + \psi)$ 的完全算术分次线性系的凹变换, 得到

$$\frac{((\overline{L} \otimes \overline{M})^2)}{\deg(L \otimes M)} \geqslant \frac{(\overline{L}^2)}{\deg(L)} + \frac{(\overline{M}^2)}{\deg(M)}. \tag{8.4}$$

由算术相交数的多重线性得到

$$((\overline{L} \otimes \overline{M})^2) = (\overline{L}^2) + 2(\overline{L} \cdot \overline{M}) + (\overline{M}^2).$$

另外又有 $\deg(L \otimes M) = \deg(L) + \deg(M)$. 不等式 (8.4) 两边乘以 $\deg(L) + \deg(M)$, 消项以后就得到 (8.3).

□

注 8.1.6. 假设 $\overline{L}$ 和 $\overline{M}$ 的自相交数都是非负的, 那么由算术–几何平均值不等式得到

$$(\overline{L} \cdot \overline{M}) \geqslant \sqrt{(\overline{L}^2) \cdot (\overline{M}^2)}.$$

这个结果称为算术 Hodge 指标定理, 最早是 Faltings [48] 和 Hriljac [70] 分别证明的.

8.2 测度传输和相对 Brunn-Minkowski 不等式

上节中介绍的不等式 (8.1) 适用于一般维数的凸体, 所以也适用于高维算术射影簇上带度量族的线丛. 然而目前对于一般的凸体尚没有很好的耦合系数上界估计. 根据例 8.1.3 不难猜想在强耦合的情形下耦合系数会更接近于 1. 一种强耦合的情形是通过测度传输映射来进行关联. 设 Δ_0 和 Δ_1 为 $\mathbb{R}^d$ 中两个内部非空的紧凸集, 其中 d 是正整数. 所谓从 Δ_0 到 Δ_1 的**均匀分布传输映射**, 是指从 Δ_0 到 Δ_1 的同胚 $f : \Delta_0 \to \Delta_1$, 使得 Δ_0 上的均匀分布在 f 下的像是 Δ_1 上的均匀分布. 当 f 限制在 Δ_0 的内部是微分同胚时, 测度传输的条件相当于是要求 f 的 Jacobi 行列式的绝对值是常值函数. 假设 X 是在 Δ_0 中均匀分布的随机变量, 那么 $f(X)$ 则是在 Δ_1 中均匀分布的随

机变量. 用 ν_f 表示随机向量 $(X, f(X))$ 的联合分布, 那么相对于所有的均匀分布传输映射 f 求 $\rho(\nu_f)$ 的最小值就是一个最优传输问题. 虽然这个最优传输问题目前还没有得到解决, 但是我们用无穷小分析证明了不等式 (8.1) 的一个非对称版本. 证明的关键部分参考了 Knothe [78] 和 Brenier [26, 27] 的工作.

8.3 测度传输与相对等周不等式

Knothe 函数是一个测度传输映射. 它可以写成

$$f(x_1, \ldots, x_d) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \ldots, f_d(x_1, \ldots, x_d))$$

的形式, 其中 f_k 是从 $\mathbb{R}^k$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 使得对任意固定的 $(x_1, \ldots, x_{k-1})$ 来说函数

$$(x_k \in \mathbb{R}) \longrightarrow f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$$

是单调上升函数, 并且在使得 $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) \in \Delta_0$ 的 x_k 值的区间之中该函数是严格单调上升函数. 这样 f 在 Δ_0 内部的每个点的 Jacobi 矩阵都是对角线元素为正的上三角矩阵.

定理 8.3.1. 设 Δ_0 和 Δ_1 为 $\mathbb{R}^d$ 中两个内部非空的紧凸集, 设 G_0 和 G_1 分别为 Δ_0 和 Δ_1 上的 Lebesgue 可积函数. 对任意 $\varepsilon \in [0,1]$, 用 S_ε 表示加权 Minkowski 和

$$\Delta_0 + \varepsilon\Delta_1 = \{x + \varepsilon y \mid (x, y) \in \Delta_0 \times \Delta_1\},$$

并令 $H_\varepsilon : S_\varepsilon \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 为正值 Borel 函数. 假设对任意 $(x, y) \in \Delta_0 \times \Delta_1$ 有

$$H_\varepsilon(x + \varepsilon y) \geqslant G_0(x) + \varepsilon G_1(y), \tag{8.5}$$

那么以下不等式成立

$$\begin{aligned} &\liminf_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{S_\varepsilon} H_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\Delta_0} G_0(x)\,\mathrm{d}x\Big) \\ &\geqslant d\Big(\frac{\mathrm{vol}(\Delta_1)}{\mathrm{vol}(\Delta_0)}\Big)^{1/d}\int_{\Delta_0} G_0(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{vol}(\Delta_0)}{\mathrm{vol}(\Delta_1)}\int_{\Delta_1} G_1(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{8.6}$$

证明: 令 $f : \Delta_0 \to \Delta_1$ 为 Knothe 映射. 对任意 $\varepsilon \in [0,1]$, 令 $F_\varepsilon : \Delta_0 \to S_\varepsilon$ 为将 $x \in \Delta_0$ 映为 $x + \varepsilon f(x)$ 的映射. 由上述 f 的单调性质得到 F_ε 是单射, 所以

$$\int_{S_\varepsilon} H_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z \geqslant \int_{\Delta_0^\circ} H_\varepsilon(x + \varepsilon f(x))|\det(I_d + \varepsilon D_x f)|\,\mathrm{d}x, \tag{8.7}$$

其中 I_d 表示 d 阶单位矩阵. 由于 D_xf 是对角线上元素非负的上三角矩阵, 并且

$$\det(D_xf)=\frac{\mathrm{vol}(\Delta_1)}{\mathrm{vol}(\Delta_0)},$$

知

$$\det(I_d+\varepsilon D_xf)\geqslant\Big(1+\varepsilon\Big(\frac{\mathrm{vol}(\Delta_1)}{\mathrm{vol}(\Delta_0)}\Big)^{1/d}\Big)^d. \tag{8.8}$$

结合不等式 (8.5)、(8.8) 和 (8.7) 就得到 (8.6), 细节见 [36, 第 663 页]. □

8.3.1 算术相对等周不等式

不等式 (8.6) 可以看作是等周不等式的一个自然的推广. 若分别取 G_0 和 G_1 为 Δ_0 和 Δ_1 上取常值 1 的函数, H_ε 为 S_ε 上取常值 $1+\varepsilon$ 的函数, 那么 (8.6) 式左边的下极限等于

$$d\,\mathrm{vol}_{d-1,1}(\Delta_0,\Delta_1)+\mathrm{vol}(\Delta_0),$$

其中 $\mathrm{vol}_{d-1,1}(\Delta_0,\Delta_1)$ 是 Δ_0 和 Δ_1 以 $(d-1,1)$ 为指标的混合体积. 这样利用算术–几何平均值不等式从 (8.6) 推出凸几何中的等周不等式

$$\mathrm{vol}_{d-1,1}(\Delta_0,\Delta_1)\geqslant\mathrm{vol}(\Delta_0)^{(d-1)/d}\cdot\mathrm{vol}(\Delta_1)^{1/d}.$$

等周不等式和 Brunn-Minkowski 不等式是等价的. 事实上, 它可以看成是 Brunn-Minkowski 不等式的无穷小化 (infinitesimal) 版本. 感兴趣的读者可以参考 Gardner [56] 的综述.

与定理 8.1.5 类似, 结合相对等周不等式 (8.6) 和极限定理 7.4.2 得到如下结论, 证明细节见 [36, §3.2].

定理 8.3.2. *设 k 为数域, X 为 $\mathrm{Spec}\,K$ 上几何整的 d 维射影概形, $\overline{L}_0$ 和 $\overline{L}_1$ 为 X 上带有由半正度量组成的受控制度量族的丰沛线丛. 假设它们的度量族中的度量都是半正的, 并且 $\overline{L}_0$ 是算术丰沛的, 那么如下不等式成立*

$$(d+1)(\overline{L}_0^d\cdot\overline{L}_1)\geqslant d\Big(\frac{(L_1^d)}{(L_0^d)}\Big)^{1/d}(\overline{L}_0{}^{d+1})+\Big(\frac{(L_0^d)}{(L_1^d)}\Big)\cdot(\overline{L}_1{}^{d+1}). \tag{8.9}$$

利用从等周不等式推出 Brunn-Minkowski 不等式的方法, 从上述定理可以推出如下相对算术 Brunn-Minkowski 不等式.

定理 8.3.3. 设 k 为数域, X 为 $\operatorname{Spec} k$ 上几何整的 d 维射影概形, $\overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_n$ 为 X 上带有由半正度量组成的受控制度量族的丰沛线丛. 假设 $\overline{M} = \overline{M}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{M}_n$ 是算术丰沛的, 那么如下不等式成立

$$\frac{(\overline{M}^{d+1})}{(M^d)} \geqslant \frac{1}{\varphi(M_1, \ldots, M_n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\overline{M}_i^{d+1})}{(M_i^d)}, \tag{8.10}$$

其中

$$\varphi(M_1, \ldots, M_n) = d + 1 - d \frac{(M_1^d)^{1/d} + \cdots + (M_n^d)^{1/d}}{(M^d)^{1/d}} \leqslant d + 1. \tag{8.11}$$

证明: 在 (8.9) 中取 $\overline{L}_0 = \overline{M}$ 及 $\overline{L}_1 = \overline{M}_i$ 并对 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 求和即得到 (8.10). □

注 8.3.4. 考虑 $n = 2$ 的情形, 如果直接应用 (8.1) 的话, 可以得到与 (8.10) 类似的一个不等式, 其中系数 $\varphi(M_1, M_2)^{-1}$ 应换成 $\rho(\Delta(M_1), \Delta(M_2))^{-1}$. 与 (8.11) 相比较, 我们用一个问题来结束讲义: 给定 $\mathbb{R}^d$ 中两个内部非空的紧凸集 Δ_0 和 Δ_1, 不等式 $\rho(\Delta_0, \Delta_1) \leqslant d + 1$ 是否总是成立?

A 附录

A.1 Caylay-Hamilton 定理

引理 A.1.1. 设 A 为交换幺环, M 为有限生成 A-模. 假设 $(x_i)_{i=1}^n$ 是 M 的一族生成元, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. 若

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

是 A-系数 $n \times n$ 矩阵, 使得

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0.$$

那么对任意 $x \in M$ 有 $\det(P)x = 0$.

证明:　令 P' 为矩阵 P 的伴随矩阵, 依定义有

$$P'P = \det(P)I_n,$$

其中 I_n 是 n 阶单位矩阵. 从而

$$\det(P)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P'P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由于 M 中的每个元素都可以写成 $x_1, \ldots, x_n$ 的 A-系数线性组合, 命题成立. □

定理 A.1.2 (Cayley-Hamilton)**.** 设 A 为交换幺环, $\mathfrak{a}$ 为 A 的理想, M 为 A-模, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $\varphi : M \to M$ 为 M 的 A-模自同态, 使得 $\varphi(M) \subset \mathfrak{a}M$. 假设 M 由 n 个元素生成. 那么存在 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{a}^1 \times \mathfrak{a}^2 \times \cdots \times \mathfrak{a}^n$ 使得对任意 $x \in M$ 下列等式成立

$$\varphi^n(x) + a_1\varphi^{n-1}(x) + \cdots + a_n x = 0,$$

其中对任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathfrak{a}^k$ 表示由

$$\{\lambda_1 \cdots \lambda_k \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, k\},\ \lambda_i \in \mathfrak{a}\}$$

生成的 A 的理想.

证明:　令 $A[T]$ 为 A 系数一元多项式环. 我们赋 M 以如下的 $A[T]$-模结构. 对任意

$$F = \lambda_0 + \lambda_1 T + \cdots + \lambda_d T^d \in A[T]$$

及任意 $x \in M$, 令

$$Fx := \lambda_0 x + \lambda_1\varphi(x) + \cdots + \lambda_d\varphi^d(x).$$

设 $(x_i)_{i=1}^n$ 为 M 作为 A-模的一族生成元. 由于 $\varphi(M) \subset \mathfrak{a}M$, 存在某 $\mathfrak{a}$-系数 $n \times n$ 矩阵 P, 使得

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \vdots \\ \varphi(x_n) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

考虑 $A[T]$-系数 $n \times n$ 矩阵 $TI_n - P$. 按定义有

$$(TI_n - P)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

令

$$F = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_n \in A[T]$$

为矩阵 $TI_n - P$ 的行列式. 由行列式的定义, 知对任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 有 $a_k \in \mathfrak{a}^k$. 另外, 由引理 A.1.1 知对任意 $x \in M$ 有 $Fx = 0$, 亦即

$$\varphi^n(x) + a_1\varphi^{n-1}(x) + \cdots + a_n x = 0.$$

□

推论 A.1.3 (Nakayama **引理**)**.** *设 A 为交换幺环, $\mathfrak{a}$ 为 A 的理想, M 为有限生成 A-模. 如果 $\mathfrak{a}M = M$, 那么存在 $a \in \mathfrak{a}$ 使得对任意 $x \in M$ 有 $ax = x$.*

证明: 将定理 A.1.2 应用于 $\varphi = \mathrm{Id}_M$ 的情形, 知存在自然数 n 以及

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{a}^1 \times \cdots \times \mathfrak{a}^n$$

使得对任意 $x \in M$ 有 $(1 + a_1 + \cdots + a_n)x = 0$. 取 $a = -(a_1 + \cdots + a_n)$ 即可. □

A.2 整元

定义 A.2.1. 设 A 为交换幺环. 所谓 (交换的)A-**代数**, 是指从 A 到某交换幺环的幺环同态. 设 $f : A \to B$ 为 A-代数, 在对于幺环同态 f 没有歧义的情形下也可以简单地说 B **是** A-**代数**. B 的包含 $f(A)$ 的子环称作 B 的**子** A-**代数**. 若 $f : A \to B$ 和 $g : A \to C$ 是两个 A-代数, 所谓从 B 到 C 的 A-**代数同态**, 是指满足 $h \circ f = g$ 的交换幺环同态 $h : B \to C$. 我们用 $\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, C)$ 来表示所有从 B 到 C 的 A-代数同态构成的集合.

定义 A.2.2. 设 $f : A \to B$ 为交换幺环的同态. 如果 $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^n$ 为 B 的一族元素, 用

$$f_{\boldsymbol{b}} : A[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow B$$

表示从 n 元多项式代数 $A[T_1,\ldots,T_n]$ 到 B 的 A-代数同态, 将多项式

$$P=\sum_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in\mathbb{N}^n}\lambda_{\delta_1,\ldots,\delta_n}T_1^{\delta_1}\cdots T_n^{\delta_n}$$

映为

$$P(b_1,\ldots,b_n):=\sum_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in\mathbb{N}^n}f(\lambda_{\delta_1,\ldots\lambda_n})b_1^{\delta_1}\cdots b_n^{\delta_n}.$$

同态 $f_{\boldsymbol{b}}$ 的像是 B 的子 A-代数, 记作 $A[b_1,\ldots,b_n]$. 倘若存在 B 中有限多个元素 $(b_i)_{i=1}^n$, 使得 $A[b_1,\ldots,b_n]=B$, 则说 B 是**有限生成 A-代数**.

定义 A.2.3. 设 $f:A\to B$ 为交换幺环的同态. 任意 B-模 M 上自然地具有如下的 A-模结构

$$A\times M\longrightarrow M,\quad (a,x)\longmapsto f(a)x.$$

有时也将 $f(a)x$ 简记为 ax. 如果 B 作为 A-模是有限生成的, 那么说 B 是 **有限 A-代数**. 注意到 B 作为 A-模的一族生成元也是其作为 A-代数的一族生成元. 特别地, 有限 A-代数一定是有限生成 A-代数. 然而有限生成 A-代数却未必是有限 A-代数. 比如当 A 不是零环的时候多项式代数 $A[T]$ 就不是有限 A-代数.

注 A.2.4. 设 $f:A\to B$ 为有限 A-代数, $(b_i)_{i=1}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ 为 B 作为 A-模的一组生成元. 如果 M 是有限生成 B-模, $(x_j)_{j=1}^m$ $(m\in\mathbb{N})$ 是 M 作为 B-模的一组生成元, 那么

$$(b_ix_j)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}}$$

是 M 作为 A-模的一组生成元. 从而 M 是有限生成 A-模. 特别地, 如果 $g:B\to C$ 是有限 B-代数, 那么 $g\circ f:A\to C$ 是有限 A-代数.

定义 A.2.5. 设 $f:A\to B$ 为交换幺环的同态, b 为 B 中的元素. 如果存在 $(a_1,\ldots,a_n)\in A^n$ 使得

$$b^n-f(a_1)b^{n-1}-\ldots-f(a_n)=0,$$

亦即 b 是 $A[T]$ 中某个首一多项式的根, 则说 b 是 A 上的**整元**.

命题 A.2.6. 设 $f:A\to B$ 为交换幺环同态, $b\in B$. 以下条件等价.

(1) b 是 A 上的整元,

(2) $A[b]$ 是有限 A-代数,

(3) 存在 B 的包含 b 的有限子 A-代数,

(4) 存在某忠实[49]$A[b]$-模, 作为 A-模是有限生成的.

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2): 若存在 $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ 使得

$$b^n - f(a_1)b^{n-1} - \cdots - f(a_n) = 0.$$

由多项式除法知道 $A[b]$ 作为 A-模可以由 $1, b, \ldots, b^{n-1}$ 生成, 所以是有限生成 A-模.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Longrightarrow$ (4): 若 B_0 是 B 的包含 b 的子 A-代数, 那么 $A[b] \subset B_0$, 从而 B_0 作为 $A[b]$-模是忠实的.

(4) $\Longrightarrow$ (1): 设 M 为忠实 $A[b]$-模, $(x_i)_{i=1}^n$ 为 M 作为 A-模的一族生成元, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. 对任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$, 存在 $(\lambda_{i,j})_{j=1}^n \in A^n$ 使得

$$bx_i = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_{i,j})x_j.$$

令 D 为矩阵

$$bI_n - (f(\lambda_{i,j}))_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}}$$

的行列式. 由引理 A.1.1 知对任意 $x \in M$ 有 $Dx = 0$. 而 M 是忠实 $A[b]$-模, 所以 $D = 0$. 行列式 D 可以写成 $F(b)$ 的形式, 其中 F 是 $A[T]$ 中的首一 n 次多项式, 所以 b 是 A 上的整元. □

推论 A.2.7. 设 $f : A \to B$ 为交换幺环同态.

(1) 若 $(b_i)_{i=1}^n$ 是 B 中一族元素, 其中每个 b_i 都是 A 上的整元. 那么 $A[b_1, \ldots, b_n]$ 是有限 A-代数.

(2) B 中 A 上的整元组成 B 的子 A-代数.

(3) 假设 B 中的每个元素都是 A 上的整元. 若 $g : B \to C$ 是交换幺环的同态且 $c \in C$ 是 B 上的整元, 那么 c 也是 A 上的整元.

[49]设 R 为交换幺环, M 为 R-模. 如果对任意 $r \in R \setminus \{0\}$, R-模同态 $M \to M$, $x \mapsto rx$ 不是零同态, 则说 M 是忠实 R-模. 特别地, 如果存在从 R 到 M 的 R-模单同态, 那么 M 是忠实 R-模.

证明: (1) 对 n 用归纳法. $n=1$ 的情形来自命题 A.2.6. 以下假设 $n \geqslant 1$ 且 $A[b_1,\ldots,b_{n-1}]$ 是有限 A-代数. 由于 b_n 是 A 上的整元, 它也是 $A[b_1,\ldots,b_{n-1}]$ 上的整元. 所以

$$A[b_1,\ldots,b_{n-1}][b_n]=A[b_1,\ldots,b_n]$$

是有限生成 $A[b_1,\ldots,b_{n-1}]$-模. 由注 A.2.4 知 $A[b_1,\ldots,b_n]$ 是有限生成 A-模.

(2) 设 x 和 y 为 B 中两个 A 上的整元. 由 (1) 知 $A[x,y]$ 是有限 A-代数. 由命题 A.2.6 知 $A[x,y]$ 中所有的元素都是 A 上的整元. 特别地, $x+y$, xy 都是 A 上的整元; 对任意 $a\in A$, $f(a)x$ 是 A 上的整元. 所以 B 中 A 上的整元构成 B 的子 A-代数.

(3) 设 $(b_1,\ldots,b_n)\in B^n$ 使得

$$c^n+g(b_1)c^{n-1}+\cdots+g(b_n)=0.$$

那么 c 是 $A[b_1,\ldots,b_n]$ 上的整元. 所以

$$A[b_1,\ldots,b_n][c]=A[g(b_1),\ldots,g(b_n),c]$$

是有限 $A[b_1,\ldots,b_n]$-代数. 由 (1) 知 $A[b_1,\ldots,b_n]$ 是有限 A-代数. 由注 A.2.4 知 $A[g(b_1),\ldots,g(b_n),c]$ 是有限 A-代数. 所以 c 是 A 上的整元. □

定义 A.2.8. 设 $f:A\to B$ 为交换幺环的同态. B 中所有 A 上的整元组成的子环称为 A 在 B 中的**整闭包**. 如果 B 中所有的元素都是 A 上的整元, 则说 B 是**整闭**的 A-代数.

若 A 是整环, 所谓 A 的**整闭包**, 是指 A 在其分式域中的整闭包. 如果 A 等于自身的整闭包, 则说 A 是**整闭整环**.

引理 A.2.9. *设 $f:A\to B$ 为交换幺环同态, B_0 为 A 在 B 中的整闭包. 如果 P 和 Q 是 $B[T]$ 中两个首一多项式, 使得 $PQ\in B_0[T]$. 那么 P 和 Q 都属于 $B_0[T]$.*

证明: 对 $n=\deg(P)$ 归纳. 当 $n=0$ 时 $P(T)=1$, 所以命题是显然的. 当 $n=1$ 时 P 形如 $T+b$, 其中 $b\in B$. 假设

$$Q(T)=T^d+a_1T^{d-1}+\cdots+a_d.$$

这样

$$P(T)Q(T)=T^{d+1}+(a_1+b)T^d+(a_2+ba_1)T^{d-1}+\cdots+(a_d+ba_{d-1})T+a_db,$$

所以

$$\{a_1 + b, a_2 + ba_1, \ldots, a_d + ba_{d-1}, a_d b\} \subset B_0. \tag{A.1}$$

由于 $-b$ 是 PQ 的根, 知 $-b$ 是 B_0 上的整元. 由推论 A.2.7 知 $-b$ 也是 A 上的整元, 也就是说 $-b \in B_0$. 用归纳法从 (A.1) 可推出 $\{a_1, \ldots, a_d\} \subset B_0$.

以下假设 $n \geqslant 2$ 且当 P 的度数小于 n 时命题成立. 令 B' 为一元多项式环 $B[X]$ 模去 $P(X)$ 生成的主理想而得到的商环并将 B 视为 B' 的子环. 令 r 为单项式 X 在 B' 中的剩余类. 那么存在 $P_1 \in B'[T]$ 使得

$$P(T) = (T - r)P_1(T).$$

令 $Q_1(T) = (T - r)Q(T) \in B'[T]$. 依定义有 $PQ = P_1Q_1$. 由归纳假设知 P_1 和 Q_1 中的元素都是 A 上的整元. 再对

$$Q_1(T) = (T - r)Q(T) \in B'[T]$$

应用归纳假设知 r 和 Q 的系数都是 A 上的整元. 由于

$$P(T) = (T - r)P_1(T),$$

由推论 A.2.7 知 P 的系数都是 A 上的整元. □

定义 A.2.10. 设 K 为域, L 为 K-代数. 对任意 $\alpha \in L$, 如果 α 是 K 上的整元, 那么从多项式代数 $K[T]$ 到 L 将 $P \in K[T]$ 映为 $P(\alpha)$ 的 K-代数同态不是单同态. 用 $P_{K,\alpha}$ 表示生成主理想 $\mathrm{Ker}(P \mapsto P(\alpha))$ 的唯一的首一多项式, 称为 α 在 K 上的的**极小多项式**.

命题 A.2.11. *设 A 为整闭整环, K 为 A 的分式域, L/K 为域扩张, 且 B 为 A 在 L 中的整闭包. 对任意 $x \in B$, x 在 K 上的极小多项式属于 $A[T]$.*

证明: 设 $R \in A[T]$ 为某使得 $R(x) = 0$ 的首一多项式. 那么存在 $Q_x \in K[T]$ 使得 $R = P_xQ_x$, 其中 P_x 是 x 在 K 上的极小多项式. 由引理 A.2.9 知 $P_x \in A[T]$. □

A.3 域的代数扩张

定义 A.3.1. 设 K 为域. 所谓 K 的**扩张**, 是指从 K 到某个域 L 的交换幺环同态 $f : K \to L$. 注意到这个同态一定是单同态[50], 从而在不引起歧义的

[50]按定义, 所有 K 中的非零元对于乘法运算可逆, 从而其在 L 中的像对于乘法运算也可逆. 特别地, 域之间的交换幺环同态是同构当且仅当它是满射.

情形下也可将 K 视为 L 的子环, 此时也可将该域扩张记作 L/K 并简单地说 L 是 K 的扩张. 另外, 运算

$$K \times L \longrightarrow L, \quad (a, s) \longmapsto f(a)s$$

赋予 L 一个 K-线性空间结构. 用 $[L:K]$ 来表示 L 作为 K-线性空间的维数. 域 L 中在 K 上的整元也称为 K 上的**代数元**. 如果 $[L:K]$ 有限, 则说扩张 $f: K \to L$ 是**有限扩张**. 如果 L 作为 K-代数是整代数, 则说扩张 L/K 是**代数扩张**. 命题 A.2.6 说明了有限扩张一定是代数扩张.

命题 A.3.2. *设 K 为域, $f: K \to L$ 为 K-代数. 假设 L 是整环且所有 L 中的元素都是 K 上的整元, 那么 L 是域, 也就是说 L 是 K 的代数扩张.*

证明: 设 b 为 L 中的非零元素. 由于 b 是 K 上的整元, 由命题 A.2.6 知 $K[b]$ 是有限维 K-线性空间. 而 L 又是整环, K-线性映射 $K[b] \to K[b]$, $s \mapsto bs$ 是单射, 从而是 K-线性同构. 这说明了存在 $s \in K[b]$ 使得 $bs = 1$, 也就是说 b 是 L 中的乘法可逆元. □

定义 A.3.3. 设 L/K 为域扩张. 若 x 为 L 的元素, 用 $K(x)$ 表示 L 的包含 $K[x]$ 的最小的子域. 由命题 A.3.2 知, 如果 x 是 K 上的整元, 那么 $K[x]$ 是一个域, 从而 $K[x] = K(x)$.

命题 A.3.4. *设 L/K 为域扩张. 如果 f 是代数扩张, 那么任意 K-代数同态 $g: L \to L$ 都是同构.*

证明: 首先域之间的幺环同态都是单同态, 所以只要证明 g 是满射. 设 α 为 L 中的元素,

$$P_\alpha(T) = T^d + a_1 T^{d-1} + \cdots + a_d$$

为 α 在 K 上的极小多项式. 令 $S(P_\alpha)$ 为 P_α 在 L 中的根组成的集合. $S(P_\alpha)$ 是有限集, 其基数不超过 $\deg(P_\alpha)$. 另外, 由于 g 是 K-代数同态, 对任意 $x \in S(P_\alpha)$, 有

$$P_\alpha(g(x)) = g(x)^d + a_1 g(x)^{d-1} + \cdots + a_d = g(P_\alpha(x)) = g(0) = 0,$$

从而 $g(S(P_\alpha)) \subset S(P_\alpha)$. 而 g 又是单射, 知 g 是一一对应. 这说明了 $\alpha \in g(S(P_\alpha)) \subset g(L)$. 这样便证明了 g 是满射. □

记号 A.3.5. 设 L/K 为域扩张. 用 $\mathrm{Aut}_{K\text{-alg}}(L)$ 来表示 L 的 K-代数自同构群. 命题 A.3.4 说明了, 当 L/K 是代数扩张时 $\mathrm{Aut}_{K\text{-alg}}(L) = \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L, L)$.

定义 A.3.6. 设 K 为域. 所谓 K 的**代数闭包**, 是指 K 的一个代数扩张 K^{ac}, 满足以下半泛性质 (versal property)[51]: 对任意 K 的代数扩张 L, 至少存在一个从 L 到 K^{ac} 的 K-代数同态, 也就是说集合 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L, K^{\mathrm{ac}})$ 非空. 如果 K 是自身的代数闭包, 那么说 K 是**代数闭域**.

注 A.3.7. 代数闭包在差一个 K-代数同构的意义下是唯一的. 事实上, 如果 Ω_1 和 Ω_2 是 K 的两个代数闭包, 由半泛性质知道存在 K-代数同态 $g_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$ 和 $g_2 : \Omega_2 \to \Omega_1$. 由命题 A.3.4 知 $g_1 \circ g_2$ 和 $g_2 \circ g_1$ 分别是 Ω_2 和 Ω_1 的 K-代数自同构. 从而 g_1 和 g_2 是 K-代数同构. 注意到上述推理过程实际上证明了从 Ω_1 到 Ω_2 的任意 K-代数同态都是同构.

命题 A.3.8. 设 Ω 为域. 以下条件等价.

(1) Ω 是代数闭域;

(2) 对任意域扩张 $f : \Omega \to \Omega'$, $f(\Omega)$ 是 Ω 在 Ω' 中的整闭包;

(3) 任意代数扩张 $\Omega \to \Omega'$ 都是域同构;

(4) 任意 $\Omega[T]$ 中的次数 $\geqslant 1$ 的多项式在 Ω 中至少有一个根;

(5) $\Omega[T]$ 中任意次数 $\geqslant 1$ 的多项式可以分解成线性多项式的乘积.

证明: “(1) $\Longrightarrow$ (2)” 设 x 为 Ω' 中 Ω 上的整元, 那么 $\Omega(x)$ 是 Ω 的有限扩张. 由代数闭包的半泛性质知存在从域 $\Omega(x)$ 到 Ω 的 Ω-代数同态. 这个同态作为 Ω-线性映射是单射, 从而只能是同构 (这是由于 $\Omega(x)$ 是非零 Ω-线性空间). 这说明了 $\Omega(x) = f(\Omega)$. 特别地, $x \in f(\Omega)$.

“(2) $\Longrightarrow$ (3)”: 设 $f : \Omega \to \Omega'$ 为代数扩张. 由 (2) 知 f 是满射. 而域之间的同态都是单射, 故 f 是同构.

“(3) $\Longrightarrow$ (4)”: 只须证明 $\Omega[T]$ 中的不可约多项式都是一次多项式. 设 P 为 $\Omega[T]$ 中的不可约多项式. 那么商环 $\Omega[T]/(P)$ 是域, 并且是 Ω 的有限扩张, 其作为 Ω-线性空间的维数等于多项式 P 的次数. 故由条件 (3) 知 P 的次数为 1.

“(4) $\Longrightarrow$ (5)” 由欧几里得除法对多项式的次数归纳可得.

“(5) $\Longrightarrow$ (1)”: 设 $f : \Omega \to L$ 为 Ω 的代数扩张. 由于 L 中的元素都是 $\Omega[T]$ 中某多项式的根, 由条件 (5) 知 $L = f(\Omega)$. 这样便知 f 是域同构, 从而 $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\Omega\text{-alg}}(L, \Omega)$. □

[51]通常范畴论中的泛性质 (universal property) 还要求唯一性.

命题 A.3.9. 设 $f : K \to \Omega$ 为域扩张.

(1) 如果 Ω 是代数闭域, 那么对任意 K 的代数扩张 L, 集合 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L, \Omega)$ 非空.

(2) 假设 $f : K \to \Omega$ 是代数扩张. 那么 Ω 是 K 的代数闭包当且仅当 Ω 是代数闭域.

证明: (1) 设 $u : K \to L$ 为代数扩张. 令 Θ 为所有形如 (M, φ) 的对组成的集合, 其中 M 是 L 的包含 $u(K)$ 的子域, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(M, \Omega)$. 在 Θ 上定义序关系 $\prec$ 如下

$$(M', \varphi') \prec (M, \varphi) \text{ 当且仅当 } M' \subset M \text{ 且 } \varphi|_{M'} = \varphi'.$$

由于 $(u(K), u(x) \mapsto f(x)) \in \Theta$, 知集合 Θ 非空. 另外, Θ 的任意全序子集 Θ_0 都有上界[52]. 由 Zorn 引理知道 Θ 具有某极大元 (M_0, φ_0). 倘若存在 $x \in L \setminus M_0$, 那么 $M_0(x) \cong M_0[T]/(P_{M_0,x})$ 是严格包含 M_0 的 L 的子域, 其中 $P_{M_0,x}$ 是 x 在 M_0 上的极小多项式. 另外, 由于 Ω 是代数闭域, 由命题 A.3.8 知存在 $\alpha \in \Omega$ 使得 $P_{M_0,x}(\alpha) = 0$. 从而

$$M_0[T] \longrightarrow \Omega, \quad P \longmapsto P(\alpha)$$

诱导了 M_0-代数同态 $\widetilde{\varphi} : M_0(x) \to \Omega$. 这说明了 $(M_0(x), \widetilde{\varphi}_0) \in \Theta$ 并且 $(M_0, \varphi_0) \prec (M_0(x), \widetilde{\varphi}_0)$. 这与 (M_0, φ_0) 的极大性矛盾. 所以 $M_0 = L$ 且 $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L, \Omega)$.

(2) 假设 Ω 是 K 的代数闭包. 设 $g : \Omega \to \Omega'$ 为 Ω 的代数扩张. 对任意 K 的代数扩张 L/K, 存在 $h \in \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L, \Omega)$. 这样 $g \circ h \in \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L, \Omega')$, 这说明 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L, \Omega')$ 非空. 所以 Ω' 也是 K 的代数闭包, 从而 g 是同构 (见注 A.3.7). 由命题 A.3.8 知 Ω 是代数闭域.

反过来, 若 Ω 是代数闭域, 由 (1) 知扩张 $K \to \Omega$ 满足定义 A.3.6 中的半泛性质, 所以是 K 的代数闭包. □

推论 A.3.10. 设 K 为域, $f : K \to \Omega$ 为 K 的代数闭包. 若 L_1 和 L_2 是 Ω 的包含 $f(K)$ 的子域, 那么任意 K-代数同态 $L_1 \to L_2$ 可以延拓为 Ω 的 K-代数自同构.

[52] 可以取子域 $\bigcup_{(M,\varphi)\in\Theta_0} M$ 并考虑延拓所有 $\varphi : M \to \Omega$, $(M, \varphi) \in \Theta_0$ 的唯一的 K-代数同态.

证明: 只需要考虑 $L_2=\Omega$ 的情形. 设 $g:L_1\to\Omega$ 为 K-代数同态. 由于 f 是代数扩张, 知 g 也是代数扩张. 令 $i:L_1\to\Omega$ 为包含映射. 由命题 A.3.9 知 Ω 是代数闭域, 进而知 $i:L_1\to\Omega$ 是 L_1 的代数闭包, 从而存在自同态 $\varphi:\Omega\to\Omega$ 使得如下图表交换

$$\begin{tikzcd} & \Omega \arrow[d, "\varphi"] \\ L_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "i"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

由于 g 是 K-代数同态, 知 φ 亦然. 又由命题 A.3.4 知 φ 是 K-代数自同构. 从而 $\varphi^{-1}:\Omega\to\Omega$ 是延拓 g 的 K-代数自同构. □

推论 A.3.11. *设 Ω'/K 为域扩张并令 Ω 为 K 在 Ω' 中的整闭包. 假设 Ω' 是代数闭域. 那么 Ω 是 K 的代数闭包.*

证明: 由命题 A.3.2 知 Ω 是域 K 的代数扩张. 若 L/K 是代数扩张, 由命题 A.3.9 (1) 知存在 K-代数同态 $f:L\to\Omega'$. 由于 $f(L)$ 中的元素都是 K 上的整元, 知 $f(L)\subset\Omega$, 从而 f 其实上是 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)$ 中的元素. 这说明 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)$ 非空. 从而 Ω 是 K 的代数闭包. □

推论 A.3.12. *设 L/K 为域的代数扩张, Ω 为 K 的代数闭包. 那么 K-代数自同构群 $\mathrm{Aut}_{K\text{-alg}}(\Omega)$ 如下左作用在 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)$ 之上:*

$$\mathrm{Aut}_{K\text{-alg}}(\Omega)\times\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega),\quad(\sigma,\tau)\longmapsto\sigma\circ\tau.$$

这个群作用满足传递性, 也就是说对任意 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)$ 中的两个元素 τ_0 和 τ, 均存在 $\sigma\in\mathrm{Aut}_{K\text{-alg}}(\Omega)$ 使得 $\tau=\sigma\circ\tau_0$.

证明: 任取 L 到 Ω 的 K-代数同态后可将 L 视为 Ω 的包含 K 的子域. 由推论 A.3.10 知可将 τ_0 和 τ 分别延拓成 Ω 的 K-代数自同构 $\widetilde{\tau}_0$ 和 $\widetilde{\tau}$. 令 $\sigma=\widetilde{\tau}\circ\widetilde{\tau}_0^{-1}$. 那么对任意 $x\in L$ 有

$$\sigma(\tau_0(x))=\widetilde{\tau}(\widetilde{\tau}_0^{-1}(\tau_0(x)))=\widetilde{\tau}(x)=\tau(x).$$

□

A.4　域上的可分有限代数

命题 A.4.1. 设 K 为域, L 为有限 K-代数 (见定义 A.2.3). 令 K'/K 为域扩张并令 $\mathrm{Hom}_K(L,K')$ 为从 L 到 K' 的所有 K-线性映射构成的 K'-线性空间. 那么 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,K')$ 是 $\mathrm{Hom}_K(L,K')$ 中的 K'-线性无关组.

证明: 设 $f_1,\ldots,f_n$ 为 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,K')$ 中两两不同的元素. 将对 n 归纳来证明 $f_1,\ldots,f_n$ 在 K' 上线性无关. $n=0$ 的情形是显然的. 以下假设 $n\geqslant 1$ 且 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ 是 $(K')^n$ 中的元素, 使得

$$\forall\, x\in L,\quad \lambda_1 f_1(x)+\cdots+\lambda_n f_n(x)=0.$$

设 y 为 L 中任一元素, 注意到对任意 $x\in L$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(f_i(y)-f_n(y))f_i(x)&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(f_i(y)-f_n(y))f_i(x)\\&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(xy)-f_n(y)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x)=0.\end{aligned}$$

从而由归纳假设知

$$\forall\, i\in\{1,\ldots,n-1\},\ \forall\, y\in L,\quad \lambda_i(f_i(y)-f_n(y))=0.$$

而 $f_1,\ldots,f_n$ 两两相异, 故 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$. 从而 $\lambda_n=\lambda_n f_n(1)=0$.

□

定义 A.4.2. 设 K 为域, Ω 为 K 的代数闭包. 若 L 是有限 K-代数, 用 $[L:K]$ 表示 L 作为 K-线性空间的维数. 用 $[L:K]_s$ 表示从 L 到 Ω 的 K-代数同态的个数, 也就是说,

$$[L:K]_s:=\mathrm{Card}(\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)).$$

注 A.4.3. 设 K 为域, L 为有限的交换 K-代数, Ω'/K 为域扩张, Ω 为 K 在 Ω' 中的整闭包 (见定义 A.2.8). 假设 $f:L\to\Omega'$ 是 K-代数同态, 那么 $f(L)$ 是有限维 K-线性空间. 由命题 A.2.6 知 $f(L)$ 中的元素都是 K 上的整元, 从而 $f(L)\subset\Omega$. 这说明

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega')=\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega).$$

当 Ω' 是代数闭域时, Ω 是 K 的代数闭包 (见推论 A.3.11), 从而以下等式成立

$$[L:K]_s=\mathrm{Card}(\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega')).\tag{A.2}$$

命题 A.4.4. 设 K 为域, L 为有限 K-代数. 那么如下不等式成立:

$$[L:K]_s \leqslant [L:K].$$

另外, 以下条件等价:

(1) $[L:K]_s = [L:K]$;

(2) 若 Ω/K 是域扩张, 其中 Ω 是代数闭域, 那么 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)$ 构成 $\mathrm{Hom}_K(L,\Omega)$ 的一组基;

(3) 若 Ω/K 是域扩张, 其中 Ω 是代数闭域, 那么 $L \otimes_K \Omega$ 作为 Ω-代数同构于 $\Omega^{[L:K]}$;

(4) 存在某个域扩张 Ω/K, 使得 $L \otimes_K \Omega$ 作为 Ω-代数同构于 $\Omega^{[L:K]}$.

证明: 设 Ω/K 为域扩张, 使得 Ω 是代数闭域. 命题 A.4.1 说明了 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)$ 是 $\mathrm{Hom}_K(L,\Omega)$ 中的 Ω-线性无关组. 从而

$$[L:K]_s = \mathrm{Card}(\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)) \leqslant \dim_\Omega(\mathrm{Hom}_K(L,\Omega)) = [L:K].$$

如果等号成立, 那么 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)$ 构成 Ω-线性空间 $\mathrm{Hom}_K(L,\Omega)$ 的一组基, 这便证明了 (1) $\Longrightarrow$ (2).

"(2) $\Longrightarrow$ (3)" 假设 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega) = \{f_1,\dots,f_n\}$ 构成 Ω-线性空间 $\mathrm{Hom}_K(L,\Omega)$ 的一组基. Ω-线性映射

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Hom}_K(L,\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Omega(L\otimes_K \Omega,\Omega)\\ f & \longmapsto & (x\otimes a \mapsto af(x))\end{array}$$

是一一对应, 其逆映射将 $\varphi: L\otimes_K \Omega \to \Omega$ 映为 $(x\in L)\mapsto \varphi(x\otimes 1)$. 所以 $f_1,\dots,f_n$ 看作 $\mathrm{Hom}_\Omega(L\otimes_K\Omega,\Omega)$ 的元素后构成 $L\otimes_K\Omega$ 作为 Ω-线性空间的对偶空间的一组基. 从而 K-代数同态 $f: L\otimes_K \Omega \longrightarrow \Omega^n$

$$f(x_1\otimes\lambda_1+\cdots+x_r\otimes\lambda_r) := \sum_{i=1}^{r}\lambda_i(f_1(x_i),\dots,f_n(x_i))$$

是同构.

条件 (4) 是 (3) 的特例.

"(4) $\Longrightarrow$ (1)": 若 Ω' 是 Ω 的代数闭包, 那么 $L\otimes_K\Omega' \cong (L\otimes_K\Omega)\otimes_K\Omega'$ 作为 Ω-代数同构于 $(\Omega')^{[L:K]}$, 因此不妨假设 Ω 是代数闭域. 注意到 $\Omega^{[L:K]}$ 到 Ω 的 $[L:K]$ 个投影映射都是 K-代数同态. 这说明了 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)$ 中有 $[L:K]$ 个两两不同的元素, 从而 $[L:K]_s = [L:K]$. □

定义 A.4.5. 设 K 为域, L 为有限 K-代数. 倘若 $[L:K]_s=[L:K]$, 就说 L 是**可分**K-代数. 特别地, 如果 L 是域 K 的有限扩张, 作为 K-代数是可分代数, 则说 L 是 K 的**可分扩张**.

命题 A.4.6. 设 K 为域, L 为有限 K-代数. 若 K'/K 是域扩张, 那么

$$[L:K]_s=[L\otimes_K K':K']_s.$$

特别地, L 是可分 K-代数当且仅当 $L\otimes_K K'$ 是可分 K'-代数.

证明: 设 Ω' 为 K' 的代数闭包. 依定义有

$$[L\otimes_K K':K']_s=\mathrm{Card}(\mathrm{Hom}_{K'\text{-alg}}(L\otimes_K K',\Omega')).$$

而映射

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{K'\text{-alg}}(L\otimes_K K',\Omega')\\ f & \longmapsto & (s\otimes\lambda\mapsto\lambda f(s))\end{array}$$

是双射, 从而由公式 (A.2) 得到

$$[L\otimes_K K':K']_s=\mathrm{Card}(\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega'))=[L:K]_s.$$

□

命题 A.4.7. 设 K'/K 为域的有限扩张, L 为有限 K'-代数. 那么 L 作为 K-代数是有限代数, 并且如下等式成立

$$[L:K]=[L:K'][K':K], \tag{A.3}$$

$$[L:K]_s=[L:K']_s[K':K]_s. \tag{A.4}$$

特别地, L 作为 K-代数是可分代数当且仅当 K'/K 是可分扩张且 L 作为 K'-代数是可分代数.

证明: 设 $(b_i)_{i=1}^n$ 为 K' 在 K 上的一组基, $(s_j)_{j=1}^m$ 为 L 在 K' 上的一组基. 那么

$$(b_is_j)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}}$$

为 L 在 K 上的一组基. 从而 L 作为 K-线性空间是有限维的, 并且等式 (A.3) 成立.

设 Ω' 为 K' 的代数闭包. 对任意 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(K',\Omega')$, 选择一个延拓 φ 的 K-代数自同构 $\widetilde{\varphi}:\Omega'\to\Omega'$ (这样的自同构的存在性见推论 A.3.10). 注意到映射

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(K',\Omega')\times\mathrm{Hom}_{K'\text{-alg}}(L,\Omega') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega') \\ (\varphi,\psi) & \longmapsto & \widetilde{\varphi}^{-1}\circ\psi\end{array}$$

是双射, 其逆映射将 $\eta\in\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega')$ 映为

$$(\eta|_{K'},\widetilde{\eta|_{K'}}\circ\eta).$$

从而等式 (A.4) 成立. □

定义 A.4.8. 设 K 为域, L 为有限 K-代数. 对任意 $\alpha\in L$,

(1) 用 $M_{L/K,\alpha}$ 表示从 L 到自身将 $s\in L$ 映为 αs 的 K-线性映射,

(2) 用 $Q_{L/K,\alpha}\in K[T]$ 表示 $M_{L/K,\alpha}$ 的特征多项式,

(3) 用 $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)$ 表示 $M_{L/K,\alpha}$ 的迹,

(4) 用 $N_{L/K}(\alpha)$ 表示 $M_{L/K,\alpha}$ 的行列式.

依定义, 多项式 $Q_{L/K,\alpha}\in K[T]$ 形如

$$Q_{L/K,\alpha}(T)=T^d-\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)T^{d-1}+\cdots+(-1)^dN_{L/K}(\alpha),$$

其中 $d=[L:K]$. 另外, 若 α 和 β 是 L 中两个元素, 那么

$$M_{L/K,\alpha+\beta}=M_{L/K,\alpha}+M_{L/K,\beta},\quad M_{L/K,\alpha\beta}=M_{L/K,\alpha}\circ M_{L/K,\beta}.$$

特别地, 如下等式成立

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha+\beta)&=\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)+\mathrm{Tr}_{L/K}(\beta),\\ N_{L/K}(\alpha\beta)&=N_{L/K}(\alpha)N_{L/K}(\beta).\end{aligned}$$

命题 A.4.9. 设 L 为可分有限 K-代数, Ω 为包含 L 的代数闭域. 那么以下命题成立.

(1) 对任意 $\alpha\in L$, 多项式 $Q_{L/K,\alpha}$ 在 $\Omega[T]$ 中可以分解成

$$Q_{L/K,\alpha}(T)=\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)}(T-\sigma(\alpha)).\qquad\text{(A.5)}$$

(2) 对任意 $\alpha \in L$,

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)} \sigma(\alpha), \tag{A.6}$$

$$N_{L/K}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)} \sigma(\alpha). \tag{A.7}$$

(3) 设 A 为 K 的子环, B 为 A 在 L 中的整闭包. 对任意 $\alpha \in B$, $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)$ 和 $N_{L/K}(\alpha)$ 都是 A 上的整元. 特别地, 如果 A 在 K 中整闭, 那么 $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)$ 和 $N_{L/K}(\alpha)$ 属于 A.

证明: 设 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_d\}$. 由命题 A.4.4 及其证明知 K-代数同态

$$\varphi : L \otimes_K \Omega \longrightarrow \Omega^d, \quad x \otimes \lambda \mapsto (\lambda\sigma_i(x))_{i=1}^d$$

是同构. 在这个同构下 $M_{L/K,\alpha}$ 所诱导的 Ω^d 的自同态将 $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ 映为 $(\sigma_1(\alpha)\omega_1, \cdots \sigma_d(\alpha)\omega_d)$, 其特征多项式为

$$\prod_{i=1}^d (T - \sigma_i(\alpha)).$$

由于该特征多项式与 $M_{L/K,\alpha}$ 的特征多项式相同, 知 (1) 成立. (2) 是 (1) 的直接推论.

(3) 由于 α 是 A 上的整元, 对任意 $\sigma \in \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L,\Omega)$, $\sigma(\alpha)$ 是 A 上的整元. 由 (A.5) 知 $Q_{L/K,\alpha}$ 的系数都是 A 上的整元, 从而 $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)$ 和 $N_{L/K}(\alpha)$ 都是 A 上的整元. □

引理 A.4.10. 设 K 为域, L 为有限的交换 K-代数. 假设 L 是约化环[53], 那么存在 K 的有限扩张 $K_1, \ldots, K_n$ 使得 L 同构于 $K_1 \times \cdots \times K_n$.

证明: 对 $[L:K]$ 归纳. 当 $[L:K]=0$ 时命题显然成立. 当 $[L:K]=1$ 时 L 同构于 K, 命题成立. 另外, 如果 L 是一个域, 那么它是 K 的有限扩张, 从而命题也成立. 如果 L 不是一个域, 在 L 的非零理想中取一个作为 K-线性空间维数最小的, 记作 $\mathfrak{a}$. 由于 L 不是域, 知 $\mathfrak{a} \neq L$, 也就是说 $1 \notin \mathfrak{a}$. 在 $\mathfrak{a}$ 中任选一个非零元 x. 由于 $x^2 \neq 0$ 且 x^2 生成的理想包含于 $\mathfrak{a}$, 知 $\mathfrak{a} = x^2 L$. 这说明了 $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$. 由推论 A.1.3 知存在 $b \in \mathfrak{a}$ 使得

$$\forall y \in \mathfrak{a}, \quad by = y.$$

[53]即 L 不含有非零的幂零元.

特别地, $b \notin \{0,1\}$ 且 $b^2 = b$ 令 $L_0 = L/bL$, $L_1 = L/(1-b)L$, 并令 $p_0 : L \to L_0$ 和 $p_1 : L \to L_1$ 为投影同态. 用 $\varphi : L \to L_0 \times L_1$ 表示将 $s \in L$ 映为 $(p_0(s), p_1(s))$ 的 K-代数同态. 对任意 $(s,t) \in L \times L$ 有

$$p_0(bt + (1-b)s) = p_0(s), \quad p_1(bt + (1-b)s) = p_1(t),$$

从而 φ 是满射. 另外, 若 u 是 $bL \cap (1-b)L$ 中的元素, 那么存在 $(s,t) \in L \times L$ 使得 $u = bs = (1-b)t$. 这样

$$bu = b(1-b)t = 0, \quad (1-b)u = b(1-b)s = 0,$$

从而 $u = bu + (1-b)u = 0$. 如此便知道 φ 是 K-代数同构. 由于 $b \notin \{0,1\}$, 知

$$\max\{[L_0 : K], [L_1 : K]\} < [L : K].$$

由归纳假设就得到要证的命题. □

命题 A.4.11. 设 K 为域, L 为有限的交换 K-代数. 那么以下条件等价:

(1) L 是可分 K-代数;

(2) 对任意域扩张 K'/K, $L \otimes_K K'$ 是约化环;

(3) 若 Ω 是 K 的代数闭包, 那么 $L \otimes_K \Omega$ 是约化环;

(4) 对任意 $\alpha \in L$, α 在 K 上的极小多项式 P_α 是可分多项式[54];

(5) L 上的对称 K-双线性形式

$$L \times L \longrightarrow K, \quad (\alpha, \beta) \longmapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha\beta) \tag{A.8}$$

是非退化[55]的双线性形式.

证明: “(1) $\Longrightarrow$ (2)”: 首先证明 L 是约化环. 假设 L 具有非零的幂零元 α. 设 Ω 为 K 的代数闭包. 那么至少存在一个 K-线性映射 $f : L \to \Omega$ 使得 $f(\alpha)$ 非零. 然而对任意 K-代数同态 $\varphi : L \to \Omega$, $\varphi(\alpha)$ 是 Ω 中的幂零元, 从而 $\varphi(\alpha) = 0$. 这样 f 不能写成 K-代数同态的 Ω-线性组合. 由命题 A.4.4 知 L 不是可分 K-代数.

[54]即 P_α 在 K 的代数闭包中的根都不是重根.

[55]也就是说, 对任意 $\alpha \in L \setminus \{0\}$ 都存在 $\beta \in L$ 使得 $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha\beta) \neq 0$.

如果 K'/K 是域扩张, 由命题 A.4.6 知 $L\otimes_K K'$ 是可分 K'-代数, 由上述推理知 $L\otimes_K K'$ 是约化环.

(3) 是 (2) 的特例.

"(3) $\Longrightarrow$ (4)": 令 Ω 为 K 的代数闭包. 注意到 α 在 K 上的极小多项式也等于 K-线性映射 $M_{L/K,\alpha}$ 的极小多项式. 这说明了 P_α 也是 $\alpha\otimes 1\in L\otimes_K\Omega$ 在 Ω 上的极小多项式. 如果 P_α 不是可分多项式, 那么存在 $Q\in\Omega[T]$ 以及自然数 $n\geqslant 1$, 使得 $\deg(Q)<\deg(P_\alpha)$ 且 P_α 整除 Q^n. 这样 $Q(\alpha\otimes 1)\neq 0$ 但 $Q(\alpha\otimes 1)^n=0$, 这与 $L\otimes_K\Omega$ 是约化环矛盾.

"(4) $\Longrightarrow$ (5)": 假设 $\alpha\in L\setminus\{0\}$ 使得对任意不小于 1 的自然数有 $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha^n)$=0. 令 Ω 为 K 的代数闭包. 假设 $M_{L/K,\alpha}$ 不是幂零映射, 并设 $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ 为 $M_{L/K,\alpha}$ 的特征多项式 $Q_{L/K,\alpha}$ 在 Ω 中两两不同的非零的根, $d_1,\ldots,d_r$ 分别为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ 的重数. 那么

$$\forall\, i\in\{1,\ldots,r\},\quad \mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha^i)=d_1\lambda_1^i+\cdots+d_r\lambda_r^i=0.$$

然而由 Vandermonde 矩阵的行列式公式知

$$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r\end{pmatrix}=\lambda_1\cdots\lambda_r\prod_{\substack{(i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2\\ i<j}}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0.$$

这与上式矛盾. 从而 $M_{L/K,\alpha}$ 必是幂零映射. 由于 $M_{L/K,\alpha}$ 的极小多项式 P_α 在 Ω 中没有重根, 知 $M_{L/K,\alpha}=0$. 这与 α 非零的假设矛盾.

"(5) $\Longrightarrow$ (2)": 令 K'/K 为域扩张并用 $L_{K'}$ 表示 $L\otimes_K K'$. 注意到

$$(L\otimes_K K')\times(L\otimes_K K')\longrightarrow\Omega,\quad (x,y)\longmapsto \mathrm{Tr}_{(L\otimes_K K')/K'}(xy)\qquad (A.9)$$

是由 (A.8) 在域扩张 K'/K 下诱导的双线性形式, 从而也是非退化的双线性形式. 假设 x 是 $L\otimes_K K'$ 中的幂零元, 那么对任意 $y\in L\otimes_K K'$ 来说 xy 也是 $L\otimes_K K'$ 中的幂零元, 进而 $\mathrm{Tr}_{(L\otimes_K K')/K'}(xy)=0$. 由于双线性形式 (A.9) 非退化, 知 $x=0$. 这说明了 $L\otimes_K K'$ 是约化环.

"(2) $\Longrightarrow$ (1)": 令 Ω 为 K 的代数闭包. 由于 $L\otimes_K\Omega$ 是约化环, 由引理 A.4.10 知存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $L\otimes_K\Omega\cong\Omega^n$. 由命题 A.4.4 得到 L 是可分 K-代数. □

推论 A.4.12. 设 L 为可分有限 K 代数. 在 K-线性空间 $\mathrm{Hom}_K(L,K)$ 上考虑运算

$$L \times \mathrm{Hom}_K(L,K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(L,K), \quad (a,f) \longmapsto (x \mapsto f(ax)).$$

在这个运算下 $\mathrm{Hom}_K(L,K)$ 构成秩为 1 的自由 L-模, 其一个生成元是迹映射 $\mathrm{Tr}_{L/K}$.

证明: 考虑 L 上的 K-双线性形式

$$L \times L \longrightarrow K, \quad (a,b) \longmapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(ab).$$

由于 L/K 是可分有限扩张, 这个 K-双线性形式非退化. 从而任意 $\mathrm{Hom}_K(L,K)$ 中的元素可以唯一地写成 $x \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(ax)$ 的形式, 其中 $a \in L$. 这说明 $\mathrm{Hom}_K(L,K)$ 是由 $\mathrm{Tr}_{L/K}$ 生成的自由 L-模. □

定义 A.4.13. 设 L 为有限 K-代数. 如果 $(e_i)_{i=1}^r$ 是 L 在 K 上的一组基, 用 $H_{L/K}(e_1,\dots,e_r)$ 表示对称矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}_{L/K}(e_1^2) & \mathrm{Tr}_{L/K}(e_1e_2) & \cdots & \mathrm{Tr}_{L/K}(e_1e_r) \\ \mathrm{Tr}_{L/K}(e_2e_1) & \mathrm{Tr}_{L/K}(e_2^2) & \cdots & \mathrm{Tr}_{L/K}(e_2e_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Tr}_{L/K}(e_re_1) & \mathrm{Tr}_{L/K}(e_re_2) & \cdots & \mathrm{Tr}_{L/K}(e_r^2) \end{pmatrix},$$

并用 $\mathrm{Disc}_{L/K}(e_1,\dots,e_r)$ 来表示该矩阵的行列式, 称作 $(e_i)_{i=1}^r$ 的**判别式**. 由命题 A.4.11 知 L 为可分 K-代数当且仅当 L 上的 K-双线性形式 $(\alpha,\beta) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha\beta)$ 非退化, 即 $\mathrm{Disc}_{L/K}(e_1,\dots,e_r) \neq 0$.

命题 A.4.14. 设 L 为有限 K-代数, $(e_i)_{i=1}^d$ 为 L 作为 K-线性空间的一组基, Ω 为 K 的扩张, 使得 Ω 是代数闭域.

(1) 假设 L 是可分 K-代数, $\mathrm{Hom}_K(L,\Omega)=\{\sigma_1,\dots,\sigma_d\}$, 并令

$$A_{L/K}(e_1,\dots,e_d) = \begin{pmatrix} \sigma_1(e_1) & \sigma_2(e_1) & \cdots & \sigma_d(e_1) \\ \sigma_1(e_2) & \sigma_2(e_2) & \cdots & \sigma_d(e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1(e_d) & \sigma_2(e_d) & \cdots & \sigma_d(e_d) \end{pmatrix}.$$

那么如下等式成立

$$H_{L/K}(e_1,\dots,e_d) = A_{L/K}(e_1,\dots,e_d)A_{L/K}(e_1,\dots,e_d)^T,$$

其中 $A_{L/K}(e_1,\ldots,e_d)^T$ 表示 $A_{L/K}(e_1,\ldots,e_d)$ 的转置矩阵.

(2) 假设 L 是由一个元素 α 生成的. 那么 L 是可分 K-代数当且仅当 α 的极小多项式是可分多项式. 另外当 L 是可分 K-代数时

$$\mathrm{Disc}_{L/K}(1,\alpha,\ldots,\alpha^{d-1})=\prod_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\1\leqslant i<j\leqslant d}}(\sigma_i(\alpha)-\sigma_j(\alpha))^2.$$

证明: (1) 由命题 A.4.9 (2) 知

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(e_ie_j)=\sum_{\ell=1}^{d}\sigma_\ell(e_ie_j)=\sum_{\ell=1}^{d}\sigma_\ell(e_i)\sigma_\ell(e_j).$$

从而要证的等式成立.

(2) 由命题 A.4.11 知, 如果 L 是可分 K-代数, 那么 α 的极小多项式是可分多项式. 反过来, 假设 α 的极小多项式

$$P(T)=T^d+a_1T^{d-1}+\cdots+a_d$$

是可分多项式. 令 Ω 为 K 的代数闭包, 并令 $\omega_1,\ldots,\omega_d$ 为 P 在 Ω 中 d 个相异的根. 由于 L 由 α 生成, 知 $L\cong K[T]/(P)$. 对任意 $i\in\{1,\ldots,d\}$, 从 $K[T]/(P)$ 到 Ω 将多项式 Q 的等价类映为 $Q(\omega_i)$ 的映射是 K-代数同态. 这说明 $[L:K]_s=[L:K]$, 从而 L 是可分 K-代数.

注意到 $\{1,\alpha,\ldots,\alpha^{d-1}\}$ 构成 L 在 K 上的一组基. 此时

$$A_{L/K}(1,\alpha,\ldots,\alpha^{d-1})=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\\sigma_1(\alpha)&\sigma_2(\alpha)&\cdots&\sigma_d(\alpha)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\sigma_1(\alpha)^{d-1}&\sigma_2(\alpha)^{d-1}&\cdots&\sigma_d(\alpha)^{d-1}\end{pmatrix}$$

是 Vandermonde 矩阵, 从而

$$\begin{aligned}\mathrm{Disc}_{L/K}(1,\alpha,\ldots,\alpha^{d-1})&=\det(A_{L/K}(1,\alpha,\ldots,\alpha^{d-1}))^2\\&=\prod_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\1\leqslant i<j\leqslant d}}(\sigma_i(\alpha)-\sigma_j(\alpha))^2.\end{aligned}$$

□

定义 A.4.15. 设 L/K 为域的有限扩张, $\alpha \in L$. 如果 α 在 K 上的极小多项式是可分多项式, 就说 α 在 K 上**可分**. L 中所有在 K 上可分的元素组成的集合称为 K 在 L 中的**可分闭包**. 由命题 A.4.11 知 K 在 L 中的可分闭包等于 L 当且仅当 L/K 是可分扩张. 如果 K 在 L 中的可分闭包等于自身, 则说 L/K 是**完全不可分扩张**.

命题 A.4.16. *设 L/K 为域的有限扩张, K^s 为 K 在 L 中的可分闭包. 那么 K^s 是 L 的包含 K 的子域, 作为 K 的扩张是可分扩张. 另外, L/K^s 是完全不可分扩张.*

证明: 设 a 和 b 是 L 中两个可分元素. 由于 b 在 $K(a)$ 上的极小多项式整除它在 K 上的极小多项式, 知 b 是 $K(a)$ 上的可分元素. 由命题 A.4.14 (2) 知 $K(a,b)/K(a)$ 和 $K(a)/K$ 都是可分扩张, 进而由命题 A.4.7 知 $K(a,b)/K$ 是可分扩张. 由命题 A.4.11 知 $K(a,b)$ 中的元素都是 K 上的可分元素, 即 $K(a,b) \subset K^s$. 从而 K^s 是 L 的包含 K 的子域. 另外, 由于 K^s 中的元素都是 K 上的可分元素, 由命题 A.4.11 知 K^s/K 是可分扩张.

如果存在 $\alpha \in L \setminus K^s$ 是 K^s 上的可分元素, 由命题 A.4.14 (2) 知 $K^s(\alpha)/K^s$ 是可分扩张, 从而由命题 A.4.7 和扩张 K^s/K 的可分性知 $K^s(\alpha)/K$ 是可分扩张. 这说明 α 是 K 上的可分元素, 矛盾. □

注 A.4.17. 设 L/K 为域的有限扩张, $\alpha \in L$,

$$P(T) = T^d + a_1 T^{d-1} + \cdots + a_d$$

为 α 的极小多项式. 令 P' 为 P 的导多项式, 定义为

$$P'(T) = dT^{d-1} + (d-1)a_1 T^{d-2} + \cdots + a_{d-1}.$$

注意到 P 是可分多项式当且仅当多项式 P 和 P' 互素. 由于 P 是不可约多项式, 而 $\deg(P') < \deg(P)$, 所以 P 是可分多项式当且仅当 $P' \neq 0$. 这说明了当 K 的特征为 0 时 L/K 总是可分扩张.

假设 K 的特征为某素数 p. 那么 $P' = 0$ 当且仅当 $p \mid d$ 且对任意的 $n \in \{1, \ldots, d\} \setminus p\mathbb{Z}$ 有 $a_n = 0$. 此时多项式 P 可以写成

$$P(T) = (T^p)^{d/p} + a_{d-p}(T^p)^{(d-p)/p} + \cdots + a_d$$

的形式. 特别地, α^p 的特征多项式的次数不超过 d/p. 通过递归可以证明存在 $b \in \mathbb{N}$, $b \geqslant 1$, 使得 $p^b \leqslant d$ 且 α^{p^b} 在 K 上可分. 特别地, 如果 L/K 是完

全不可分扩张, 那么存在 $b\in\mathbb{N}$, $b\geqslant 1$ 使得 $p^b\leqslant[L:K]$ 且对任意 $\alpha\in L$ 有 $\alpha^{p^b}\in K$.

命题 A.4.18. 设 L/K 为域的有限扩张. 那么 $[L:K]_s=1$ 当且仅当 L/K 是完全不可分扩张. 特别地, 如果 K^s 是 K 在 L 中的可分闭包, 那么

$$[K^s:K]=[L:K]_s. \tag{A.10}$$

证明: 当 K 的特征为 0 时 L/K 总是可分扩张, 此时 $[L:K]_s=[L:K]$. 所以 $[L:K]_s=1$ 当且仅当 $L=K$, 而 K/K 也是唯一的完全不可分扩张. 从而命题成立.

以下假设 K 的特征 p 大于 0 并令 Ω 为 K 的代数闭包. 假设 L/K 是完全不可分扩张. 由注 A.4.17 知存在 $b\in\mathbb{N}$, $b\geqslant 1$ 使得对任意 $\alpha\in L$ 有 $\alpha^{p^b}\in K$. 若 f 和 g 为从 L 到 Ω 的两个 K-代数同态, 那么

$$\forall\,\alpha\in L,\quad f(\alpha)^{p^b}=g(\alpha)^{p^b}.$$

而域 K 的特征为 p, 将 $(f(\alpha)-g(\alpha))^{p^b}$ 二项式展开知

$$(f(\alpha)-g(\alpha))^{p^b}=f(\alpha)^{p^b}+(-1)^{p^b}g(\alpha)^{p^b}=f(\alpha)^{p^b}-g(\alpha)^{p^b}=0,$$

即 $f(\alpha)=g(\alpha)$. 反过来, 如果 $L\setminus K$ 中含有至少一个 K 上的可分元 β, 那么

$$[K(\beta):K]_s=[K(\beta):K]>1,$$

从而由 (A.4) $[L:K]_s=[L:K(\beta)]_s[K(\beta):K]_s>1$.

最后, 由于 K^s/K 是可分扩张, 知

$$[K^s:K]=[K^s:K]_s=\frac{[L:K]_s}{[L:K^s]_s}=[L:K]_s.$$

□

引理 A.4.19. 设 L 为域. 那么 $L^\times$ 的任何有限子群都是循环群.

证明: 设 G 为 $L^\times$ 的有限子群, n 为 G 中元素阶的最大值. 那么对任意 $x\in G$ 有 $x^n=1$. 由于多项式 T^n-1 在 L 中至多只有 n 个根, 知 n 等于 G 的基数, 从而 G 是循环群. □

命题 A.4.20. 设 L/K 为域的有限扩张. 设 K 是有限域, 那么扩张 L/K 是可分扩张, 并且它是单扩张, 也就是说存在 $\alpha\in L^s$ 使得 $L=K(\alpha)$.

证明: 首先考虑 K 是有限域的情形. 此时 L 也是有限域. 由引理 A.4.19 知 $L^\times$ 是循环群. 若 α 为该循环群的一个生成元, 那么有 $L=K(\alpha)$. 另外, 如果 q 是 L 的基数, 那么 L 中的每一个元素都是多项式 T^q-T 的根, 也就是说
$$T^q-T=\prod_{x\in L}(T-x).$$
这说明 T^q-T 是 $K[T]$ 中的可分多项式, 从而 L 中任意元素的极小多项式都是可分多项式, 即 $L^s=L$. 由命题 A.4.11知 L/K 是可分扩张. □

命题 A.4.21. 域的有限可分扩张都是单扩张.

证明: 设 L/K 是有限可分扩张. 由命题 A.4.20 知不妨假设 K 是无限域. 用归纳法可将命题化归为如下结论: 如果 a 和 b 是 L 中两个可分元素, 那么存在 $\theta\in K(a,b)$ 使得 $\{a,b\}\subset K(\theta)$. 设 P 和 Q 为 a 和 b 的极小多项式. 令 Ω 为 K 的代数闭包. 将 P 和 Q 在 $\Omega[T]$ 中分解成单项式的乘积
$$P(T)=(T-a_1)\cdots(T-a_n),\quad Q(T)=(T-b_1)\cdots(T-b_m),$$
其中 $a_1,\ldots,a_n$ 两两不同, $b_1,\ldots,b_m$ 也两两不同. 不妨设 $a_1=a$, $b_1=b$. 由于 K 是无限域, 存在
$$\lambda\in K^\times\setminus\Big\{\frac{a-a_i}{b-b_j}\mid (i,j)\in\{2,\ldots,n\}\times\{2,\ldots,m\}\Big\}.$$
令 $\theta=a+\lambda b$, 并令
$$H(T)=P(\theta-\lambda T)\in K(\theta)[T].$$
依定义, b 是 H 在 L 中的根, 而对任意 $j\in\{2,\ldots,m\}$, b_j 都不是 H 的根. 这说明了 H 和 Q 作为 $K(\theta)[T]$ 中多项式的最大公因式等于 $T-b$, 从而 $b\in K(\theta)$, 进而 $a=\theta-\lambda b$ 也是 $K(\theta)$ 中的元素. □

注 A.4.22. 设 A 为整闭整环, K 为 A 的分式域, L/K 为可分有限 K-代数, B 为 A 在 L 中的整闭包. 由命题 A.4.9 知, 对任意 $\alpha\in B$, $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)$ 是 A 上的整元, 从而属于 A. 设 $(e_i)_{i=1}^r$ 为 L 在 K 上的一组基, 使得 $\{e_1,\ldots,e_r\}\subset B$. 令 $(e_i^*)_{i=1}^r$ 为 $(e_i)_{i=1}^r$ 相对于非退化对称双线性形式 $(\alpha,\beta)\mapsto\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha\beta)$ 的对偶基, 也就是说
$$\forall\,(i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2,\quad \mathrm{Tr}_{L/K}(e_ie_j^*)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

如果 $s=\lambda_1 e_1^*+\cdots+\lambda_r e_r^*$ 是 B 中的元素, 其中 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in K^r$, 那么有

$$\forall\, i\in\{1,\ldots,r\},\quad \lambda_i=\mathrm{Tr}_{L/K}(se_i)\in A.$$

这说明了

$$B\subset Ae_1^*+\cdots+Ae_r^*.$$

另外, 按定义 $H_{L/K}(e_1,\ldots,e_r)$ 是从基 $(e_i^*)_{i=1}^r$ 到 $(e_i)_{i=1}^r$ 的转移矩阵. 若用 $H_{L/K}(e_1,\ldots,e_r)'$ 表示 $H_{L/K}(e_1,\ldots,e_r)^T$ 的伴随矩阵, 那么有

$$\begin{aligned}\mathrm{Disc}_{L/K}(e_1,\ldots,e_r)\begin{pmatrix}e_1^*\\ \vdots\\ e_r^*\end{pmatrix}&=H_{L/K}(e_1,\ldots,e_r)'H_{L/K}(e_1,\ldots,e_r)^T\begin{pmatrix}e_1^*\\ \vdots\\ e_r^*\end{pmatrix}\\&=H_{L/K}(e_1,\ldots,e_r)'\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_r\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

这说明了

$$\mathrm{Disc}_{L/K}(e_1,\ldots,e_r)B\subset Ae_1+\cdots+Ae_r.$$

A.5 Galois 扩张

命题 A.5.1. 设 K 为域, L 为 K 的代数扩张, Ω 为 K 的代数闭包. 下列条件等价:

(1) 对任意 $K[T]$ 中的不可约多项式 F, 如果 F 在 L 中有根, 那么它在 $L[T]$ 中可以分解成次数为 1 的多项式的乘积.

(2) 对任意 $x\in L$, x 在 $K[T]$ 中的极小多项式可以在 $L[T]$ 中分解成次数为 1 的多项式的乘积.

(3) 若 φ_1 和 φ_2 是从 L 到 Ω 的 K-代数同态, 那么 $\varphi_1(L)=\varphi_2(L)$.

(4) 若 φ_1 和 φ_2 是从 L 到 Ω 的 K-代数同态, 那么存在 L 的 K-代数自同构 σ, 使得 $\varphi_2=\varphi_1\circ\sigma$.

证明: “(1) $\Longrightarrow$ (2)”: 依定义, x 的极小多项式是以 x 为根的 $K[T]$ 中的不可约多项式.

“(2) $\Longrightarrow$ (3)”: 设 x 为 L 中的元素, $P \in K[T]$ 为 x 的极小多项式, S 为 P 在 L 中的根组成的集合. 由于 P 在 $L[T]$ 中可以分解成线性多项式的乘积, 知 $\varphi_1(S)$ 和 $\varphi_2(S)$ 等于 P 在 Ω 中的根组成的集合. 这说明了 $\varphi_1(S) = \varphi_2(S)$. 特别地, $\varphi_1(x) \in \varphi_2(S) \subset \varphi_2(L)$, $\varphi_2(x) \in \varphi_1(S) \subset \varphi_1(L)$. 这样就得到 $\varphi_1(L) = \varphi_2(L)$.

“(3) $\Longrightarrow$ (4)”: 令 ψ_1 为 $\varphi_1 : L \to \varphi_1(L)$ 的逆映射, 并令 σ 为复合 K-代数同构

$$L \xrightarrow{\varphi_2} \varphi_2(L) = \varphi_1(L) \xrightarrow{\psi_1} L \ ,$$

那么等式 $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \sigma$ 成立.

(4) $\Longrightarrow$ (3) 是显然的.

“(3) $\Longrightarrow$ (2)”: 设 $x \in L$, P 为 x 在 $K[T]$ 中的极小多项式. 任意取定一个 K 代数同态 $\varphi : L \to \Omega$. 假设 y 是 P 在 Ω 中的一个根, 并令 $\psi_0 : K(x) \to \Omega$ 为使得 $\psi_0(x) = y$ 的 K-代数同态. 由推论 A.3.10 知 ψ_0 可以延拓成 Ω 的某 K-代数自同构 ψ. 条件 (3) 说明 $\varphi(L) = \psi(L)$, 从而 $y \in \varphi(L)$. 由命题 A.3.8 知 P 在 $\Omega[T]$ 中可以分解成线性多项式的乘积, 而 P 在 Ω 中的根又都是 $\varphi(L)$ 中的元素, 从而 P 在 $L[T]$ 中也可以分解成线性多项式的乘积.

“(2) $\Longrightarrow$ (1)”: 不妨设 F 是首一多项式. 若 x 是 F 在 L 中的根, 那么 F 等于 x 在 $K[T]$ 中的极小多项式. $\square$

定义 A.5.2. 设 K 为域, L 为 K 的代数扩张. 如果 L/K 满足命题 A.5.1 中的任一条件, 则说 L/K 为**正规扩张**. 如果 L/K 既是可分扩张又是正规扩张, 就说 L/K 是 Galois **扩张**, 并将 $\mathrm{Aut}_{K\text{-alg}}(L)$ 称为 Galois 扩张 L/K 的 Galois **群**, 记作 $\mathrm{Gal}(L/K)$.

参考文献

[1] A. Abbes, T. Bouche, Théorème de Hilbert-Samuel “arithmétique”, *Annales de l’Institut Fourier*, **45** (1995), no. 2, 375–401.

[2] L. M. Adleman, D. R. Heath-Brown, The first case of Fermat’s last theorem. *Inventiones Mathematicae*, **79** (1985), no. 2, 409–416.

[3] Y. André, Slope filtration, *Confluentes Mathematici*, **1** (2009), no. 1, 1–85.

[4] S. Arakelov, An intersection theory for divisors on an arithmetic surface, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, **38** (1974), 1179–1192.

[5] S. Arakelov, Theory of intersections on the arithmetic surface, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B.C., 1974)*, vol. 1, pp.405–408, 1975.

[6] I. Bachmakova, Diophante et Fermat, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, **19** (1966), no. 4, 289–306.

[7] I. Bachmakova, *Diophantus and Diophantine equations*, Translated from the 1972 Russian original by Abe Shenitzer and updated by Joseph Silverman, The Dolciani Mathematical Expositions, 20. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1997. xiv+90 pp.

[8] W. Banaszczyk, New bounds in some transference theorems in the geometry of numbers, Mathematische Annalen **296** (1993), no. 4, 625–635.

[9] F. Barthe, Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques. Série 6*, **12** (2003), no. 2, 127–178.

[10] V. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990, x+169 pp.

[11] D. Bernstein, The number of roots of a system of equations, *Akademija Nauk SSSR. Funkcional'nyi Analiz i ego Priloženija*, **9** (1975), no. 3, 1–4.

[12] D. Bernstein, A. Kušnirenko, A. Khovanskiĭ, Newton polyhedra (in Russian), *Akademiya Nauk SSSR i Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **31** (1976), no. 3(189), 201–202.

[13] S. Bobkov, M. Madiman, Reverse Brunn-Minkowski and reverse entropy power inequalities for convex measures, Journal of Functional Analysis, **262** (2012), no. 7, 3309–3339.

[14] É. Borel, Contribution à l'analyse arithmétique du continu, *Journal de mathématiques pures et appliquées, 5e série*, **9** (1903), 329–375.

[15] J.-B. Bost, Périodes et isogenies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz), Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95, *Astérisque*, **237** (1996), 115–161.

[16] J.-B. Bost, Germs of analytic varieties in algebraic varieties: canonical metrics and arithmetic algebraization theorems, *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, 371–418, Walter de Gruyter, Berlin, 2004.

[17] J.-B. Bost, *Theta invariants of Euclidean lattices and infinite-dimensional Hermitian vector bundles over arithmetic curves*, Progress in Mathematics, vol. 334, Birkhaüser, Cham, 2020.

[18] J.-B. Bost, Réseaux euclidiens, série thêta et pentes (d'après W. Banasczyk, O. Regev, D. Dadush, S. Stephens-Davidowitz, ...), Séminaire Bourbaki, Exposé 1151, octobre 2018, Astérisque, **422** (2020), 1-59.

[19] J.-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé, Heights of projective varieties and positive Green forms, Journal of the American Mathematical Society, **7** (1994), no. 4, 903–1027.

[20] S. Boucksom, Corps d'Okounkov (d'après Okounkov, Lazarsfeld-Mustaţă et Kaveh-Khovanskii), Astérisque, **361** (2014), Exposé 1059, vii, 1–41.

[21] S. Boucksom and H. Chen, Okounkov bodies of filtered linear series, *Compositio Mathematica*, **147** (2011), no. 4, 1205–1229.

[22] N. Bourbaki, Univers, in M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier ed., *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1963–1964, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4)*, vol. 1, Lecture Notes in Mathematics 269, Springer-Verlag, 1972, 185–217.

[23] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Algèbre commutative, Chapitres 8 à 9, Masson, Paris, 1983, 200 pp.

[24] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Algèbre commutative, Chapitres 5 à 7, Masson, Paris, 1985, 362 pp.

[25] N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Masson, Paris, 1984, 351 pp.

[26] Y. Brenier, Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, **305** (1987), no. 19, 805–808.

[27] Y. Brenier, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **44** (1991), no. 4, 375–417.

[28] A. Brill, M. Noether, Ueber algebraische Funktionen, *Mathematische Annalen*, **7** (1874), no. 2-3, 269–310.

[29] G. Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **77** (1874), 258–262.

[30] H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **78** (1950), 29–64.

[31] H. Cartan, J.-P. Serre, Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, **237** (1953), 128–130.

[32] H. Chen, Harder-Narasimhan categories, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **214** (2010), no. 2, 187–200.

[33] H. Chen, Majorations explicites des fonctions de Hilbert-Samuel géométrique et arithmétique, *Mathematische Zeitschrift*, **279** (2015), no. 1-2, 99–137.

[34] H. Chen, Inégalité d'indice de Hodge en géométrie et arithmétique: une approache probabiliste, *Journal de l'École polytechnique. Mathématiques*, **3** (2016), 231–262.

[35] H. Chen, Newton-Okounkov bodies: an approach of function field arithmetic, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, **30** (2018), no. 3, 829–845.

[36] H. Chen, On isoperimetric inequality in Arakelov geometry, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **146** (2018), no. 4, 649–673.

[37] H. Chen, H. Ikoma, On subfiniteness of graded linear series, *European Journal of Mathematics*, **6** (2020), no. 2, 367–399.

[38] H. Chen, A. Moriwaki, *Arakelov geometry over adelic curves*, Lecture Notes in Mathematics 2258, Springer Nature Singapore, 2020, xviii+450pp.

[39] H. Chen, A. Moriwaki, *Arithmetic intersection theory over adelic curves*, `arXiv:2103.15646`.

[40] C. Cornut, On Harder-Narasimhan filtrations and their compatibility with tensor products, *Confluentes Mathematici*, **10** (2018), no. 2, 3–49.

[41] R. Dedekind, H. Weber, Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **92** (1882), 181-290.

[42] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, Bände I-III, Braunschweig, 1932.

[43] P. Deligne, La conjecture de Weil I., *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, **43** (1974), 273–307.

[44] P. Deligne, La conjecture de Weil II., *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, **52** (1980), 137–252.

[45] P. Demazure, Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, **3** (1970), 507–588.

[46] D. Eisenbud, *Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, 1995, xvi+785 pp.

[47] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Inventiones Mathematicae*, **73** (1983), no. 3, 349–366.

[48] G. Faltings, Calculus on arithmetic surfaces, *Annals of Mathematics. Second Series*, **119** (1984), no. 2, 387–424.

[49] G. Faltings, Diophantine approximation on abelian varieties, *Annals of Mathematics. Second Series*, **133** (1991), no.3, 549–576.

[50] Y. Fang, Non-Archimedean metric extension for semipositive line bundles, `arXiv:1904.03696`.

[51] L. Fargues, La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **645** (2010), 1–39.

[52] P. de Fermat, Second défi de Fermat aux mathématiciens, in *Œuvre de Fermat*, ed. P. Tannery et C. Henry, Tome II, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1894, 334-335.

[53] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables, avec une appendice par P. Colmez, in *Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988)*, *Astérisque*, **223** (1994), 113–184.

[54] É. Fouvry. Théorème de Brun-Titchmarsh: application au théorème de Fermat, *Inventiones Mathematicae*, **79** (1985), no.2, 383–407.

[55] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. xii+157 pp.

[56] R. Gardner, The Brunn-Minkowski inequality, *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, **39** (2002), no. 3, 355–405.

[57] É. Gaudron, Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, **119** (2008), 21–95.

[58] H. Gillet, C. Soulé, Arithmetic intersection theory, *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, **72** (1990), 93–174.

[59] H. Gillet, C. Soulé, On the number of lattice points in convex symmetric bodies and their duals, *Israel Journal of Mathematics* **74** (1991), 2-3, 347–357 (Erratum: *Israel Journal of Mathematics* **171** (2009), 443–444).

[60] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, *Annals of Mathematics. Second Series*, **68** (1958), 460–472.

[61] D. Grayson, Reduction theory using semistability, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **59** (1984), no.4, 600–634.

[62] A. Grothendieck, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, *American Journal of Mathematics*, **79** (1957), 121–138.

[63] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique, rédigé avec la collaboration de J. Dieudonné, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32**, 1960–1967.

[64] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles, réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien.* `jmrlivres.files.wordpress.com/2009/11/recoltes-et-semailles.pdf`.

[65] J. Guenot, R. Narasimhan, Introduction à la théorie des surfaces de Riemann, *L'Enseignement Mathématique, 2e Série*, **21** (1975), no. 2-4, 123–328.

[66] H. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1874.

[67] G. Harder, M. S. Narasimhan, On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves, *Mathematische Annalen*, **212** (1974/75), 215–248.

[68] D. Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathématiques, in *Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiques*, 58–114, Gauthier-Villars, Paris, 1902, 455 pp.

[69] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, *Acta Mathematica*, **113** (1965), 89–152.

[70] P. Hriljac, Heights and Arakelov's intersection theory, *American Journal of Mathematics*, **107** (1985), no. 1, 23–38.

[71] 华罗庚. 谈谈与蜂房结构有关的数学问题. 人民教育出版社, 北京, 1964.

[72] J. Jost, *Compact Riemann surfaces*, Universitext, An introduction to contemporary mathematics, Translated from the German manuscript by R. R. Simha, Springer-Verlag, Berlin, 1997, xiv+291.

[73] N. Katz, Slope filtration of F-crystals, in *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. I*, *Astérisque*, **63** (1979), 113–163.

[74] K. Kaveh, A. G. Khovanskiĭ, Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, *Annals of Mathematics. Second Series*, **176** (2012), no. 2, 925–978.

[75] K. Kedlaya, Slope filtrations for relative Frobenius, in *Représentations p-adiques de groupes p-adiques. I. Représentations galoisiennes et* (ϕ, Γ)*-modules*, *Astérisque*, **319** (2008), 259–301.

[76] A. Khovanskiĭ, Geometry of convex polytopes and algebraic geometry (in Russian), in Geometric Joint sessions of the Petrovskii Seminar on differential equations and mathematical problems of physics and of the Moscow Mathematical Society (second meeting, 18−20 January 1979), *Uspekhi Mat. Nauk*, **34** (1979), no.4(208), 160−161.

[77] A. Khovanskiĭ, The Newton polytope, the Hilbert polynomial and sums of finite sets, *Funktsional′nyĭ Analiz i ego Prilozheniya*, **26** (1992), no. 4, 57–63, 96.

[78] H. Knothe, Contributions to the theory of convex bodies, *Michigan Mathematical Journal*, **4** (1957), 39–52.

[79] A. Kouchnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, *Inventiones Mathematicae*, **32** (1976), no. 1, 1–31.

[80] L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraische Grössen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **92** (1882), 1–122.

[81] F.-V. Kuhlmann, Valuation theoretic and model theoretic aspects of local uniformization, in *Resolution of singularities (Obergurgl, 1997)*, 381–456, Progress in Mathematics **181**, Birkhäuser, Basel, 2000.

[82] L. Lafforgue, Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson, *Astérisque*, **243** (1997), ii+329 pp.

[83] G. Landsberg, Algebraische Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz, *Mathematische Annalen*, **50** (1898), no. 2-3, 333–380.

[84] S. Lang, *Diophantine geometry*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 11, Interscience Publishers, New York-London, 1962, x+170 pp.

[85] R. Lazarsfeld, M. Mustaţă, Convex bodies associated to linear series, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, **42** (2009), no. 5, 783–835.

[86] T. Leinster, *Basic category theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 143, Cambridge University Press, Cambridge, 2014, viii+183 pp.

[87] J. Leray, L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série*, **29** (1950), 1–139.

[88] Y. Li, Categorification of Harder-Narasimhan theory via slope functions valued in totally ordered sets, `arxiv:2107.07743`.

[89] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998, xii+314 pp.

[90] V. Maillot, Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, *Mémoires de la Société Mathématique de France. Nouvelle Série*, **80** (2000), vi+129 pp.

[91] L. Manivel, Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d'un fibré hermitien, *Mathematische Zeitschrift*, **212** (1993), no. 1, 107–122.

[92] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. xiv+320 pp.

[93] R. Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995. xxii+390.

[94] L. Mordell, On the rational solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degrees, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **21** (1922), 179–192.

[95] A. Moriwaki, Arithmetic height functions over finitely generated fields, *Inventiones Mathematicae*, **140** (2000), no. 1, 101–142.

[96] A. Moriwaki, Continuity of volumes on arithmetic varieties, *Journal of Algebraic Geometry*, **18** (2009), no. 3, 407–457.

[97] A. Moriwaki, Semiample invertible sheaves with semipositive continuous hermitian metrics, *Algebra & Number Theory*, **9** (2015), no. 2, 503–509.

[98] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 322, Springer-Verlag, 1999, xviii+571

[99] D. G. Northcott, An inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **45** (1949), 502–509.

[100] D. G. Northcott, A further inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **45** (1949), 510–518.

[101] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988. viii+212 pp.

[102] T. Ohsawa, K. Takegoshi, On the extension of L^2 holomorphic functions, *Mathematische Zeitschrift*, **195** (1987), no. 2, 197–204.

[103] A. Okounkov, Brunn-Minkowski inequality for multiplicities, *Inventiones Mathematicae*, **125** (1996), no. 3, 405–411.

[104] A. Ostrowski, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\psi(x) \cdot \psi(x) = \psi(xy)$, *Acta Mathematica* **41** (1916), no. 1, 271–284.

[105] P. Philippon, Critères pour l'indépendance algébrique, *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, **64** (1986), 5–52.

[106] P. Philippon, Sur des hauteurs alternatives. I, *Mathematische Annalen*, **289** (1991), no.2, 255–283.

[107] P. Philippon, Sur des hauteurs alternatives. II, *Annales de l'Institut Fourier*, **44** (1994), no.4, 1043–1065.

[108] P. Philippon, Sur des hauteurs alternatives. III, *Journal de Mathématiques pures et appliquées, neuvième série*, **74** (1995), no.4, 345–365.

[109] H. Poincaré, Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, *Journal de mathématiques pures et appliquées, 5e série*, **7** (1901), 161–234.

[110] H. Randriambololona, Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les faisceaux cohérents, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **590** (2006), 67–88.

[111] H. Randriambololona, Harder-Narasimhan theory for linear codes (with an appendix on Riemann-Roch theory), *Journal of Pure and Applied Algebra*, **223** (2019), no. 7, 2997–3030.

[112] R. Rashed ed., *Diophante : Les Arithmétiques, Tome III : Livre IV.*, “Collection des Universités de France”, Les Belles Lettres, Paris, 1984

[113] R. Rashed, C. Hozel, *Les Arithmétiques de Diophante, Lecture historique et mathématique*, Walter de Gruyter, 2013.

[114] P. Ribenboim, Equivalent forms of Hensel’s lemma, *Expositiones Mathematicae*, **3** (1985), no. 1, 3–24.

[115] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, *Annals of Mathematics. Second Series*, **61** (1955), 197–278.

[116] U. Stuhler, *Eine Bemerkung zur Reduktionstheorie quadratischer Formen*, Archiv der Mathematik, **27** (1976), no. 6, 604–610.

[117] P. Tanney ed., *Diophanti Alexandrini Opera Omnia*, vol. I, Lipsiae, 1893.

[118] P. Tanney ed., *Diophanti Alexandrini Opera Omnia*, vol. II, Lipsiae, 1895.

[119] J. Tate, Rigid analytic spaces, *Inventiones Mathematicae*, **12** (1971), 257–289.

[120] R. Taylor, A. Wiles, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Annals of Mathematics, Second Series*, **141** (1995), no. 3, 553–572.

[121] B. Teissier, Du théorème de l’index de Hodge aux inégalités isopérimétriques, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences. Séries A et B*, **288** (1979), no. 4, A287–A289.

[122] G. Tian, On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds, *Journal of Differential Geometry*, **32** (1990), no. 1, 99–130.

[123] F. Viète, Zetetica, in *Opera Mathematica*, ed. Francisci à Schooten (reproduced by Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1970), Elzevier, Leiden, 1646

[124] A. Weil, Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébrique (1939a), in *Œuvres Scientifiques, Collected Papers*, vol I, Spring-Verlag, New York, 1979, 236–240.

[125] A. Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **55** (1949), 497–508.

[126] A. Weil, Number-theory and algebraic geometry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Cambridge, Mass., 1950, vol. 2, pp. 90−100. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1952.

[127] A. Weil, Arithmetic on algebraic varieties, *Annals of Mathematics. Second Series*, **53** (1951), 412–444.

[128] A. Weil, Sur les origines de la géométrie algébrique, *Compositio Mathematica*, **44** (1981), no.1-3, 395-406.

[129] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Annals of Mathematics, Second Series*, **141** (1995), no. 3, 443–551.

[130] X. Yuan, On volumes of arithmetic line bundles, *Compositio Mathematica*, **145** (2009), no. 6, 1447–1464.

[131] S. Zhang, Small points and adelic metrics, *Journal of Algebraic Geometry*, **4** (1995), no. 2, 281–300.

[132] S. Zhang, Positive line bundles on arithmetic varieties, *Journal of the American Mathematical Society*, **8** (1995), no. 1, 187–221.