HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée par

CHEN Huayi

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Géométrie d'Arakelov :

théorèmes de limite et comptage des points rationnels

Mémoire présenté le 8 décembre 2011 devant la commission d'examen :

Jean-Benoît	BOST	Université Paris Sud
Antoine	CHAMBERT-LOIR	Université de Rennes I
Carlo	GASBARRI	Université de Strasbourg
Marc	HINDRY	Université Paris Diderot
Damian	RÖSSLER	Université Paul Sabatier
Christophe	SOULÉ	I.H.É.S.

au vu des rapports de :

Marc	HINDRY	Université Paris Diderot
Atsushi	MORIWAKI	Kyoto University
Christophe	SOULÉ	I.H.É.S.

Résumé

Dans ce mémoire je présente l'ensemble des travaux de recherche que j'ai effectué pendant les années 2007–2010. Depuis ma thèse doctorale (soutenue le 1$^{\text{er}}$ décembre 2006), mes travaux de recherche portent sur deux thèmes en géométrie arithmétique : la géométrie arithmétique birationnelle et le comptage uniforme des points rationnels.

Concernant la géométrie arithmétique birationnelle, j'ai proposé le point de vue probabilistique en géométrie d'Arakelov et démontré des théorèmes de limite pour les fibrés inversibles hermitiens génériquement gros. Comme application, j'ai établi un analogue arithmétique du théorème d'approximation de Fujita et ainsi donné une réponse positive à une conjecture de Moriwaki. J'ai aussi proposé l'analogue arithmétique du produit d'intersection positive et montré que la fonction volume arithmétique est différentiable. Dans un travail en commun avec Boucksom, nous avons combiné le point de vue probabilistique avec la théorie des corps d'Okounkov et interprété la mesure de probabilité limite d'un fibré inversible hermitien comme l'image directe de la mesure de Lebesgue sur un corps convexe par une application continue. Cela nous permet de généraliser le théorème d'approximation de Fujita arithmétique au cas des systèmes linéaires gradués.

Le comtage des points rationnels est un problème classique en géométrie diophantienne. Je m'intéresse à des majorations du nombre des points rationnels de hauteur bornée qui sont valables pour toute sous-variété arithmétique de degré et dimension fixés d'un espace projectif. Plusieurs outils géométriques sont développés ou adaptés dans le cadre de la géométrie d'Arakelov, notamment une égalité de pente qui relie la hauteur d'une variété aux celles de ses points rationnels, une estimation de la complexité du lieu de singularité d'une variété arithmétique projective et une variante arakelovienne de la méthode de déterminant. Comme application, j'ai démontré une conjecture de Heath-Brown qui prédit que le nombre des points rationnels de hauteur $\leqslant \delta$ d'une courbe plane de degré δ est au plus $O_\varepsilon(\delta^{2+\varepsilon})$, où $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

THÉORÈMES DE LIMITE EN GÉOMÉTRIE D'ARAKELOV

1.1. Introduction

La géométrie d'Arakelov est un domaine où on combine la géométrie algébrique et la géométrie analytique (complexe, et plus récemment celle de Berkovich) à étudier les schémas définis sur un corps de nombres. Cette théorie est basée sur la comparaison entre les corps de fonctions et les corps de nombres. Dans l'étude des schémas définis sur un corps de fonctions, un outil important est les *modèles*. Rappelons qu'un *corps de fonctions* est par définition une extension finie du corps des fractions de l'anneau des polynômes d'un indéterminé et à coefficients dans un corps de base k. Tout corps de fonctions s'écrit comme le corps des fonctions méromorphes définies sur une courbe projective et régulière C sur $\operatorname{Spec} k$. Étant donné un schéma projectif X défini sur le corps de fonctions $k(C)$, il existe toujours un schéma projectif et plat $\mathscr{X}$ sur C tel que $\mathscr{X} \otimes_C \operatorname{Spec} k(C)$ s'identifie à X. Un tel C-schéma $\mathscr{X}$ s'appelle un *modèle* de X. Les propriétés arithmétiques de X sont encodées dans l'information de la géométrie algébrique relative d'un modèle (ou de divers modèles possibles) de X. Le cas des corps de nombres (c'est-à-dire les extensions finies de $\mathbb{Q}$) est très similaire. Un corps de nombres K s'identifie aussi au corps des fonctions méromorphes sur un schéma régulier de dimension 1 — le schéma affine dont l'anneau $\mathcal{O}_K$ est la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K; tout schéma projectif X sur $\operatorname{Spec} K$ admet un modèle sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Cependent, il s'avère que la géométrie algébrique des modèles sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ ne contient pas suffisamment d'information arithmétique de X. En effet, contrairement au cas des corps de fonctions (où la courbe C est propre), le schéma affine $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ n'admet aucune compactification dans la catégorie des schémas. L'idée originale d'Arakelov est d'attacher les métriques hermitiennes aux fibrés vectoriels sur X pour « compactifier » un modèle de X. Dans le cas très particulier où X est le schéma $\operatorname{Spec} \mathbb{Q}$, ce procédé consiste à attacher des métriques euclidiennes aux $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini, c'est-à-dire à considérer les *réseaux euclidiens*.

Si on compare le cas des corps de nombres à celui des corps de fonctions, on observe souvent une perte de structure algébrique. Par exemple, dans la géométrie algébrique d'un schéma projectif sur une courbe régulière, l'espace des sections globales d'un fibré inversible est un groupe abélien pour la loi d'addition. Étant donné un schéma projectif et plat $\mathscr{X}$ défini sur un anneau d'entiers algébriques $\mathcal{O}_K$ et un fibré inversible $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{X}$ muni d'une métrique hermitienne $\|\cdot\|$, l'analogue arithmétique d'une « section globale » est un élément s de $H^0(\mathscr{X},\mathscr{L})$ tel que

$$\|s\|_{\sup} := \sup_{x\in\mathscr{X}(\mathbb{C})} \|s(x)\|$$

soit inférieur ou égal à 1. Or en général l'espace $\widehat{H}^0(\mathscr{X},\overline{\mathscr{L}})$ des « sections globales arithmétiques » n'est pas stable par l'addition. Cela conduit à des difficultés supplémentaires lorsque l'on adapte des outils géométriques dans le cadre arithmétique. Un exemple typique est la convergence de la suite qui définit la fonction *volume* arithmétique. Rappelons que le volume arithmétique d'un fibré inversible hermitien(1) $\overline{\mathscr{L}}$ est défini comme

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}}) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\dim}_K\big(\widehat{H}^0(\mathscr{X},\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})\big)}{n^{d+1}/(d+1)!}, \tag{1.1}$$

où d est la dimension relative de $\mathscr{X}\to\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, et pour tout ensemble fini A, le nombre $\widehat{\dim}_K(A)$ est défini comme le logarithme du cardinal de A divisé par $[K:\mathbb{Q}]$. Une ancienne conjecture(2) de Moriwaki [**33**, Remark 5.7] prédit que la suite dans la formule (1.1) qui définit la fonction $\widehat{\mathrm{vol}}$ converge. C'est un avatar arithmétique d'un résultat classique en géométrie algébrique, qui découle par exemple du théorème d'approximation de Fujita. Lorsque le fibré inversible hermitien en question est arithmétiquement ample, cette convergence est une conséquence des résultats profonds en géométrie d'Arakelov comme le théorème de Riemann-Roch arithmétique à la Gillet-Soulé [**26**] (ou alternativement le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique dû à Abbes-Bouche [**1**]) et un travail de Zhang [**52**] qui affirme que $H^0(\mathscr{X},\mathscr{L}^{\otimes n})$ est engendré par les sections effectives lorsque n est suffisamment grand.

Dans [**17**], la convergence des polygones normalisés de Harder-Narasimhan associés aux $H^0(\mathscr{X},\mathscr{L}^{\otimes n})$ (munis des normes convenables) a été démontrée. Ce résultat permet d'établir la convengence de la suite qui définit la fonction $\widehat{\mathrm{vol}}$ dans le cas où l'algèbre graduée

$$R(\mathscr{L}_K) := \bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K^{\otimes n})$$

(1) c'est-à-dire un fibré inversible $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{X}$ muni d'une métrique continue sur $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ (considéré comme un fibré inversible sur l'espace analytique $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}}$.).

(2) Moriwaki a en fait conjecturé un analogue du théorème d'approximation de Fujita en géométrie d'Arakelov, qui est plus général que la convergence de la suite qui définit la fonction volume arithmétique.

est de type fini. Bien que ce résultat repose sur des techniques combinatoires sophistiquées (notamment la construction des mesures de probabilité adéquates sur les espaces de monômes), il propose une nouvelle approche uniforme (pour les corps de nombres et les corps de fonctions) dans l'étude des problème de limite en géométrique d'Arakelov qui évite des outils d'analyse complexe et donc permet d'avoir une grande souplesse pour le choix de métriques sur $\overline{\mathscr{L}}$.

En utilisant le théorème d'approximation de Fujita géométrique, la convergence de la suite qui définit la fonction $\widehat{\mathrm{vol}}$ est démontrée dans [**18**] (texte non-publié). Puis ce résultat a été généralisé dans [**Ch4**] où le théorème d'approximation de Fujita arithmétique est démontré(3), basé sur un théorème de limite pour les mesures de probabilité associées aux espaces des sections $H^0(\mathscr{X},\mathscr{L}^{\otimes n})$ munis des normes sup. L'avancement majeur par rapport au travail précédent est que l'on utilise la filtration par les minima successifs qui induit une famille continue de systèmes linéaires gradués de $\mathscr{L}_K$. Cela permet non seulement d'éviter la technique combinatoire dans la démonstration du théorème de limite, mais encore de ramener l'étude d'un problème arithmétique à celle des problèmes purement géométriques (sur $\operatorname{Spec} K$). Comme application, on démontre que la fonction volume arithmétique est différentiable (cf. [**Ch5**]).

En combinant cette idée avec les progrès récents en géométrie algébrique, notamment ceux sur les corps d'Okounkov, une version renforcée du théorème d'approximation pour les systèmes linéaires arithmétiques a été démontrée dans [**BC**]. Ce résultat pourrait être considéré comme un analogue en géométrie d'Arakelov du théorème d'approximation dû à Lazarsfeld et Mustaţă [**30**]. En outre, la comparaison des minima successifs aux pentes successives des fibrés vectoriels hermitiens montre que cette approche permet de retouver certains résultats de [**Ch3**] par une manière simple et transparente.

Ce chapitre est consacré à présenter les résultats mentionés plus haut. Pour la raison de lucidité, les matériaux sont organisés dans l'ordre scientifique plutôt que historique.

1.2. Filtrations sur un fibré vectoriel hermitien

Dans tout le chapitre, $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$ signifie la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. On appelle *corps de nombres* toute extension finie de $\mathbb{Q}$ contenue dans $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$. Si K est un corps de nombres, on désigne par $\Sigma_{K,f}$ (resp. $\Sigma_{K,\infty}$) l'ensemble des places finie (resp. infinie) de K et on note $\Sigma_K := \Sigma_{K,f} \sqcup \Sigma_{K,\infty}$.

A tout élément $v \in \Sigma_K$ on associe une valeur absolue $|\cdot|_v$ de K qui prolonge soit la valeur absolue usuelle de $\mathbb{Q}$ soit une valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ (où p est un nombre premier), normalisée de sorte que $|a|_p := p^{-v_p(a)}$ pour tout $a \in \mathbb{Q}^{\times}$. On désigne par

(3) Ce résultat a été indépendemment obtenu par Yuan Xinyi [**50**] par une approche différente.

K_v le complété de K par rapport à $|\cdot|_v$ et par $\mathbb{C}_v$ le complété d'une clôture algébrique de K_v. La valeur absolue $|\cdot|_v$ s'étend de façon unique sur $\mathbb{C}_v$.

1.2.1. Fibrés vectoriels hermitiens. — La notion de *fibré vectoriel hermitien* est un élément important de la géométrie d'Arakelov. C'est une généralisation naturelle de la notion de *réseau euclidien* en géométrie des nombres. Dans l'esprit de la comparaison entre les corps de nombres et les corps de fonctions, les fibrés vectoriels hermitiens sont analogues aux fibrés vectoriels sur une courbe projective régulière. En particulier, il existe aussi une « théorie de pentes » pour la catégorie des fibrés vectoriels hermitiens. Initiée par Stuler [**46**] et Grayson [**27**], cette théorie est systématiquement développée par Bost [**6**, Appendice] puis généralisée par Gaudron [**23**] dans un cadre plus général des « fibrés adéliques ».

Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K. Un *fibré vectoriel hermitien* sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ est par définition un $\mathcal{O}_K$-module projectif et de type fini $\mathcal{E}$ muni d'une famille de normes hermitiennes $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_{K,\infty}}$, où $\|\cdot\|_\sigma$ est une norme hermitienne sur $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathbb{C}_\sigma$, invariante par la conjugaison complexe si σ est une place réelle. La donnée $(\mathcal{E},(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_{K,\infty}})$ est souvent notée en abrégé comme $\overline{\mathcal{E}}$. Le *rang* d'un fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{E}}$ est défini comme le rang de $\mathcal{E}$. Un fibré vectoriel hermitien de rang 1 s'appelle aussi un *fibré inversible hermitien.*

Les constructions algébriques des fibrés vectoriels hermitiens comme *sous-fibré, fibré quotient, somme directe, produit tensoriel, puissance extérieure* etc. sont définies comme les mêmes constructions pour les $\mathcal{O}_K$-modules sous-jacents munies des normes hermitiennes naturelles.

Dans la pratique, il est parfois plus commode d'adopter le point de vue adélique qui consisite à interpréter la structure de $\mathcal{O}_K$-module comme une famille de normes ultramétriques indexées par $\Sigma_{K,f}$. En effet, étant donné un $\mathcal{O}_K$-module projectif et de type fini, on peut attacher à chaque espace vectoriel $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_K}K_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}\in\Sigma_{K,f}$) la norme ultramétrique $\|\cdot\|_{\mathcal{E},\mathfrak{p}}$ telle que

$$\|s\|_{\mathcal{E},\mathfrak{p}}:=\inf\{|a|_\mathfrak{p}\,:\,a\in K_\mathfrak{p},\ a^{-1}s\in\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}\},$$

où $\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}$ est l'anneau de valuation de $K_\mathfrak{p}$. Il s'avère que cette norme prend valeurs dans l'image de $|\cdot|_\mathfrak{p}$. Une telle norme est dite *pure* (cf. [**24**, Définition 2.2]). Réciproquement, étant donné un espace vectoriel E de rang fini sur K, muni d'une famille de normes $(\|\cdot\|_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\Sigma_{K,f}}$, l'ensemble $\mathcal{E}:=\{s\in E\,|\,\forall\,\mathfrak{p}\in\Sigma_{K,f},\ \|s\|_\mathfrak{p}\leqslant 1\}$ est un $\mathcal{O}_K$-module sans torsion. Il est de type fini notamment lorsque le K-espace vectoriel E est *génériquement trivial* par rapport à la famille $(\|\cdot\|_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\Sigma_{K,f}}$, autrement dit, il existe une base $\mathbf{e}=(e_1,\ldots,e_r)$ et un sous-ensemble fini $S_\mathbf{e}$ de $\Sigma_{K,f}$ tels que $\mathbf{e}$ soit une base orthonormée[4] pour toute place $\mathfrak{p}$ dans $\Sigma_{K,f}\setminus S_\mathbf{e}$[5]. Dans ce cas-là le

(4)i.e., pour tout $(a_1,\ldots,a_r)\in K_\mathfrak{p}^r$, on a $\|a_1e_1+\cdots+a_re_r\|_\mathfrak{p}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}|a_i|_\mathfrak{p}$.

(5)On peut montrer que toute base de E est alors orthonormée pour presque toute place $\mathfrak{p}\in\Sigma_{K,f}$.

$\mathcal{O}_K$-module $\mathcal{E}$ est alors projectif et de type fini. Il s'avère que, pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de K, les boules unité de $(E \otimes_K K_{\mathfrak{p}}, \|\cdot\|_{\mathcal{E},\mathfrak{p}})$ et de $(E \otimes_K K_{\mathfrak{p}}, \|\cdot\|_{\mathfrak{p}})$ coïncident. La norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E},\mathfrak{p}}$ est donc la plus petite norme pure minorée par $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$, appelée la *purifiée* de $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$.

On appelle *espace vectoriel adéliquement normé* sur K tout espace vectoriel E de rang fini sur K muni d'une famille $(\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma_K}$, où $\|\cdot\|_v$ est une norme sur $E\otimes_K K_v$, ultramétique si v est une place finie. Contrairement à [**BC**, Définition 2.1], ici on n'impose aucune condition supplémentaire sur les normes $\|\cdot\|_v$. La donnée $(E,(\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ est notée en abrégé comme $\overline{E}$. On dit que $\overline{E}$ est

(1) *génériquement trivial* si E est génériquement trivial par rapport à $(\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in\Sigma_{K,f}}$;
(2) *pur* si toutes les normes $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ $(\mathfrak{p}\in\Sigma_{K,f})$ sont pures;
(3) *hermitien* si toutes les normes $\|\cdot\|_\sigma$ $(\sigma\in\Sigma_{K,\infty})$ sont euclidiennes (si σ est réelle) ou hermitiennes (si σ est complexe).

Tout fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{E}}$ définit naturellement un espace vectoriel adéliquement normé sur K dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\mathcal{E}_K$ (en considérant les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{E},\mathfrak{p}}$). Il s'avère que les espaces vectoriels adéliquement normés obtenus de cette façon sont précisément ceux qui sont génériquement triviaux, purs et hermitiens.

Parmi les constructions algébriques des fibrés vectoriels hermitiens, celles de sous-espace et d'espace quotient se généralisent sans difficulté au cas des espaces vectoriels adéliquement normés, tandis que différentes généralisations « naturelles » sont possibles pour les autre constructions comme somme directe, produit tensoriel, puissance extérieure dans le cas non-hermitien. On renvoie les lecteurs dans [**24**] pour une discussion détaillée.

Certain auteurs (comme par exemple [**42**] et [**23**]) considèrent une famille de normes $(\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma_K}$ sur les espaces vectoriels $E\otimes_K\mathbb{C}_v$. Ce point de vue est important lorsque l'on considère une extension de corps dans le cas d'un espace vectoriel adéliquement normé qui n'est pas pur. En effet, étant donné un espace vectoriel adéliquement normé $\overline{E}$ sur K, si $\mathfrak{p}$ est une place finie de K telle que la norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ soit pure, alors pour tout corps de nombres K' contenant K et toute place finie $\mathfrak{P}$ de K' telle que $\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}$, on peut associer naturellement à $E_{K'}\otimes_{K'}K'_{\mathfrak{P}}\cong E\otimes_K K'_{\mathfrak{P}}$ la norme pure dont la boule unité fermée est $\mathcal{E}_{\mathfrak{P}}\otimes_{\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}}\mathcal{O}_{K'_{\mathfrak{P}}}$, où $\mathcal{E}_{\mathfrak{P}}$, $\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}$ et $\mathcal{O}_{K'_{\mathfrak{P}}}$ sont respectivement la boule unité fermée de $(E\otimes_K K_{\mathfrak{p}},\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})$, l'anneau de valuation de $K_{\mathfrak{p}}$ et celui de $K'_{\mathfrak{P}}$. Cependent, lorsque la norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ n'est pas pure, vraisemblablement il n'existe pas en général un choix canonique de normes sur $E\otimes_K K'_{\mathfrak{P}}$ qui prolonge $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$(6). Toutefois, la définition de certains invariants arithmétiques (comme par exemple les

(6) Des phénomènes similaires existent pour les places infinies. Si V est un espace vectoriel de rang fini sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$, alors il n'existe qu'une norme hermitienne sur $V_{\mathbb{C}}$ qui prolonge $\|\cdot\|$; tandis qu'une norme générale sur V peut avoir plusieurs extension sur $V_{\mathbb{C}}$ lorsque le rang de V est $\geqslant 2$.

minima successifs) ne dépend que de la restriction de ces normes aux K_v-espaces vectoriels $E \otimes_K K_v$ ($v \in \Sigma_K$).

Soit E un espace vectoriel de rang fini sur K. La donnée d'une famille $(\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma_K}$ de normes sur $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ munit tout K'-espace vectoriel $E \otimes_K K'$ d'une structure d'espace vectoriel adéliquement normé, où K' parcourt tous les corps de nombres contenant K. Dans la suite, lorsque l'on discute un espace vectoriel adéliquement normé obtenu à partir d'un espace vectoriel adéliquement normé $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ sur K par extension du corps de base à K', on présuppose donnée une famille de normes $(\|\cdot\|_w)_{w\in\Sigma_{K'}}$ (compatibles aux normes $(\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma_K}$) sur les espaces vectoriels $E \otimes_K K'_w$ et on convient que, si w et v sont respectivement des places de K' et de K telles que $w \mid v$, et si la norme $\|\cdot\|_v$ est pure dans le cas où v est finie (resp. euclidienne dans le cas où v est réelle), alors $\|\cdot\|_w$ est également pure (resp. euclidienne ou hermitienne suivant que la place w est réelle ou complexe).

1.2.2. Pentes. — Soit $\overline{L}$ un espace vectoriel adéliquement normé sur K qui est génériquement trivial et de rang 1, on définit le *degré d'Arakelov* de $\overline{L}$ comme

$$\widehat{\deg}(\overline{L}) = -\sum_{v\in\Sigma_K}[K_v : \mathbb{Q}_v]\log\|s\|_v.$$

où s est un élément non-nul de L. Cette définition ne dépend pas du choix de s car la *formule du produit* montre que

$$\forall\, a \in K^{\times}, \quad \prod_{v\in\Sigma_K}|a|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]} = 1.$$

Lorsque l'espace vectoriel adéliquement normé $\overline{L}$ provient d'un fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on retrouve la définition classique du degré d'Arakelov (cf. [**6**, A.2]) grâce à l'égalité

$$\#(\mathcal{L}/\mathcal{O}_K s) = \prod_{\mathfrak{p}\in\Sigma_{K,f}}\|s\|_{\mathcal{L},\mathfrak{p}}^{-[K_{\mathfrak{p}}:\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}]}$$

qui est valable pour tout élément non-nul $s \in \mathcal{L}$. Plus généralement, si $\overline{E}$ est un espace vectoriel adéliquement normé de rang r sur K qui est génériquement trivial et hermitien, alors le *dégré d'Arakleov* de $\overline{E}$ est défini comme

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) := \widehat{\deg}(\Lambda^r\overline{E}) = -\sum_{v\in\Sigma_K}[K_v : \mathbb{Q}_v]\log\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_v,$$

où $(s_1,\ldots,s_r)$ est une base de E sur K. Il est souvent commode d'utiliser la version normalisée de cet invariant : on note

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E}) := \frac{\widehat{\deg}(\overline{E})}{[K:\mathbb{Q}]}.$$

La fonction $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}$ est stable par extension du corps : pour tout corps de nombres K' contenant K, on a $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E}\otimes_K K') = \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E})$.

La fonction $\widehat{\deg}$ est additive par rapport aux suites exactes courtes. Soient $\overline{E}'$, $\overline{E}$ et $\overline{E}''$ trois espaces vectoriels adéliquement normés sur K. Soient $f : E' \to E$ et $g : E \to E''$ deux applications K-linéaires. On dit que la suite

$$0 \longrightarrow \overline{E}' \xrightarrow{f} \overline{E} \xrightarrow{g} \overline{E}'' \longrightarrow 0$$

est *exacte* si la suite des applications K-linéaires sous-jacentes

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$$

est exacte et si les normes de $\overline{E}'$ (resp. de $\overline{E}''$) sont des normes induites (resp. quotients). Si $\overline{E}$ est génériquement trivial et hermitien, alors il en est de même des $\overline{E}'$ et $\overline{E}''$. De plus, on a[(7)]

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) = \widehat{\deg}(\overline{E}') + \widehat{\deg}(\overline{E}''). \tag{1.2}$$

Si E est non-nul, la *pente* de $\overline{E}$ est définie comme

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) := \frac{\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E})}{\mathrm{rg}(E)} = \frac{\widehat{\deg}(\overline{E})}{[K:\mathbb{Q}]\,\mathrm{rg}(E)}.$$

On dit que $\overline{E}$ est *semi-stable* si, pour tout sous-espace vectoriel non-nul F de E, on a $\widehat{\mu}(\overline{F}) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E})$.

Le formalisme de Harder-Narasimhan pour les fibrés vectoriels sur une courbe projective est encore valable dans le cadre arithmétique. C'est un résultat essentiellement dû à Stuhler [**46**, Satz 1] (voir aussi Grayson [**27**, Theorem 1.18]). Étant donné un espace vectoriel adéliquement normé $\overline{E}$ sur K qui est génériquement trivial, hermitien et non-nul, il existe un unique sous-espace vectoriel *déstabilisant* E_{des} de E tel que

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_{\mathrm{des}}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) := \sup_{0\neq F\subset E} \widehat{\mu}(\overline{E})$$

et qui contient tout sous-espace vectoriel non-nul F de E vérifiant $\widehat{\mu}(\overline{F}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. Le nombre $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ est appelé la *pente maximale* de $\overline{E}$. Il existe alors un unique drapeau de sous-espaces vectoriels de E :

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n = E$$

tel que chaque sous-quotient $\overline{E}_i/\overline{E}_{i-1}$ soit semi-stable et que les pentes des sous-quotients soient strictement décroissantes :

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_1/\overline{E}_0) > \ldots > \widehat{\mu}(\overline{E}_n/\overline{E}_{n-1}).$$

On a en fait $E_i/E_{i-1} = (E/E_{i-1})_{\mathrm{des}}$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. Ce drapeau est appelé le *drapeau de Harder-Narasimhan* de $\overline{E}$. Le nombre réel $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$ est appelé la *pente*

---

(7) Bien que la fonction $\widehat{\deg}$ a été définie dans [**23**] pour les fibrés adéliques non-nécessairement hermitiens, mais la relation d'additivité (1.2) n'est pas vraie en général dans ce cadre.

minimale de $\overline{E}$. C'est aussi la valeur minimale des pentes des quotients non-nuls de $\overline{E}$. On a alors le principe de dualité[(8)] suivant

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}^{\vee}) = 0. \tag{1.3}$$

Rappelons le *polygone de Harder-Narasimhan* de $\overline{E}$ est défini comme la fonction concave et affine par morceau $P_{\overline{E}}$ dont les sommets sont des points $(\mathrm{rg}(E_i), \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(E_i))$, $i \in \{0, \ldots, n\}$. C'est aussi la fonction dont le graphe coïncide avec le bord supérieur de l'enveloppe convexe des points $(\mathrm{rg}(F), \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(F))$, où F parcourt tous les sous-espaces vectoriels de E. La pente de $P_{\overline{E}}$ sur l'intervalle $[i-1, i]$ ($i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}(E)\}$) est appelée la $i^{\text{ème}}$ *pente* de $\overline{E}$, notée comme $\widehat{\mu}_i(\overline{E})$. On a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}_1(\overline{E}) \geqslant \ldots \geqslant \widehat{\mu}_{\mathrm{rg}(E)}(\overline{E}) = \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}).$$

Par un argument de décente galoisienne, on déduit de l'unicité du sous-espace vectoriel déstabilisant que le polygone de Harder-Narasimhan et les pentes successives sont des invariants absolus (cf. [**6**, Proposition A.2]) : si $\overline{E}$ est un espace vectoriel adéliquement normé de rang r sur K et si K' est un corps de nombres contenant K, alors on a

$$P_{\overline{E}} = P_{\overline{E} \otimes_K K'}, \quad \widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \widehat{\mu}_i(\overline{E} \otimes_K K'),\ i \in \{1, \ldots, r\}.$$

1.2.3. Minima successifs. — Les *minima successifs* sont des invariants très classiques en géométrie des nombres. Soit $\overline{E}$ un espace vectoriel adéliquement normé de rang r sur K qui est génériquement trivial. Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit $\lambda_i(\overline{E})$ la borne inférieure de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}_+$ tels que le sous-espace vectoriel de E engendré par

$$\{s \in E \,|\, \forall\, \mathfrak{p} \in \Sigma_{K,f},\ \|s\|_{\mathfrak{p}} \leqslant 1;\ \forall\, \sigma \in \Sigma_{K,\infty},\ \|s\|_{\sigma} \leqslant x\}.$$

soit de rang $\geqslant i$.

Contrairement aux pentes successives, les minima successifs ne sont pas stables par extension de corps. Une version absolue des minima successifs peut être définie via la fonction de hauteur. Si s est un élément non-nul de $E \otimes_K \mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$, la *hateur* de s est définie comme

$$H_{\overline{E}}(s) := \exp\big(-\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{K's})\big),$$

où K' est un corps de définition arbitraire de s et $\overline{K's}$ est considéré comme un sous-espace vectoriel adéliquement normé de $\overline{E} \otimes_K K'$. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on désigne par $\Lambda_i(\overline{E})$ la borne inférieure de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}_+$ tels que l'ensemble

$$\{s \in E \otimes_K \mathbb{Q}^{\mathrm{a}} \,|\, H_{\overline{E}}(s) \leqslant x\}$$

contienne i vecteurs $\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$-linéairement indépendents, appelée le $i^{\text{ème}}$ *minimum absolu*. On voit aussitôt de la définition que, pour tout corps de nombres K' contenant K,

---

(8) La théorie des pentes pour les fibrés adéliques sont aussi dévélopée dans [**23**], mais le *principe de dualité* n'est pas vrai en général.

on a $\Lambda_i(\overline{E}\otimes_K K')=\Lambda_i(\overline{E})$ quel que soit $i\in\{1,\ldots,r\}$. De plus, pour tout i on a $\Lambda_i(\overline{E})\leqslant\lambda_i(\overline{E})$. On peut même démontrer que

$$\Lambda_i(\overline{E})=\sup_{K'}\lambda_i(\overline{E}\otimes_K K'),$$

où K' parcourt tous les corps de nombres contenant K.

Gaudron [**24**, Proposition 2.16] a montré que (généralisant un résultat de Christensen and Gubler [**19**, Lemma 2.11]), si $\overline{E}$ est un espace vectoriel adéliquement normé sur K qui est génériquement trivial et pur, alors on a

$$\Lambda_i(\overline{E})\leqslant\lambda_i(\overline{E})\leqslant\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\#\Sigma_{K,c}}|\Delta_K|^{1/2}\Lambda_i(\overline{E})\qquad i\in\{1,\ldots,\mathrm{rg}(E)\},\tag{1.4}$$

où $\Sigma_{K,c}$ désigne l'ensemble des places complexes de K et Δ_K est le discriminant de K. Une inégalité similaire est valable dans le cas où $\overline{E}$ n'est pas nécessairement pur, quitte à multiplier le majorant par le *défault de pureté* de $\overline{E}$, une constante ne dépendant que de $\overline{E}$ et qui est égale à 1 lorsque $\overline{E}$ est pur.

Pour faciliter la comparaison entre les minima et les pentes, on introduit la version logarithmique des minima successifs (relatifs et absolus) comme la suite

$$u_i(\overline{E}):=-\log\lambda_i(\overline{E}),\ U_i(\overline{E}):=-\log\Lambda_i(\overline{E}),\quad i=1,\ldots,\mathrm{rg}(E).$$

On note en outre

$$u_{\max}(\overline{E}):=u_1(\overline{E}),\ u_{\min}(\overline{E}):=u_{\mathrm{rg}(E)}(\overline{E}),\tag{1.5}$$

$$U_{\max}(\overline{E}):=U_1(\overline{E}),\ U_{\min}(\overline{E}):=U_{\mathrm{rg}(E)}(\overline{E}).\tag{1.6}$$

1.2.4. Les filtrations et leur comparaison. — Étant donné un espace vectoriel adéliquement normé sur K, les invariants arithmétiques correspondent naturellement aux $\mathbb{R}$-filtrations sur son espace vectoriel sous-jacent (ou des variantes obtenues par extension de base). Ce point de vue est particulièrement commode dans l'étude des problèmes de limit en géométrie d'Arakelov.

Soient k un corps et V un espace vectoriel de rang fini sur k. On entend par *filtration* de V toute famille décroissante $(\mathcal{F}^t(V))_{t\in\mathbb{R}}$ de sous-espaces vectoriels de V indexée par $\mathbb{R}$ (considéré comme un ensemble totalement ordonné). On convient que toute filtration que l'on considère dans ce mémoire est *séparée* ($\mathcal{F}^t(V)=0$ si t est suffisamment positif), *exhaustive* ($\mathcal{F}^t(V)=V$ si t est suffisamment négatif) et *continue à gauche* (la fonction $t\mapsto\mathrm{rg}(\mathcal{F}_t(V))$ est locallement constante à gauche).

Soit $(V,\mathcal{F})$ un espace vectoriel filtré non-nul sur un corps k. Soient $a_1\leqslant\ldots\leqslant a_r$ les points de saut de la filtration $\mathcal{F}$ en comptant les multiplicités(9), où $r=\mathrm{rg}(V)$. On définit une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $\{1,\ldots,r\}$ qui envoie $i\in$

(9) On dit que $t\in\mathbb{R}$ est un *point de saut* de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}^t(V)\supsetneq\mathcal{F}^{t+\varepsilon}(V)$ quel que soit $\varepsilon>0$. La valeur

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}^t(V))-\lim_{\varepsilon\to0+}\mathrm{rg}(\mathcal{F}^{t+\varepsilon}(V))$$

est appelée la *multiplicité* du point de saut t.

$\{1,\ldots,r\}$ en a_i, appelée la *variable aléatoire associée* à $(V,\mathcal{F})$, notée comme $Z_{(V,\mathcal{F})}$, ou simplement $Z_{\mathcal{F}}$. En outre, on note

$$e_{\min}(V,\mathcal{F}) = \min_{1\leqslant i\leqslant r} Z_{\mathcal{F}}(i), \quad e_{\max}(V,\mathcal{F}) = \max_{1\leqslant i\leqslant r} Z_{\mathcal{F}}(i). \tag{1.7}$$

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(Z_{(V,\mathcal{F})}\geqslant t) = \frac{\mathrm{rg}(\mathcal{F}^t(V))}{\mathrm{rg}(V)}.$$

L'espérance de $Z_{(V,\mathcal{F})}$ est notée comme $\mathbb{E}[(V,\mathcal{F})]$ (ou en abrégé comme $\mathbb{E}[\mathcal{F}]$). Si k' est une extension de k, alors la filtration $\mathcal{F}$ induit naturellement une filtration $(\mathcal{F}^t(V)\otimes_k k')_{t\in\mathbb{R}}$ sur $V\otimes_k k'$. La variable aléatoire associée à la nouvelle filtration s'identifie à $Z_{\mathcal{F}}$.

Filtration de Harder-Narasimhan. — Soit K un corps de nombres et $\overline{E}$ un espace vectoriel adéliquement normé sur K qui est génériquement trivial et hermitien. On suppose en outre que E est non-nul. Soit

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n = E$$

le drapeau de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$. Pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, soit $a_i = \widehat{\mu}(\overline{E}_i/\overline{E}_{i-1})$. D'après [**Ch3**, §2.2.2], la *filtration de Harder-Narasimhan* de E est définie comme

$$\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(E) := \bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ a_i\geqslant t}} E_i \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

D'après [**18**, Corollaire 2.2.3], on a

$$\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(E) := \sum_{\substack{0\neq F\subset E\\ \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F})\geqslant t}} F \qquad (t\in\mathbb{R}). \tag{1.8}$$

La variable aléatoire Z associée à $\mathcal{F}_{\mathrm{HN}}$ prend valeurs dans l'ensemble discret $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Elle envoie $i\in\{1,\ldots,\mathrm{rg}(E)\}$ (muni de la mesure de probabilité uniforme) en $\mu_i(\overline{E})$. De plus, la loi de la variable aléatoire Z est

$$\mathbb{P}(Z=a_i) = \frac{\mathrm{rg}(E_i/E_{i-1})}{\mathrm{rg}(E)}, \quad i=1,\ldots,n.$$

En particulier, on a

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}_{\mathrm{HN}}] = \sum_{i=1}^n a_i\frac{\mathrm{rg}(E_i/E_{i-1})}{\mathrm{rg}(E)} = \widehat{\mu}(\overline{E}).$$

Filtration par minima. — Similairement à la filtration de Harder-Narasimhan, les $\mathbb{R}$-filtrations par minima et par hauteurs sont proposées dans [**BC**]. Pour tout espace vectoriel adéliquement normé $\overline{E}$ sur K qui est génériquement trivial et non-nul, on définit

$$\mathcal{F}^t_{\min}(E) := \mathrm{Vect}_K(\{s \in E \mid \forall\, \mathfrak{p} \in \Sigma_{K,f},\ \|s\|_{\mathfrak{p}} \leqslant 1;\ \forall\, \sigma \in \Sigma_{K,\infty},\ \|s\|_\sigma \leqslant \mathrm{e}^{-t}\}),\ t \in \mathbb{R}.$$

La filtration $\mathcal{F}_{\min}$ est appelée la *filtration par minima* de $\overline{E}$. On voit aussitôt de la définition que

$$\mathcal{F}^t_{\min}(E) = \sum_{\substack{0 \neq F \subset E \\ u_{\min}(\overline{F}) \geqslant t}} F \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{1.9}$$

où la fonction $u_{\min}$ est définie dans (1.5). La variable aléatoire associée à $\mathcal{F}_{\min}$ est la fonction sur l'espace $\{1, \ldots, \mathrm{rg}(E)\}$ qui envoie i en $u_i(\overline{E}) = -\log \lambda_i(\overline{E})$.

Filtration par hauteur. — La *filtration par hauteur* $\mathcal{F}_{\mathrm{ht}}$ est définie sur $E_{\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}}$ comme

$$\mathcal{F}^t_{\mathrm{ht}}(E_{\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}}\big(\{s \in E_{\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}} \mid H_{\overline{E}}(s) \leqslant \mathrm{e}^{-t}\}\big) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Similairement à (1.9), on a

$$\mathcal{F}^t_{\mathrm{ht}}(E_{\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}}) = \sum_{\substack{0 \neq F \subset E_{K'} \\ U_{\min}(\overline{F}) \geqslant t}} F_{\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}} \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{1.10}$$

où K' parcourt l'ensemble de tous les corps de nombres contenant K.

Le lemme suivant est un outil pour comparer les invariants arithmétiques.

Lemme 1.2.1. — *Soient k un corps et V un espace vectoriel de rang fini sur k. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtrations de V. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{F}^t(V) \subset \mathcal{G}^t(V)$. Alors on a $Z_{\mathcal{F}} \leqslant Z_{\mathcal{G}}$.*

Démonstration. — Pour tout $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}(V)\}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$Z_{\mathcal{F}}(i) \geqslant t \iff \mathrm{rg}(\mathcal{F}^t(V)) \geqslant i.$$

De même, $Z_{\mathcal{G}}(i) \geqslant t$ si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}^t(V)) \geqslant i$. Par conséquent, si $\mathcal{F}_t(V) \subset \mathcal{G}_t(V)$ pour tout t, alors la relation $Z_{\mathcal{F}}(i) \geqslant t$ implique $Z_{\mathcal{G}}(i) \geqslant t$ pour tous t et i. Donc $Z_{\mathcal{F}} \leqslant Z_{\mathcal{G}}$. □

D'après ce lemme, la comparaison des filtrations sur un espace vectoriel est liée à la comparaison des variables aléatoires associées. En particulier, la comparaison entre les filtrations par minima et par hauteurs peut être interprétée comme un résultat de Gaudron rappelé dans (1.4) : si $\overline{E}$ est un espace vectoriel adéliquement normé sur K qui est génériquement trivial et non-nul, alors

$$Z_{(E,\mathcal{F}_{\min})} \leqslant Z_{(E_{\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}},\mathcal{F}_{\mathrm{ht}})} \leqslant Z_{(E,\mathcal{F}_{\min})} + \#\Sigma_{K,c} \log(2/\pi) + \frac{1}{2}\log|\Delta_K|. \tag{1.11}$$

La comparaison entre la filtration par minima et la filtration de Harder-Narasimhan est plus délicate. Soit $\overline{E}$ un espace vectoriel adéliquement normé sur K qui est génériquement trivial, hermitien et non-nul. En utlisant l'inégalité de pentes, on peut montrer que $\mathcal{F}^t_{\mathrm{ht}}(E_{\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}}) \subset \mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(E) \otimes_K \mathbb{Q}^{\mathrm{a}}$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$ (cf. [**5**]). De façon équivalente, on a $Z_{(E_{\mathbb{Q}^{\mathrm{a}}},\mathcal{F}_{\mathrm{ht}})} \leqslant Z_{(E,\mathcal{F}_{\mathrm{HN}})}$.

Dans un travail en cours avec Boucksom, on utilise le résultat suivant qui compare la filtration par minima à la filtration de Harder-Narasimhan, démontré dans une version non-publiée de l'article [**Ch4**].

Théorème 1.2.2. — *Si $\overline{E}$ est un espace vectoriel adéliquement normé sur K qui provient d'un fibré vectoriel hermtien sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$*, alors on a*

$$Z_{(E,\mathcal{F}_{\min})} \leqslant Z_{(E,\mathcal{F}_{\mathrm{HN}})} \leqslant Z_{(E,\mathcal{F}_{\min})} + \frac{\log|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]} + \frac{1}{2}\log[K:\mathbb{Q}] + \log\frac{3\,\mathrm{rg}(E)}{2}, \tag{1.12}$$

où Δ_K est le discriminant de K. En d'autres termes, pour tout $i \in \{1,\ldots,\mathrm{rg}(E)\}$, on a

$$0 \leqslant \widehat{\mu}_i(\overline{E}) + \log\lambda_i(\overline{E}) \leqslant \frac{\log|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]} + \frac{1}{2}\log[K:\mathbb{Q}] + \log\frac{3\,\mathrm{rg}(E)}{2}. \tag{1.13}$$

La deuxième inégalité de (1.13) généralise considérablement un résultat de Borek [**5**, Theorem 3] lorsque i est grand. L'idée principale est d'utiliser les relations (1.8) et (1.9) pour ramener le problème à la comparaison entre la pente minimale et le dernier minimum. La démonstration repose sur le premier théorème de Minkowski sous la forme de [**10**, Proposition 3.2.2] (qui compare $\widehat{\mu}_{\max}$ à $-\log\lambda_1$) et un résultat de Banaszczyk [**2**, Theorem 3.1 (iii)] qui peut être considéré comme un principe de dualité entre le premier et le dernier minima, sous forme d'une majoration explicite du produit des premier et dernier minima d'un fibré vectoriel hermitien et de son dual, respectivement.

Le résultat du théorème précédent reste valable dans le cas où $\overline{E}$ est non-pur (mais génériquement trivial et hermitien), sous réserve de rajouter la version logarithmique du défaut de pureté à la constante figurant dans les troisièmes termes des inégalités (1.12) et (1.13).

1.3. Corps convexe d'un système linéaire filtré

Soient X un schéma projectif intègre défini sur un corps k et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On appelle *système linéaire gradué* de L toute sous-k-algèbre graduée de la k-algèbre $\mathbb{N}$-garduée

$$R(L) := \bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(X, L^{\otimes n}).$$

Si $V_\bullet$ est un système linéaire gradué de L, on définit le *volume* de $V_\bullet$ comme

$$\mathrm{vol}(V_\bullet) := \limsup_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{rg}_k(V_n)}{n^d/d!},$$

où d est la dimension de X. On dit que $V_\bullet$ *contient un diviseur ample* si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(1) $V_n \neq 0$ pour tout n suffisamment grand,

(2) il existe un entier $N \geqslant 1$, un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample A tel que $L^{\otimes N} \otimes A^\vee$ soit effectif[10] et une section non-nulle $s \in H^0(X, L^{\otimes N} \otimes A^\vee)$ telle que, pour tout entier $m \geqslant 1$, l'application injective

$$H^0(X, A^{\otimes m}) \xrightarrow{\cdot s^m} H^0(X, L^{\otimes mN})$$

prend son image dans V_{mN}.

En particulier, si $V_\bullet$ contient un diviseur ample, alors on a $\mathrm{vol}(V_\bullet) > 0$. Cela entraîne que L est un fibré inversible *gros*, c'est-à-dire que

$$\mathrm{vol}(L) := \mathrm{vol}(R(L)) > 0.$$

D'après Lazarsfeld et Mustaţă [**30**], Kaveh et Khovanskii [**29**] (basés sur un travail d'Okounkov [**35**]), on peut associer à chaque système linéaire gradué $V_\bullet$ contenant un diviseur ample un corps convexe dans $\mathbb{R}^d$ dont le volume par rapport à la mesure de Lebesgure s'identifie au volume de $V_\bullet$ multiplié par $d!$. En utilisant cette construction, Lazarsfeld et Mustaţă ont démontré une généralisation du théorème d'approximation de Fujita qui affirme que tout système linéaire gradué contenant un diviseur ample peut être approximé par ses sous-k-algèbres graduées de type fini.

En raison de la motivation arithmétiques, le résultat de Lazarsfeld et Mustaţă a été généralisé dans le travail [**BC**] pour les systèmes linéaires gradués muni des filtrations. Cela conduit à des applications dans les problèmes de limite en géométrie d'Arakelov que l'on résumera dans le paragraphe 1.4. Ici on se contente de présenter la construction des corps convexes et les résultats généraux qui en suivent.

1.3.1. Corps d'Okounkov. — Soient X un schéma projectif intègre défini sur un corps k. On suppose que X est de dimension $d \geqslant 1$ et admet un point rationnel régulier x. Soient $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local en x et $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Comme x est un point régulier, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier. En particulier, la k-algèbre graduée

$$A_x := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{m}_x^n / \mathfrak{m}_x^{n+1}$$

est isomorphe à $k[\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2]$. Quitte à choisir un système de paramètres[11] $(z_1, \ldots, z_d)$ en x, on peut identifier A_x à l'algèbre des polynômes $k[\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_d]$ (où $\bar{z}_i$ désigne la classe de z_i dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$). Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d}$

[10] c'est-à-dire que le faisceau admet une section globale non-nulle.

[11] i.e. une famille d'éléments de $\mathfrak{m}_x$ dont l'image dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ forme une base de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ sur k.

et $\bar{z}^\alpha := \bar{z}_1^{\alpha_1}\cdots\bar{z}_d^{\alpha_d}$. La relation d'ordre lexicographique induit une $\mathbb{N}^d$-filtration de $\mathcal{O}_{X,x}$ dont l'idéal d'indice α est

$$\sum_{\beta\geqslant\alpha}\mathcal{O}_{X,x}z^\beta.$$

Cette filtration raffine la $\mathbb{N}$-filtration $\mathfrak{m}_x$-adique. L'anneau gradué associé coïncide avec

$$A_x=\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}^d}k\bar{z}^\alpha.$$

En particulier, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^d$, le sous-quotient $\mathrm{gr}^\alpha(\mathcal{O}_{X,x})$ est un espace vectoriel de rang 1 sur k.

Étant donné un fibré inversible L sur X, quitte à choisir une trivialisation de L dans un voisinage de x, on identifie $H^0(X,L)$ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}_{X,x}$. La filtration sur $\mathcal{O}_{X,x}$ définie plus haut induit par restriction une $\mathbb{N}^d$-filtration sur $H^0(X,L)$ (ou sur chacun de ses sous-espaces vectoriels) que l'on notera $\mathcal{F}_z$. Il s'avère que la définition de $\mathcal{F}_z$ ne dépend pas du choix de la trivialisation, et chaque sous-quotient est un espace vectoriel de rang 1 sur k. La filtration $\mathcal{F}_z$ définit naturellement une fonction $\mathrm{ord}_z : H^0(X,L)\to\mathbb{N}^d\cup\{\infty\}$ de sorte que[12]

$$\forall\, s\in H^0(X,L),\quad \mathrm{ord}_z(s):=\sup\{\alpha\,|\,s\in\mathcal{F}_z^\alpha H^0(X,L)\}.$$

Cette fonction ressemble beaucoup à une valuation : pour tous éléments s et s' dans $H^0(X,L)$, on a

$$\mathrm{ord}_z(s+s')\geqslant\min(\mathrm{ord}_z(s),\mathrm{ord}_z(s')).$$

En outre, si $s\in H^0(X,L)$ et si $a\in k^\times$, alors $\mathrm{ord}_z(as)=\mathrm{ord}_z(s)$. Si L_1 et L_2 sont deux fibrés inversibles sur X et si s_1 et s_2 sont respectivement des sections globales de L_1 et L_2, alors

$$\mathrm{ord}_z(s_1s_2)=\mathrm{ord}_z(s_1)+\mathrm{ord}_z(s_2).$$

En particulier, si $V_\bullet=\bigoplus_{n\geqslant0}V_n$ est une sous-algèbre graduée de $\bigoplus_{n\geqslant0}H^0(X,L^{\otimes n})$ dont chaque composante homogène V_n est munie de la $\mathbb{N}^d$-filtration $\mathcal{F}_z$, alors l'algèbre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^d$-graduée associée

$$\mathrm{gr}_z(V_\bullet):=\bigoplus_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}^{d+1}}\mathrm{gr}_z^{n,\alpha}(V_\bullet)$$

est un anneau intègre, où

$$\mathrm{gr}_z^{n,\alpha}(V_\bullet):=\mathcal{F}_z^\alpha(V_n)\Big/\sum_{\beta>\alpha}\mathcal{F}_z^\beta(V_n).$$

On désigne par $\Gamma(V_\bullet)$ l'ensemble des $(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^d$ tels que $\mathrm{gr}_z^{n,\alpha}(V_\bullet)\neq0$. C'est un sous-semi-groupe de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^d=\mathbb{N}^{d+1}$, appelé le *semi-groupe d'Okounkov* de $V_\bullet$ (relativement au système de paramètres z). L'algèbre $\mathrm{gr}(V_\bullet)$ est engendrée par le

[12] On convient que ∞ domine tout élément de $\mathbb{N}^d$.

semi-groupe $\Gamma(V_\bullet)$. Soit $\Sigma(V_\bullet)$ le cône convexe dans $\mathbb{R}^{n+1}$ engendré par $\Gamma(V_\bullet)$. Le *corps d'Okounkov* de $V_\bullet$ est alors défini comme (cf. [**30**, p. 18])

$$\Delta(V_\bullet) := \Sigma(V_\bullet) \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^n).$$

D'après [**30**] Lemma 2.12 et Proposition 2.1, si $V_\bullet$ contient un diviseur ample, alors le groupe $\mathbb{Z}^{n+1}$ est engedré par $\Gamma(V_\bullet)$, et donc on a

$$\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{rg}_k(V_n)}{n^d},$$

où $\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet))$ désigne la mesure de Lebesgue de $\Delta(V_\bullet)$.

1.3.2. Systèmes linéaires gradués et filtrés. — Soit X un schéma projectif intègre défini sur un corps k. Comme dans le sous-paragraphe précédent, on suppose que X est de dimension $d \geqslant 1$ et admet un point rationnel régulier x. Soient en outre un $\mathcal{O}_X$-module inversible gros L et $V_\bullet$ un système linéaire gradué de L qui contient un diviseur ample.

On suppose donnée, pour chaque entier $n \geqslant 0$, une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$ sur V_n[(13)]. On suppose en outre que les filtrations sur $V_\bullet$ sont *compatibles* à la graduation. Autrement dit, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ et $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$(\mathcal{F}^{t_1}V_n)(\mathcal{F}^{t_2}V_m) \subset \mathcal{F}^{t_1+t_2}V_{n+m}.$$

En particulier, pour tout nombre réel t, les espaces vectoriels $V_n^t := \mathcal{F}^{nt}V_n$ forment un système linéaire gradué

$$V_\bullet^t := \bigoplus_{n\geqslant 0} V_n^t$$

de L. Par la construction des corps d'Okounkov que l'on a rappelée dans le sous-paragraphe précédent, on obtient une famille décroissante $(\Delta(V_\bullet^t))_{t\in\mathbb{R}}$ de parties convexes et compactes de $\mathbb{R}^d$. De plus, pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\lambda\Delta(V_\bullet^{t_1}) + (1-\lambda)\Delta(V_\bullet^{t_2}) \subset \Delta(V_\bullet^{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2}).$$

On note (cf. (1.7) pour les notations)

$$e_{\min}(V_\bullet, \mathcal{F}) := \liminf_{n\to\infty} \frac{e_{\min}(V_n,\mathcal{F})}{n}, \quad e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F}) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{e_{\max}(V_n,\mathcal{F})}{n}.$$

Comme $V_\bullet$ est supposé contenir un diviseur ample, on a (cf. [**BC**, Lemma 1.4])

$$e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F}) = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{\max}(V_n,\mathcal{F})}{n} = \sup_{n\geqslant 1} \frac{e_{\max}(V_n,\mathcal{F})}{n}.$$

De plus, pour tout nombre réel $t < e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F})$, le système linéaire gradué $V_\bullet^t$ contient un diviseur ample (cf. Lemma 1.5 *loc. cit.*).

---

(13) On convient que la filtration sur V_0 est triviale (c'est-à-dire que la filtration admet un seul saut en $t = 0$).

On suppose désormais que $e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F}) < +\infty$. La *transformée concave* de $\mathcal{F}$ est définie comme la fonction concave $G_{(V_\bullet,\mathcal{F})}$ de $\Delta(V_\bullet)$ ver $[-\infty, +\infty[$ telle que

$$G_{(V_\bullet,\mathcal{F})}(x) := \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, x \in \Delta(V_\bullet^t)\}.$$

C'est une fonction concave continue sur $\Delta(V_\bullet)^\circ$ et semi-continue supérieurement sur $\Delta(V_\bullet)$. En outre, on a

$$e_{\min}(V_\bullet, \mathcal{F}) \leqslant G_{(V_\bullet,\mathcal{F})} \leqslant e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F}).$$

On peut ainsi énoncer le théorème de limite pour les systèmes linéaires gradués et filtrés comme la suite (cf. [**BC**] Theorem 1.11).

Théorème 1.3.1. — *Soient X un schéma projectif intègre de dimension $\geqslant 1$ défini sur un corps k, qui admet un point rationnel régulier, et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible gros. Soit $V_\bullet$ un système linéaire gradué de L, contenant un diviseur ample, et muni des filtrations $\mathcal{F}$ qui sont compatibles à la graduation et telles que $e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F}) < +\infty$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit Z_n la variable aléatoire associée*[14] *à $(V_n, \mathcal{F})$. Alors la suite de variables aléatoires $(Z_n/n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la loi de probabilité l'image directe de la mesure de Lebesgue normalisée*[15] *sur $\Delta(V_\bullet)^\circ$ par l'application continue $G_{(V_\bullet,\mathcal{F})}$. Le support de la mesure limite est l'intervalle fermé délimité par $e_{\min}(V_\bullet, \mathcal{F})$ et $e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F})$.*

Bien que la définition du corps d'Okounkov dépend d'un système de paramètres, la loi de probabilité limite est intrinsèque. En effet, si Z est une variable aléatoire qui suit cette loi, alors on a

$$\mathbb{P}(Z \geqslant t) = \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet^t)}{\mathrm{vol}(V_\bullet)} = \frac{\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet^t))}{\mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet))}.$$

On définit le *corps d'Okounkov* du système linéaire gradué et filtré $V_\bullet$ comme

$$\widehat{\Delta}(V_\bullet, \mathcal{F}) := \{(x,t) \in \Delta(V_\bullet, \mathcal{F}) \times \mathbb{R} \,|\, 0 \leqslant t \leqslant G_{(V_\bullet,\mathcal{F})}(x)\}.$$

Le théorème précédent montre que

$$\mathrm{vol}(\widehat{\Delta}(V_\bullet, \mathcal{F})) = \int_0^{+\infty} \mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet^t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{vol}(\Delta(V_\bullet)) \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Z_n^+/n],$$

où $Z_n^+ := \max(Z_n, 0)$, et les deux occurences de vol désignent des mesures de Lebesgue.

Comme une application, on obtient l'analogue du théorème d'approximation de Lazarsfeld-Mustaţă dans le cadre des systèmes linéaires gradués filtrés (cf. Theorem 1.14 *loc. cit.*).

(14) Voir p.10 pour la définition.

(15) de sorte que la masse totale vaut 1.

Théorème 1.3.2. — *Soient $V_\bullet$ et $\mathcal{F}$ comme dans le théorème précédent. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-algèbre graduée de type fini $W_\bullet$ de $V_\bullet$ telle que*

$$\mathrm{vol}(\widehat{\Delta}(W_\bullet, \mathcal{F})) \geqslant \mathrm{vol}(\widehat{\Delta}(V_\bullet, \mathcal{F})) - \varepsilon.$$

1.4. Théorèmes de limite arithmétiques

Le théorème de limite abstrait dans le paragraphe précédent peut être appliqué aux systèmes linéaires gradués munis des structures arithmétiques pour obtenir des résultats de limite en géométrie d'Arakelov. Dans ce paragarphe, K désigne un corps de nombres. On fixe un K-schéma intègre et projectif X qui est de dimension $d \geqslant 1$.

1.4.1. Systèmes linéaires gradués adéliquement normés. — Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On appelle *système linéaire gradué adéliquement normé* de L (cf. [**42**, §1]) tout système linéaire gradué $V_\bullet$ de L dont chaque composante homogène V_n est munie d'une structure d'espace vectoriel adéliquement normé $(\|\cdot\|_{n,v})_{v\in\Sigma_K}$ telle que, pour tous $s \in V_n$, $s' \in V_m$ et tout $v \in \Sigma_K$, on ait

$$\|ss'\|_{n+m,v} \leqslant \|s\|_{n,v}\|s\|_{m,v}. \tag{1.14}$$

Un exemple typique est le système gradué associé à un fibré inversible adéliquement normé. On suppose donnée, pour tout $v \in \Sigma_K$, une métrique $\|\cdot\|_v$ sur $L(\mathbb{C}_v)$ (considéré comme un fibré inversible sur X_v^{an}, l'espace analytique associé à $X_{\mathbb{C}_v}$) qui est continue et invariante par l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$. La métrique $\|\cdot\|$ induit par produit tensoriel une métrique continue et invariante par le groupe de Galois (que l'on note encore $\|\cdot\|$ par abus de notation) sur $L(\mathbb{C}_v)^{\otimes n}$ pour chaque entier $n \geqslant 0$. Si s est un élément dans

$$H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_K \mathbb{C}_v \cong H^0(X_{\mathbb{C}_v}, L_{\mathbb{C}_v}^{\otimes n}),$$

on note

$$\|s\|_{n,v} := \sup_{x \in X(\mathbb{C}_v)} \|s\|_v(x).$$

Il s'avère que l'application $\|\cdot\|_{n,v}$ ainsi définie est une norme sur $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_K \mathbb{C}_v$. Elle est de plus ultramétrique lorsque v est une place finie. En outre, la famille de normes $(\|\cdot\|_{n,v})_{n\geqslant 1,\, v\in\Sigma_K}$ satisfait à la condition (1.14), et donc munit $R(L) := \bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(X, L^{\otimes n})$ d'une structure de système linéaire gradué adéliquement normé.

Si $\mathfrak{p}$ est une place finie de K, une métrique sur $L(\mathbb{C}_\mathfrak{p})$ peut provenir d'un modèle de $L_{\mathbb{C}_\mathfrak{p}}$. Soit $\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{C}_\mathfrak{p}$. Un *modèle* de $(X_{\mathbb{C}_\mathfrak{p}}, L_{\mathbb{C}_\mathfrak{p}})$ est défini comme un $\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$-schéma projectif et plat $\mathfrak{X}_\mathfrak{p}$ ainsi qu'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\mathfrak{p}}$-module inversible $\mathfrak{L}_\mathfrak{p}$ tels que $X_{\mathbb{C}_\mathfrak{p}} \cong \mathfrak{X}_\mathfrak{p} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}} \mathbb{C}_\mathfrak{p}$ et que $L_{\mathbb{C}_\mathfrak{p}} \cong \mathfrak{L}_\mathfrak{p} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}} \mathbb{C}_\mathfrak{p}$. Étant donné d'un modèle $(\mathfrak{X}_\mathfrak{p}, \mathfrak{L}_\mathfrak{p})$ de $(X_{\mathbb{C}_\mathfrak{p}}, L_{\mathbb{C}_\mathfrak{p}})$, on obtient naturellement une métrique $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}_\mathfrak{p}}$ sur $L(\mathbb{C}_\mathfrak{p})$ telle que, pour tout $x \in X(\mathbb{C}_{\mathfrak{p}})$ et tout $\lambda_x \in L_{\mathbb{C}_p}(x)$, on ait[16]

$$\|\lambda_x\|_{\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}} = \inf\{|a|_{\mathfrak{p}} \,:\, a \in \mathbb{C}_v,\ a^{-1}\lambda_x \in \mathfrak{P}_x^*\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}\},$$

où $\mathfrak{P}_x$ est l'unique $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$-point de $\mathfrak{X}_{\mathfrak{p}}$ qui prolonge x. Il s'avère que la norme puissance tensorielle sur $L(\mathbb{C}_{\mathfrak{p}})^{\otimes n}$ (où $n \geqslant 0$ est un entier) provient du modèle $(\mathfrak{X}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}^{\otimes n})$ de $(X_{\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}}, L_{\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}}^{\otimes n})$, et que la norme sup $\|\cdot\|_{n,\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}}$ sur $H^0(X, L^{\otimes n})_{\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}}$ définie comme

$$\|s\|_{n,\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}} := \sup_{x \in X(\mathbb{C}_v)} \|s\|_{\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}}(x)$$

vérifie la relation

$$\|s\|_{n,\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}} = \inf\{|a|_v \,:\, a \in \mathbb{C}_{\mathfrak{p}},\ a^{-1}s \in H^0(\mathfrak{X}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}^{\otimes n})\}.$$

1.4.2. Théorèmes de limite arithmétiques. — Soient L un $\mathcal{O}_X$-module inversible et $\overline{V}_\bullet$ un système linéaire gradué adéliquement normé de L. On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\overline{V}_n$ est génériquement trivial. La condition (1.14) montre que les filtrations par minima sur les espaces vectoriels V_n sont compatibles à la graduation de $V_\bullet$. Donc le théorème 1.3.1 s'applique et conduit au résultat suivant.

Théorème 1.4.1. — *Soient X un schéma projectif intègre de dimension $d \geqslant 1$ défini sur un corps de nombres K, qui admet un point rationnel régulier, et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible gros. Soit $\overline{V}_\bullet$ un système linéaire gradué adéliquement normé de L tel que $V_\bullet$ contienne un diviseur ample. On suppose que chaque espace vectoriel adéliquement normé $\overline{V}_n$ est génériquement trivial et que $-\log\lambda_1(\overline{V}_n) = O(n)$ lorsque $n \to +\infty$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit Z_n la variable aléatoire associée à $(V_n, \mathcal{F}_{\min})$. Alors la suite de variables aléatoires $(Z_n/n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$ dont le support a une borne supérieure finie.*

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi limite. D'après le théorème, on a

$$\mathbb{E}[Z^+] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Z_n^+]/n, \tag{1.15}$$

où $Z_n^+ := \max(Z_n, 0)$ et $Z^+ := \max(Z, 0)$. Rappelons que le *volume* (arithmétique) de $\overline{V}_\bullet$ est défini comme

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{V}_\bullet) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\widehat{\dim}_K(\widehat{H}^0(\overline{V}_n))}{n^{d+1}/(d+1)!}, \tag{1.16}$$

où $\widehat{H}^0(\overline{V}_n)$ est l'ensemble des éléments $s \in V_n$ tels que $\|s\|_{n,v} \leqslant 1$ quel que soit $v \in \Sigma_K$, et pour tout ensemble A, $\widehat{\dim}_K(A) := \log(\#A)/[K:\mathbb{Q}]$. D'après [**25**, Proposition 6], pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\mathbb{E}[Z_n^+] = \frac{\widehat{\dim}_K(\widehat{H}^0(\overline{V}_n))}{\mathrm{rg}(V_n)} + O(\log \mathrm{rg}(V_n)).$$

[16] L'ensemble $X(\mathbb{C}_{\mathfrak{p}})$ étant dense dans $X_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{an}}$, la métrique $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}}$, qui est initialement définie sur $X(\mathbb{C}_{\mathfrak{p}})$, s'étend par continuité sur tout espace analytique $X_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{an}}$.

Comme la suite $d!\,\mathrm{rg}(V_n)/n^d$ converge vers $\mathrm{vol}(V_\bullet)$ (cf. [**30**, Remark 2.14]), on obtient que la suite dans (1.16) qui définit la fonction volume arithmétique converge, et que l'on a

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{V}_\bullet) = (d+1)\mathrm{vol}(V_\bullet)\mathbb{E}[Z^+].$$

Comme la mesure limite dans le théorème 1.4.1 peut être interprétée comme une image directe de la mesure de Lebesgue du corps convexe associé à $\overline{V}_\bullet$, on obtient via l'inégalité de Brunn-Minkowski la log-concavité de la fonction $\widehat{\mathrm{vol}}$ comme la suite.

Théorème 1.4.2. — *Soit X comme dans le théorème 1.4.1. Soient L et M deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles gros. On suppose que $U_\bullet$, $V_\bullet$ et $W_\bullet$ sont respectivement systèmes linéaires gradués adéliquement normés de L, M et $L+M$ qui contiennent des diviseurs amples. On suppose en outre que*

(i) *pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $U_n \cdot V_n \subset W_n$;*

(ii) *pour tout $v \in \Sigma_K$, tout entier $n \geqslant 1$ et tous $s \in U_n$, $s' \in V_n$, on a*

$$\|ss'\|_v \leqslant \|s\|_v \|s'\|_v;$$

(iii) $\max(-\log\lambda_1(\overline{U}_n), -\log\lambda_1(\overline{V}_n), -\log\lambda_1(\overline{W}_n)) = O(n) \qquad (n \to +\infty).$

Alors on a

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{W}_\bullet)^{1/(d+1)} \geqslant \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{U}_\bullet)^{1/(d+1)} + \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{V}_\bullet)^{1/(d+1)}. \tag{1.17}$$

Ce résultat avait été d'abord obtenu dans [**50**] pour les systèmes linéaires totaux munis des normes sup, puis a été démontré sous cette forme dans [**BC**].

Une autre conséquence de cette interprétation de la mesure limite est le théorème d'approximation suivant (cf. [**BC**, Theorem 2.9]) :

Théorème 1.4.3. — *Soit X comme dans le théorème 1.4.1. Soit $\overline{V}_\bullet$ un système linéaire gradué adéliquement normé de L. On suppose que $V_\bullet$ contient un diviseur ample et que $-\log\lambda_1(V_n) = O(n)$ lorsque $n \to +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-K-algèbre graduée de type finie $W_\bullet$ de $V_\bullet$ telle que*

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{W}_\bullet) \geqslant \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{V}_\bullet) - \varepsilon.$$

La démonstration repose sur une application directe du théorème d'approximation abstrait 1.3.2.

Une variante du théorème 1.4.1 est valable pour les minima absolus successifs.

Théorème 1.4.4. — *Soient X un schéma projectif et géométriquement intègre de dimension $d \geqslant 1$ défini sur un corps de nombres K, et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible gros. Soit $\overline{V}_\bullet$ un système linéaire gradué adéliquement normé de L tel que $V_\bullet$ contienne un diviseur ample. On suppose que chaque espace vectoriel adéliquement normé $\overline{V}_n$ est génériquement trivial et que $-\log\Lambda_1(\overline{V}_n) = O(n)$ lorsque $n \to +\infty$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit Z'_n la variable aléatoire associée à $(V_{n,\mathbb{Q}^a}, \mathcal{F}_{\mathrm{ht}})$. Alors la suite de* *variables aléatoires* $(Z'_n/n)_{n\geqslant 1}$ *converge en loi vers une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}$ *dont le support a une borne supérieure finie.*

D'après la comparaison entre les minima successifs et ceux absolus (1.4), on obtient que, s'il existe un ensemble fini S de places de K tel que les normes indexées par les places dans $\Sigma_K \setminus S$ de chaque espace vectoriel adéliquement normé $\overline{V}_n$ sont toutes pures, alors les mesures limites dans les théorèmes 1.4.1 et 1.4.1 coïncident. Si de plus les espaces vectoriels adéliquement normés $\overline{V}_n$ sont hermitiens et si Z''_n est la variable aléatoire associée à $(V_n, \mathcal{F}_{\mathrm{HN}})$, alors le théorème 1.2.2 montre que la suite $(Z''_n/n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la même limite. Cela nous permet de retrouver et généraliser certains résultats dans [**Ch3**] concernant la convergence des polygones de Harder-Narasimhan.

1.5. Applications

Soient k un corps et X un schéma projectif et intègre de dimension d sur $\operatorname{Spec} k$. Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, le *volume* de L est défini comme

$$\mathrm{vol}(L) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{rg}_k(H^0(X, L^{\otimes n}))}{n^d/d!}.$$

On dit que L est *gros* si $\mathrm{vol}(L) > 0$. La fonction volume est un invariant birationnel, autrement dit, si X' est un k-schéma intègre et si $\pi : X' \to X$ est un K-morphisme birationnel et projectif, alors on a

$$\mathrm{vol}(\pi^*(L)) = \mathrm{vol}(L).$$

En outre, la fonction vol est *homogène* de degré d : pour tout fibré inversible L et tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\mathrm{vol}(L^{\otimes n}) = n^d \mathrm{vol}(L).$$

Si L est *numériquement effectif* (*nef* en abrégé, c'est-à-dire que, pour tout courbe C dans X, on a $\deg(c_1(L) \cap [C]) \geqslant 0$) et gros, alors le volume de L est égal au nombre d'auto-intersection :

$$\mathrm{vol}(L) = c_1(L)^d.$$

Fujita [**22**] et Takagi [**48**] ont démontré que tout fibré inversible gros peut être approximé par les fibrés inversibles amples[17]. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geqslant 1$, un K-schéma intègre X', un K-morphisme birationnel et projectif $\pi : X' \to X$ et un $\mathcal{O}_{X'}$-module inversible A tels que $A^\vee \otimes \pi^*(L)^{\otimes N}$ soit effectif et que

$$\mathrm{vol}(A) \geqslant N^d(\mathrm{vol}(L) - \varepsilon).$$

[17] Fujita a traité le cas où la caractéristique de k est nulle. Takagi a démontré le théroème d'approximation dans le cas de caractéristique > 0.

Moriwaki a introduit dans [**32**] l'analogue de la fonction de volume en géométrie d'Arakleov. Dans [**33**], il a démontré que la fonction volume arithmétique est un invariant birationnel. Il a aussi conjecturé un analogue (cf. Remark 4.1 *loc. cit.*) du théorème d'approximaton de Fujita. Cette conjecture a été démontrée respectivement dans [**Ch4**] et [**50**] en utilisant deux méthodes différentes. Il s'avère que les théorèmes de limite dans le paragraphe précédent conduisent à une démonstration simple de cette conjecture.

En utilisant le théorème d'approximation de Fujita arithmétique et l'analogue de l'inégalité de Siu en géométrie d'Arakelov (cf. [**50**, Theorem 2.2]), on démontre dans [**Ch5**] que la fonction volume arithmétique est différentiable sur le semi-groupe des fibrés inversibles hermitiens gros. La différentielle peut être interprétée comme un produit d'intersection positive arithmétique. Ce résultat est un avatar arithmétique d'un travaille de Boucksom, Favre et Jonsson [**12**] sur la différentiabilité de la fonction volume géométrique. Bien que ces deux résultats reposent sur des propriétés similaires des fonctions volumes (géométrique et arithmétique), la démonstration dans [**Ch5**] repose sur un argument de convexité élémentaire qui peut être comparé au fait suivant en analyse convexe : *si $f \geqslant g$ sont deux fonctions définies sur un sous-ensemble ouvert et convexe U de $\mathbb{R}^n$ telles que $f(x_0) = g(x_0)$ et que g soit concave et différentiable en x_0, alors la fonction f est nécessairement différentiable en x_0.* Cela nous permet de mieux comprendre les rôles joués par différentes propriétés de la fonction volume arithmétique dans la démonstration, et nous permet aussi de retrouver la différentiabilité de la fonction volume géométrique d'une manière transparente et simple.

1.5.1. Théorème d'approximation de Fujita arithmétique. — Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers algébriques dans K. Soit $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ un morphisme projectif et plat d'un schéma intègre X vers $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. On suppose en outre que X_K possède un point rationnel. Soit d la dimension relative de π. Rappelons que le schéma X est de dimension $d+1$.

On désigne par $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés inversibles hermitiens (avec des métriques continues) sur X. Si $\overline{L}$ est un fibré inversible hermitien sur X, on désigne par $\pi_*(\overline{L})$ le $\mathcal{O}_K$-module $\pi_*(L)$ muni des normes sup. Par abus de notation, on peut considérer $\pi_*(\overline{L})$ comme un esapce vectoriel adéliquement normé sur K (qui est pure et génériquement trivial).

Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermtien sur X. On dit qu'une section $s \in \pi_*(L)$ est *effective* (resp. *strictement effective*) si pour tout $\sigma \in \Sigma_{K,\infty}$ on a $\|s\|_{\sigma,\sup} \leqslant 1$ (resp. $\|s\|_{\sigma,\sup} < 1$). On dit que $\overline{L}$ est *effectif* (resp. *strictement effectif*) s'il possède une section effective (resp. strictement effective) qui est non-nulle.

Soit $\overline{A}$ un fibré inversible hermitien sur X. On dit que $\overline{A}$ est (arithmétiquement) *ample* si A est ample, $c_1(\overline{A})$ est semipositive comme courrant sur $X(\mathbb{C})$ et $\widehat{c}_1(\overline{A}|_Y)^{\dim Y} > 0$ pour tout sous-schéma fermé intègre Y de X qui est plat sur

$\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Ici le nombre d'intersection est défini au sens de Zhang (voir [**52**, Lemma 6.5]). Rappelons que le schéma X possède toujours un fibré inversible hermitien ample. On peut considérer un plongement de X dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$, la restriction à X du faisceau inversible universel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ muni des métriques de Fubini-Study est ample.

On dit qu'un fibré inversible hermitien $\overline{N}$ est *vecticalement nef* si la restriction de N à chacune des fibres de π est nef et si $c_1(\overline{N})$ est semi-positive comme courant sur $X(\mathbb{C})$. On dit que $\overline{N}$ est *nef* s'il est verticalement nef et si $\widehat{c}_1(\overline{N}|_Y)^{\dim Y} \geqslant 0$ pour tout sous-schéma fermé intègre Y de X qui est plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Les fibrés inversibles hermitiens sur X qui sont nefs forment un sous-semi-groupe de $\widehat{\operatorname{Pic}}(X)$ que l'on note $\widehat{\operatorname{Nef}}(X)$. Il s'avère que tout fibré inversible hermitien ample est nécessairement nef. De plus, si $\overline{A}$ est un fibré inversible hermitien ample et si $\overline{N} \in \widehat{\operatorname{Pic}}(X)$ est tel que $\overline{N}^{\otimes n} \otimes \overline{A}$ soit ample pour tout entier $n \geqslant 1$, alors $\overline{N} \in \widehat{\operatorname{Nef}}(X)$.

Si $f : X(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui est invariante par la conjugaison complexe, on désigne par $\overline{\mathcal{O}}(f)$ le fibré inversible hermitien sur X dont le fibré inversible sous-jacent est trivial et tel que la norme de la section d'unité $\mathbf{1}$ en $x \in X(\mathbb{C})$ est $\mathrm{e}^{-f(x)}$. On voit aussitôt de la définition que, si f est positive, alors $\overline{\mathcal{O}}(f)$ est effectif. En outre, pour tout $a \in \mathbb{R}$ (considéré comme la fonction constante sur $X(\mathbb{C})$ qui prend la valeur a), $\overline{\mathcal{O}}(a)$ est nef si et seulement si $a \geqslant 0$. Si $\overline{L}$ est un fibré inversible hermitien sur X, la notation $\overline{L}(f)$ désigne $\overline{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}(f)$.

Pour tout $\overline{L} \in \widehat{\operatorname{Pic}}(X)$, le *volume* de $\overline{L}$ est défini comme

$$\widehat{\operatorname{vol}}(\overline{L}) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\dim}_K(\widehat{H}^0(\pi_*(\overline{L}^{\otimes n})))}{n^{d+1}/(d+1)!}.$$

La définition ici est légèrement différente (avec un facteur $[K:\mathbb{Q}]^{-1}$ en plus) que celle dans [**32**]. Ainsi, lorsque $\overline{L}$ est nef, on a

$$\widehat{\operatorname{vol}}(\overline{L}) = \frac{\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}}{[K:\mathbb{Q}]}.$$

On dit que $\overline{L}$ est *gros* si $\widehat{\operatorname{vol}}(\overline{L}) > 0$. D'après [**49**], $\overline{L}$ est gros si et seulement si une certaine puissance tensorielle (positive) de $\overline{L}$ s'écrit comme le produit tensoriel d'un fibré inversible hermitien ample avec un autre qui est effectif. Ainsi les fibrés inversibles hermitiens gros forment un sous-semi-groupe de $\widehat{\operatorname{Pic}}(X)$ que l'on note $\widehat{\operatorname{Big}}(X)$. Ce sous-semi-groupe est de plus ouvert : si $\overline{L}$ est gros et si $\overline{M} \in \widehat{\operatorname{Pic}}(X)$, alors pour tout entier n suffisamment grand, on a $\overline{L}^{\otimes n} \otimes \overline{M} \in \widehat{\operatorname{Big}}(X)$.

Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur X. On appelle *décomposition admissible* de $\overline{L}$ tout triplet $(\nu, \overline{N}, p)$, où

1) $\nu : X' \to X$ est une *modification birationnelle* de X (autrement dit, X' est un $\mathcal{O}_K$-schéma intègre, projectif et plat, et ν est un $\mathcal{O}_K$-morphisme birationnel et projectif),
2) $\overline{N}$ est un fibré inversible hermitien sur X' qui est nef,

3) $p \geqslant 1$ est un entier tel que $\nu^*(\overline{L}^{\otimes p}) \otimes \overline{N}^\vee$ soit effectif.

On désigne par $\Theta(\overline{L})$ l'ensemble de toutes les decompositions admissibles de $\overline{L}$. Cet ensemble est naturellement muni d'une relation d'ordre. Soient

$$D_i = (\nu_i : X_i \to X, \overline{N}_i, p_i) \qquad (i = 1, 2)$$

deux decompositions admissibles de $\overline{L}$. On dit que D_1 est *supérieure* à D_2 et on note $D_1 \succ D_2$ si p_2 divise p_1 et s'il existe une modification birationnelle $\eta : X_1 \to X_2$ telle que $\nu_2\eta = \nu_1$ et que $\overline{N}_1 \otimes (\eta^*\overline{N}_2)^{\vee\otimes(p_1/p_2)}$ soit effectif.

Le résultat suivant est un point clé pour étudier la fonction volume arithmétique. Il montre que l'ensemble des décompositions admissibles est filtré par la relation d'ordre.

Lemme 1.5.1. — *Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur X. Si D_1 et D_2 sont deux décompositions admissibles de $\overline{L}$, alors il existe une décomposition admissible D de $\overline{L}$ telle que $D \succ D_1$ et $D \succ D_2$.*

Pour toute décomposition admissible $D = (\nu, \overline{N}, p)$ de $\overline{L}$, on définit

$$\widehat{\mathrm{vol}}(D) := p^{-(d+1)}\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{N}).$$

On a $\widehat{\mathrm{vol}}(D) \leqslant \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})$. En outre, si D_1 et D_2 sont deux décompositions admissibles de $\overline{L}$ telles que $D_1 \succ D_2$, alors on a $\widehat{\mathrm{vol}}(D_1) \geqslant \widehat{\mathrm{vol}}(D_2)$.

On peut maintenant énoncer le théorème d'approximation de Fujita arithmétique comme la suite.

Théorème 1.5.2. — *Soit $\pi : X \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ un morphisme projectif et plat de dimension relative d d'un schéma intègre X vers $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. On suppose que X_K possède un point rationnel. Si $\overline{L}$ est un fibré inversible hermitien gros sur X, alors on a*

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) = \sup_{D\in\Theta(\overline{L})} \widehat{\mathrm{vol}}(D).$$

Pour la démonstration, on utilise le théorème 1.4.3 pour construire explicitement une décomposition admissible en éclatant le lieu de base des sections effectives non-nulles dans une sous-K-algèbre graduée de $R(L_K) := \bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(X, L_K^{\otimes n})$ correspondant à une approximation assez précise du volume de $\overline{L}$. Signalons que la fonction volume est un invariant birationnel. Quitte à prendre une modification birationnelle on se ramène au cas où X_K possède un point rationnel régulier où le théorème 1.4.3 s'applique.

1.5.2. Différentiabilité de la fonction volume arithmétique. — Soient $(G, +)$ un groupe commutatif, H un sous-groupe de G, et C un sous-semi-groupe de G. On dit que le sous-semi-groupe C est *ouvert* par rapport à H si, pour tout $x \in C$ et tout $v \in H$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que $n_0x + v \in C$ (dans ce cas-là on a $nx + v \in C$ quel que soit $n \geqslant n_0$).

Soit $\delta \geqslant 1$ un entier. On dit qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est (positivement) *homogène de degré δ* si pour tout $x \in C$ et tout entier $n \geqslant 1$ on a $f(nx) = n^\delta f(x)$.

Une fonction homogène de degré 1 est aussi appelée une fonction *homogène*. Un exemple typique en géométrie d'Arakelov est la fonction volume arithmétique sur le semi-groupe des fibrés inversibles hermitiens gros.

Supposons que C est ouvert par rapport à H. Soient $x \in C$ et $v \in H$. On dit qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ homogène de degré δ est *dérivable* en x le long de v si la limite

$$Df(x)(v) := \lim_{n\to+\infty} \frac{f(nx+v) - f(nx)}{n^\delta}$$

existe dans $\mathbb{R}$. On dit que la fonction f est *différentiable* en x par rapport à H si elle est dérivable en x le long de tout élément de H et si la fonction $Df(x) : H \to \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes.

Supposons que $f : C \to \mathbb{R}$ est une fonction homogène (de degré 1) qui est sur-additive, c'est-à-dire que $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$ quels que soient $x, y \in C$, alors, pour tout $x \in C$ et tout $v \in H$, la suite qui envoie $n \in \mathbb{N}$ (assez grand) en $f(nx+v) - f(nx)$ est croissante. Donc elle converge vers un élément dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que l'on note $Df(x)(v)$. L'application $Df(x) : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est sur-additive. Dans le cas où la fonction f est de plus positive, alors pour toute fonction g de la forme $x \mapsto f(x)^\delta$ ($\delta \in \mathbb{N}$, $\delta \geqslant 1$), la limite

$$Dg(x)(v) := \lim_{n\to+\infty} \frac{g(nx+v) - g(nx)}{n^{\delta-1}}$$

existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, et on a $Dg(x) = \delta f(x)^{\delta-1} Df(x)$. En particulier, $Dg(x) : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est aussi une application sur-additive.

Soient K un corps de nombres $\pi : X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un morphisme projectif et plat de dimension relative d d'un schéma intègre X vers $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. On suppose que X_K admet un point rationnel. La fonction volume $\widehat{\mathrm{vol}}$ est homogène de degré $d+1$ sur le sous-semi-groupe $\widehat{\mathrm{Big}}(X)$ (qui est ouvert par rapport à $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$) du groupe de Picard arithmétique $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$. La log-concavité (cf. théorème 1.4.2 *infra.*) montre que la fonction $\widehat{\mathrm{vol}}^{1/(d+1)}$ est positive et sur-additive sur $\widehat{\mathrm{Big}}(X)$. En particulier, pour tout fibré inversible hermitien gros $\overline{L}$ sur X, la fonction

$$D\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) : \widehat{\mathrm{Pic}}(X) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

est bien définie et sur-additive.

Le lemme suivant est crucial dans l'étude de la différentiabilité de la fonction volume arithmétique. La démonstration est cependant simple (voir [**Ch5**, Proposition 4.1]).

Lemme 1.5.3. — *Soient G un groupe commmutatif, H un sous-groupe de G et C un sous-semi-groupe de G qui est ouvert par rapport à H. Si $\varphi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction sur-additive qui n'est pas identiquement $+\infty$ et si $\psi : H \to \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes tel que $\varphi \geqslant \psi$, alors on a $\varphi = \psi$.*

Compte tenu du lemme, pour montrer la différentiabilité de la fonction volume arithmétique, il suffit de minorer la fonction $D\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})$ par un morphisme de groupes de $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ vers $\mathbb{R}$. Le choix naturel est un analogue du produit d'intersection positive en géométrie d'Arakelov. Le produit d'intersection positive est construit d'abord dans le cadre de la géométrie analytique (cf. [**11**]) puis dans le cadre algébrique (cf. [**12**]). En géométrie d'Arakelov, cette construction nous permet de considérer l'intersection (modifiée) de tous fibrés inversibles hermitiens gros (non-nécessairemenet munis des métriques semi-positifs). La fonction volume arithmétique peut s'écrire comme un nombre d'auto-intersection positive.

Revenons vers les décompositions admissibles définis dans le sous-paragraphe précédent. Comme le nombre d'intersection arithmétique est un invariant birationnel, on peut définir le produit d'interection pour les décompositions admissibles. Soient $(\overline{L}_i)_{i=0}^d$ une famille de fibrés inversibles hermitiens sur X et $m \in \{0, \dots d\}$. On suppose que $\overline{L}_i$ est gros pour $i \in \{0, \dots, m\}$ et est nef pour $i \in \{m+1, \dots, d\}$. Pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$, soit $D_i = (\nu_i : X_i \to X, \overline{N}_i, p_i)$ une décomposition admissible de $\overline{L}_i$. On choisit une modification birationnelle $\nu : X' \to X$ qui factorise par chacun des ν_i ($i \in \{0, \dots, m\}$). On désinge par $\eta_i : X_i \to X$ le morphisme projectif birationnel tel que $\nu = \nu_i \eta_i$ ($0 \leqslant i \leqslant m$). On définit

$$(D_0 \cdot \ldots \cdot D_m) \cdot \widehat{c}_1(\overline{L}_{m+1}) \cdot \ldots \cdot \widehat{c}_1(\overline{L}_d)$$

comme le nombre d'intersection normalisé

$$\widehat{c}_1(\eta_0^* \overline{N}_0) \cdot \ldots \cdot \widehat{c}_1(\eta_m^* \overline{N}_m) \cdot \widehat{c}_1(\nu^* \overline{L}_{m+1}) \cdot \ldots \cdot \widehat{c}_1(\nu^* \overline{L}_d) \prod_{i=0}^m p_i^{-1}.$$

Il s'avère que cette définition ne dépend pas de ν, et ainsi on obtient une fonction

$$(D_0 \cdot \ldots \cdot D_m) : \widehat{\mathrm{Nef}}(X)^{d-m} \to [0, +\infty[$$

qui est additive en chaque coordonnée. De plus, si $D_0', \dots, D_m'$ sont respectivement des décompositions admissibles de $\overline{L}_0, \dots, \overline{L}_m$ telles que $D_i' \succ D_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$, alors on a

$$(D_0' \cdot \ldots \cdot D_m') \geqslant (D_0 \cdot \ldots \cdot D_m)$$

On définit le *produit d'intersection positive* de $\overline{L}_0, \dots, \overline{L}_m$ comme

$$\langle \widehat{c}_1(\overline{L}_0) \cdot \ldots \cdot \widehat{c}_1(\overline{L}_m) \rangle := \sup_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m \\ D_i \in \Theta(\overline{L}_i)}} D_0 \cdot \ldots \cdot D_m.$$

Comme tous les ensembles $\Theta(\overline{L}_i)$ sont filtrés, l'application

$$\langle \widehat{c}_1(\overline{L}_0) \cdot \ldots \cdot \widehat{c}_1(\overline{L}_m) \rangle : \widehat{\mathrm{Nef}}(X)^{d-m} \to [0, +\infty[$$

est additive en chaque coordonnée. En outre, si les fibrés inversibles hermities $\overline{L}_0, \dots, \overline{L}_m$ sont nefs, alors $\langle \widehat{c}_1(\overline{L}_0) \cdot \ldots \cdot \widehat{c}_1(\overline{L}_m) \rangle$ coïncide au produit d'intersection usuel. Cependent, contrairement au cas usuel, le produit d'intersection positive n'est pas multi-linéaire par rapport à $\overline{L}_0, \dots, \overline{L}_m$ en général.

Si $\overline{L}_0 = \cdots = \overline{L}_m = \overline{L}$, le produit d'auto-intersection positive $\langle \widehat{c}_1(\overline{L}_0) \cdot \ldots \cdot \widehat{c}_1(\overline{L}_m) \rangle$ est noté en abrégé comme $\langle \widehat{c}_1(\overline{L})^{m+1} \rangle$. Comme l'ensemble $\Theta(\overline{L})$ est filtré, on a

$$\langle \widehat{c}_1(\overline{L})^{m+1} \rangle = \sup_{D \in \Theta(\overline{L})} \underbrace{D \cdot \ldots \cdot D}_{m+1 \text{ copies}}.$$

En particulier, si $\overline{L}$ est un fibré inversible hermitien gros, alors

$$\frac{\langle \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} \rangle}{[K : \mathbb{Q}]} = \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}).$$

Considérons maintenant une famille $(\overline{L}_i)_{i=0}^{d-1}$ de $d-1$ fibré inversibles hermitiens sur X. L'additivité de la fonction $\langle \widehat{c}_1(\overline{L}_0) \cdot \ldots \cdot \widehat{c}_1(\overline{L}_{d-1}) \rangle$ nous permet de l'étendre sur le sous-groupe de $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ engendré par $\widehat{\mathrm{Nef}}(X)$. De plus, si $\overline{M}$ est un fibré inversible hermitien effectif dans le sous-groupe de de $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ engendré par $\widehat{\mathrm{Nef}}(X)$, alors

$$\langle \widehat{c}_1(\overline{L}_0) \cdot \ldots \cdot \widehat{c}_1(\overline{L}_{d-1}) \rangle \cdot \widehat{c}_1(\overline{M}) \geqslant 0.$$

Cette observation nous permet d'étendre le domaine de définition du produit d'intersection positive $\langle \widehat{c}_1(\overline{L}_0) \cdot \ldots \cdot \widehat{c}_1(\overline{L}_{d-1}) \rangle$ à $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ et ainsi obtenir un morphisme de groupes de $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ vers $\mathbb{R}$.

Théorème 1.5.4. — *Soit $\pi : X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un morphisme projectif et plat de dimension relative d d'un schéma intègre X vers $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. On suppose que X_K admet un point rationnel. Si $\overline{L}$ est un fibré inversible hermitien sur X qui est gros, alors*

$$D\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) = \frac{\langle \widehat{c}_1(\overline{L})^d \rangle}{[K : \mathbb{Q}]}.$$

En particulier, la fonction volume arithmétique est différentiable en tout point de $\widehat{\mathrm{Big}}(X)$.

La démonstration repose sur l'inégalité de Yuan [**49**, Theorem 2.2] qui implique l'inégalité $D\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) \geqslant \langle \widehat{c}_1(\overline{L})^d \rangle / [K : \mathbb{Q}]$. Le théorème résulte donc du critère de différentiabilité présenté plus haut (lemma 1.5.3 *infra.*).

Signalons que la différentiabilité de la *capacité sectionnelle* (un invariant arithmétique qui est majoré par la fonction volume arithmétique) a été étudiée dans la littérature par plusieur auteurs sous la forme de *pricipe variationnel*, qui a un lien étroit avec le problème d'équidistribution. On revoie les lecteurs dans [**47, 51**] pour le principe variationnel, dans [**49, 3**] pour les généralisations, et dans [**15**] pour une variante ultramétrique. Inspiré par ces travaux, le lien entre la différentiabilité de la fonction volume arithmétique avec le problème d'équidistribution a été étudié dans [**Ch5**]. J'espère que l'étude de différentiabilité de d'autre invariants arithmétiques pourrais conduire aux nouveaux théorèmes d'équidistribution arithmétiques.

La loi de probabilité limite peut s'exprimer en fonction de nombre d'intersection positive. Soient X et $\overline{L}$ comme dans le théorème 1.5.4. Considérons le $\mathcal{O}_K$-algèbre graduée $R(L) := \bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(X, L^{\otimes n})$ munie des normes sup. Le théorème 1.4.1 montre que les variables aléatoires associées aux filtrations par minima des composantes homogènes de $R(L)$ convergent en loi vers une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Il s'avère que la borne supérieure du support de cette mesure est égale à

$$e_{\max}(R(\overline{L}), \mathcal{F}_{\min}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\log\lambda_1(\overline{H^0(X, L^{\otimes n})})}{n}.$$

En outre, pour tout nombre réel a, le fibré inversible hermitien $\overline{L}(-a)$ (voir page 22 pour la notation) est gros si et seulement si $a < e_{\max}(R(\overline{L}), \mathcal{F}_{\min})$ (cf. [**Ch4**, Proposition 3.11]). Si Z est une variable aléatoire qui suit la loi limite, alors pour tout nombre réel a tel que $a < e_{\max}(R(\overline{L}), \mathcal{F}_{\min})$, on a [**Ch5**, Proposition 5.2]

$$\mathbb{P}(Z \leqslant a) = 1 - \frac{\langle \widehat{c}_1(\overline{L}(-a))^d\rangle \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}(1))}{[K:\mathbb{Q}]\mathrm{vol}(L_K)}.$$

Cela suggère que le produit d'intersection positive sera utile dans l'étude probabilistique des fibrés inversibles hermitiens dans le futur.

CHAPITRE 2

COMPTAGE UNIFORME DES POINTS RATIONNELS

2.1. Introduction

L'étude des équations diophantiennes[1] est l'un des domaines les plus anciens de mathématiques. L'approche géométrique relie naturellement les problèmes diophantiens à divers domaines de mathématiques moderns comme par exemple la géométrie algébrique, la topologie et la géométrie différentielle. Cette approche consiste à associer à chaque système d'équations diophantiennes (P) un sous-schéma fermé X d'un espace affine ou projectif (défini sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$) dont l'idéal est engendré par les équations polynomiales dans le système (P). Les solutions entières ou rationnelles du système (P) correpondent alors aux points entiers ou rationnels du schéma X. Il s'avère (souvent conjecturalement) que les propriétés géométirques ou topologiques du schéma X (ou la variété analytique associée à X) déterminent le comportement des solutions entières ou rationnelles de (P).

Dans toute théorie géométrique des problèmes diophantiens, la notion de *hauteur* est un outil essentiel. Elle mesure la complexité des points algébriques (ou plus généralement, des sous-variétés) d'une variété arithmétique. Étant donnée une variété projective définie sur un corps de nombres K, le théorème de Northcott montre que, pour tout nombre réel $B > 0$, l'ensemble

$$S(X;B) := \{P \in X(K) \,|\, H(P) \leqslant B\}$$

est fini, où H est une fonction de hauteur sur $X(K)$. Le cardinale $N(X;B)$ de cet ensemble définit une fonction (de B) qui s'appelle la *fonction de comptage* de X. Le comportement asymptotique de cette fonction lorsque B tend vers l'infini décrit alors la densité des points rationnels de X. Par exemple, $N(X;B) = O(1)$ si et seulement si X n'a qu'un nombre fini de points rationnels.

Parmi de nombreux problèmes concernant la fonction de comptage, la majoration uniforme est un sujet relativement récent et en même temps très étudié depuis ces

[1] i.e. equations polynômiales à coefficients entiers ou rationnels.

dernières années. Ici l'expression « uniforme » signifie que l'on considère toutes les sous-variétés de dimension et degré fixés dans un espace projectif fixé. Un résultat qui a profondément influencé les recherches dans cette direction est dû à Heath-Brown [**28**], qui propose un argument de déterminant (inspiré par [**4, 38**]) à étudier le problème de comptage. On peut résumer cette approche comme la suite. Les monômes de certain degré évalués en une famille de points rationnels dans $S(X;B)$ ayant la même réduction modulo un nombre premier p forment une matrice carrée dont le déterminant est divisible par une grande puissance de p (car les points ont la même réduction modulo p). Donc le déterminant est nul lorsque p est assez grand par rapport à B (car la taille du déterminant peut être contrôlée en fonction de B). Quitte à résoudre le système d'équations linéaires associé à la matrice, on obtient un polynôme non-nul (dont les coefficients forment une solution du système d'équations linéaires) qui définit une hypersurface de X contenant tous les points dans la famille. L'ensemble $S(X;B)$ est recouvert par les hypersurfaces construites de cette façon. Comme on devrait avoir moins de points rationnels dans chaque hypersurface (car la dimension est plus petite), on pourrait espérer une majoration plus précise (par rapport à l'estimé « naïf » en contrôlant le nombre des hypersurfaces qui recouvrent $S(X;B)$.

Le choix du nombre premier p dans l'approche déterminantale est cependent délicat. En effet, le nombre premier p doit être assez grand pour assurer l'annulation du déterminant, tandit que le nombre d'hypersurfaces qui recouvrent X est au moins égal au cardinale de $X(\mathbb{F}_p)$ et donc la majoration devient inintéressante lorsque p est trop grand. Il faut donc maintenir une équilibre entre les contributions de différents facteurs.

Rappelons un résultat démontré par Broberg [**13**], généralisant le théorème 14 de [**28**]. Étant donnée une variété fermée de dimension d et de degré δ plongée dans un espace projectif $\mathbb{P}^n_K$ (où K est un corps de nombres), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k ne dépendant que de n, d, δ, B et ε et tel que

$$k \ll_{n,\delta,\varepsilon} B^{(d+1)/\sqrt[d]{\delta}+\varepsilon},$$

un entier $a \geqslant 1$ ne dépendant que de n, d et ε, ainsi qu'une famille $(F_i)_{i=1}^k$ de polynômes homogènes de degré $\leqslant a$ qui ne s'annulent pas identiquement en X et tels que $S(X;B)$ soit recouvert par les diviseurs $\mathrm{div}(F_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$. La méthode de Broberg repose sur le lemme de Siegel et les bases de Gröbner sous une forme extrinsèque. Il pourrait être difficile d'obtenir des majorations explicites intéressantes pour les constantes a et k par cette méthode.

Compte tenu de la nature géométrique du problème, Bogomolov et Bost ont respectivement suggéré de reformuler l'argument déterminantal dans le langage de la géométrie d'Arakelov. Cette tache est largement accomplie dans [**Ch6, Ch7**]. On remplace la matrice d'évaluation par l'application d'évaluation qui envoie une section globale d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible en ses fibres au-dessus d'une famille de points rationnels. Au lieu de calculer le déterminant de la matrice, on cherche à majorer la hauteur de l'application d'évaluation et puis fait appel à la méthode de pentes. Ce point de vue est standard dans la théorie de pentes à la Bost [**7**] (voir [**8**] pour un survol de cette théorie). Cette approche a deux avantages. Premièrement, la nature intrinsèque de la méthode nous permet de traiter le cas de tout corps de nombres d'une façon uniforme; deuxièmement, les contributions de différents facteurs locaux et globaux sont explicitement séparées de sorte que l'on peut déterminer les constantes figurant dans divers estimés.

Pour obtenir des majorations explicites, plusieurs résultats effectifs de géométrie arithmétique sont développés ou adaptés dans le cadre de la géométrie d'Arakelov, notamment la théorie de forme de Cayley (pour étudier la complexité du lieu de singularité d'une variété arithmétique projective), une minoration explicite de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique (due à David et Philippon [**21**]) et une inégalité de pentes pour une application linéaire à valeurs dans une somme directe de fibrés inversibles hermitiens.

Comme application, on établit une conjecture de Heath-Brown qui prédit que, si C est une courbe projective plane de degré δ, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$N(C;B) \ll_{K,\varepsilon} \delta^{2+\varepsilon}.$$

Cela montre que l'approche de la géométrie d'Arakelov dans l'étude des estimations uniformes de la fonction de comptage est non seulement un choix esthétique mais encore un outil pour compendre le comportement des points rationnels de petite hauteur.

2.2. Hauteurs

Dans ce mémoire, la hauteur que nous utiliseront pour définir la fonction de comptage est la *hauteur arakelovienne*, qui est construite par rapport à un fibré inversible hermitien. Basé sur la nature du problème de comptage, on rappelle dans ce paragraphe la notion de hauteur pour les points et les sous-variétés dans un espace projectif (plutôt que dans une variété arithmétique plus générale) et ses liens avec la théorie de hauteur à la Philippon via la forme de Chow, et les hauteurs successives. On discute aussi les majorations et minorations explicites des hauteurs successives et on présente ensuite une égalité de pentes qui relie la hauteur de sous-variété à celle de point rationnel.

Dans la suite du paragraphe, on fixe un corps de nombres K et on désigne par $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers algébriques dans K.

2.2.1. Hauteur d'un point rationnel. — Soient $n \geqslant 1$ un entier et $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel hermtien de rang $n+1$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Soit $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ l'espace projectif associé à $\mathcal{E}$, c'est-à-dire le $\mathcal{O}_K$-schéma qui représente le foncteur qui associe à tout $\mathcal{O}_K$-schéma $g : S \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ l'ensemble des quotients localement libres de rang 1 de $\pi^*(\mathcal{E})$. Soit $\pi^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}$ l'objet universel de ce foncteur représentable. Le faisceau inversible $\mathcal{L}$ est donc muni des métriques quotients (appelées des métriques de Fubini-Study) et devient un fibré inversible hermitien sur $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

Tout K-point P de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ se relève de façon unique en un $\mathcal{O}_K$-point $\mathcal{P}$. La *hauteur logarithmique* de P est définie comme

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(P) := \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\mathcal{P}^*(\overline{\mathcal{L}})).$$

Sa version *exponentielle* est définie comme

$$H_{\overline{\mathcal{L}}}(P) := \exp([K:\mathbb{Q}]h(P)).$$

La hauteur logarithmique h est invariante par extension finie du corps de nombres K, tandis que la hauteur exponentielle H est relative.

Dans le cas particulier où $\overline{\mathcal{E}}$ est le fibré vectoriel hermitien trivial (c'est-à-dire $\overline{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{O}}_K^{\oplus(n+1)}$), le schéma $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ s'identifie canoniquement à l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. Si $P = (x_0 : \ldots : x_n)$ est un point dans $\mathbb{P}^n(K)$, alors sa hauteur est donnée par la formule

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(P) = \sum_{\mathfrak{p}\in\Sigma_{K,f}} \frac{[K_\mathfrak{p}:\mathbb{Q}_\mathfrak{p}]}{[K:\mathbb{Q}]} \log \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|_\mathfrak{p} + \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\Sigma_{K,\infty}} \frac{[K_\sigma:\mathbb{Q}_\sigma]}{[K:\mathbb{Q}]} \log(|x_0|_\sigma^2 + \cdots + |x_n|_\sigma^2).$$

2.2.2. Hauteurs des sous-variétés. — Plusieurs hauteurs de sous-variété sont utilisées dans ce mémoire. Soit X un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ qui est de dimension d et de degré δ. Rappelons que le *degré* de X est défini comme le nombre d'intersection $\deg(c_1(\mathcal{L}_K)^d \cdot [X])$. Soit $\mathscr{X}$ l'adhérence pour la topologie de Zariski de X dans $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. La *hauteur arakelovienne* de X est définie comme le nombre d'intersection arithmétique

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}\cdot[\mathscr{X}]).$$

En utilisant la forme de Chow, Philippon [**36**] a proposé une autre hauteur pour les sous-variétés. Soient W le K-schéma $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)\times\mathbb{P}(\mathcal{E}_K^\vee)^{d+1}$ et Γ la sous-variété d'incidence de W qui classifie les points $(\xi, u_0, \ldots, u_d)$ tels que $\xi(u_0) = \cdots = \xi(u_d) = 0$. On désigne par $p : W \to \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ et $q : W \to \mathbb{P}(\mathcal{E}_K^\vee)$ les deux projections. Il s'avère que l'intersection ensembliste $\Gamma\cap p^{-1}(X)$ est irréductible, et l'image schématique $q(\Gamma\cap p^{-1}(X))$ (où on considère $\Gamma\cap p^{-1}(X)$ comme un sous-schéma réduit) est une hypersurface de multi-degré $(\delta,\ldots,\delta)$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K^\vee)^{d+1}$, qui correspond alors à un sous-fibré inversible hermitien $\overline{\Phi}_X$ de $S^\delta(\overline{\mathcal{E}}^\vee)^{\otimes(d+1)}$. La *hauteur de Philippon* de X est définie comme

$$h_{\mathrm{Ph}}(X) := -\sum_{\mathfrak{p}\in\Sigma_{K,f}} \frac{[K_\mathfrak{p}:\mathbb{Q}_\mathfrak{p}]}{[K:\mathbb{Q}]}\log\|\phi_X\|_\mathfrak{p} + \sum_{\sigma\in\Sigma_{K,\infty}} \frac{[K_\sigma:\mathbb{Q}_\sigma]}{[K:\mathbb{Q}]}\log M_\sigma(\phi_X),$$

où ϕ_X est un élément non-nul de $\Phi_{X,K}$ (ce dernier est appelé la *forme de Chow* de X), M_σ est l'opérateur d'intégration par rapport à la mesure de Mahler. La hauteur de Philippon peut être comparée à la hauteur arakelovienne (voir Philippon [**37**] et Soulé [**44**]). On a

$$h_{\mathrm{Ph}}(X) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) - \frac{1}{2}\delta(d+1)\mathcal{H}_n,$$

où $\mathcal{H}_n := 1+1/2+\cdots+1/n$ est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série harmonique. Il est parfois plus commode d'utiliser $-\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{\Phi}_X)$ comme une alternative de la hauteur de Philippon (surtout quand on applique la méthode de pentes). D'après [**9**] Proposition 4.3.5 et Theorem 4.3.8, on a

$$0 \leqslant h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) + \widehat{\mu}(\overline{\Phi}_X) + \frac{1}{2}(d+1)\log\binom{n+\delta}{\delta} \leqslant \frac{1}{2}\delta(d+1)\mathcal{H}_n. \tag{2.1}$$

Du point de vue effectif, il est convenable d'utliser les hauteurs successives discutées dans [**39**, §2.2]. Pour tout entier $D \geqslant 1$, soient $E_D := H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{L}^{\otimes D})$ et

$$\eta_{X,D} : E_{D,K} = H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{L}_K^{\otimes D}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}|_X^{\otimes D})$$

l'application d'évaluation. On désigne par F_D la saturation de l'image de $\eta_{X,D}$ dans $H^0(\mathscr{X}, \mathcal{L}|_{\mathscr{X}}^{\otimes D})$. Autrement dit, F_D est le plus grand sous-$\mathcal{O}_K$-module de $H^0(\mathscr{X}, \mathcal{L}|_{\mathscr{X}}^{\otimes D})$ tel que $F_{D,K} = \mathrm{Im}(\eta_{X,D})$. Pour toute place infinie $\sigma \in \Sigma_{K,\infty}$, soit $\|\cdot\|_\sigma$ la norme hermitienne de John associée à la norme sup sur $E_D \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{C}_\sigma$. Rappelons que la norme sup $\|\cdot\|_{\sigma,\sup}$ est définie comme

$$\forall\, s \in E_D \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{C}_\sigma, \quad \|s\|_{\sigma,\sup} := \sup_{x\in\mathbb{P}(\mathcal{E})(\mathbb{C}_\sigma)} \|s\|_{\sigma,\mathrm{FS}}(x),$$

où $\|\cdot\|_{\sigma,\mathrm{FS}}$ est la métrique de Fubini-Study sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}_\sigma)$; la norme de John associée à $\|\cdot\|_{\sigma,\sup}$ est une norme hermitienne sur $E_D \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{C}_\sigma$ telle que

$$\|\cdot\|_{\sigma,\sup} \leqslant \|\cdot\|_\sigma \leqslant \sqrt{r(D)}\|\cdot\|_{\sigma,\sup},$$

où $r(D) = \binom{n+D}{D}$ est le rang de E_D. On munit F_D des normes quotients et ainsi obtient un fibré vectoriel hermitien $\overline{F}_D$. La $D^{\text{ième}}$ *hauteur* de X est définie comme

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}^{(D)}(X) := \frac{\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{F}_D)}{D^{d+1}/(d+1)!}.$$

D'après le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique (cf. [**40**, théorème A]), on a

$$\lim_{D\to\infty} h_{\overline{\mathcal{L}}}^{(D)}(X) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(X).$$

2.2.3. Estimation des hauteurs successives. — Pour pouvoir utiliser les hauteurs successives comme un outil dans le problème de comptage, il est nécessaire d'obtenir ses estimés en terme des hauteurs habituelles de X. En utilisant un résultat de Zhang [**52**, Lemma 6.5] qui compare le minimum essentiel d'une variété à la hauteur, on peut démontrer que

$$\forall D \geqslant 1, \qquad \frac{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}_D)}{D} \leqslant \frac{h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)}{\delta} + \frac{1}{2}\log(n+1). \tag{2.2}$$

Cependant, il est difficile d'obtenir une minoration explicite de $h_{\overline{\mathcal{L}}}^{(D)}(X)$. Le meilleur estimé que l'on connaît est dû à David et Philippon [**21**] que l'on traduit en langage arakelovien comme la suite (cf. [**Ch6**] Theorem 4.8 et Remark 4.9) :

Théorème 2.2.1. — *Soient $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel hermitien de rang $n+1$ sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$*, $\overline{\mathcal{L}}$ le faisceau inversible universel sur $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, muni des métriques de Fubini-Study, et X un sous-schéma fermé intègre de dimension d et de degré δ. Pour tout entier $D \geqslant 2(n-d)(\delta-1)+d+2$, il existe une constante explicite $C(D,n,\overline{\mathcal{E}})$ telle que*

$$\frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} \geqslant \frac{d!}{\delta(2d+2)^{d+1}} h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) - C(D,n,\overline{\mathcal{E}}), \tag{2.3}$$

où $\overline{F}_D$ est le fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ *défini dans la page 33.*

La démonstration du théorème repose sur la théorie des formes de Chow supérieures. Trouver une minoration explicite de $\widehat{\mu}(\overline{F}_D)$ qui est asymptotiquement équivalente à ce que prévu par le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pourrait être un problème difficile.

Dans le cas particulier où le fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{E}}$ est trivial, on peut prendre

$$C(D,n,\overline{\mathcal{O}}_X^{\oplus(n+1)}) = \log(n+1) + 2^d.$$

En outre, pour les petites valeurs de D, on peut « naïvement » minorer $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}_D)$, via l'inégalité de pentes, par $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_D)$, qui est encore minorée par (cf. [**Ch6**] proposition 2.9)

$$D\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{E}}) - \frac{D}{2}\log(n+1),$$

Asymptotiquement cette minoration est sans doute moins bonne que (2.3), mais elle est valable pour tout entier $D \geqslant 1$.

2.2.4. Une égalité de pentes. — Les hauteurs de sous-variété et de point sont reliées par une égalité de pentes (cf. [**Ch7**, §2.1]). Cela pourrait être considéré comme la version arakelovienne de la méthode de déterminant à la Heath-Brown.

Théorème 2.2.2. — *On garde les notations du théorème 2.2.1. Soien $(P_i)_{i\in I}$ une famille de points rationnels distincts de X et $D \geqslant 1$ un entier. On suppose que l'application d'évaluation $f : F_{D,K} \to \bigoplus_{i\in I} P_i^*(\mathcal{L}^{\otimes D})$ est un isomorphisme, alors on a l'égalité*

$$\frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} = \frac{1}{r_1(D)}\Big[\sum_{i\in I} h(P_i) + h(\Lambda^{r_1(D)} f)\Big], \tag{2.4}$$

où $r_1(D)$ est le rang de F_D, et $h(\Lambda^{r_1(D)}f)$ est la hauteur de $\Lambda^{r_1(D)}f$, définie comme

$$h(\Lambda^{r_1(D)}f) := \sum_{v\in\Sigma_K}\frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log\|\Lambda^{r_1(D)}f\|_v.$$

De façon similaire, on peut montrer que (cf. [**Ch6**, Proposition 2.12]), si $(P_i)_{i\in I}$ est une famille (non-nécessairement finie) de points rationnels de X telle que

$$\sup_{i\in I} h(P_i) < \frac{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}_D)}{D} - \frac{1}{2}\log(n+1), \tag{2.5}$$

alors il existe une hypersurfance de degré D dans $\mathbb{P}^n_K$ qui ne contient pas X mais qui contient tous les points rationnels P_i $(i\in I)$.

2.3. Complexité du lieu de singularité

Soit X un sous-schéma intègre dans un espace projectif $\mathbb{P}^n_K$ défini sur un corps de nombres K. Si X est une hypersurface définie par un polynôme $F\in K[T_0,\ldots,T_n]$ qui est homogène de degré d, alors le lieu de singularité de X est déterminé par les équations

$$F=\frac{\partial F}{\partial T_0}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial T_n}=0.$$

Donc son idéal est engendré par $n+2$ polynômes homogènes de hauteur $\leqslant dh(F)$. En général, le lieu de singularité d'une sous-variété peut être décrit par le critère jacobien, pourvu qu'un système de générateurs de l'idéal de X est donné au préalable.

Étant donné un sous-schéma intègre X de $\mathbb{P}^n_K$, d'après les résultats de Nesterenko [**34**] et Brownawell [**14**], on peut construire explicitement un système de générateurs de l'idéal de X à partir de sa forme de Chow. Cela nous permet en principe d'établir un lien entre la hateur de la variété X et celle de son lieu de singularité. Cependant, il s'avère que les degrés des polynômes dans le système de générateurs ainsi obtenu sont souvent beaucoup plus élevés que le degré du sous-schéma X. Par exemple, si X est une hypersurface dans $\mathbb{P}^n_K$ définie par un polynôme homogène F de degré δ, alors le système de générateurs obtenu par la forme de Chow de X contient les polynômes de la forme FG, où G parcourt tous les polynômes homogènes de degré $\delta(n-1)$. Si on applique le critère jacobien à ce système de générateurs pour étudier la complexité du lieu de singuliarité de X, des termes d'erreur supplémentaires apparaissent.

Pour surmonter cette difficulté, on utilise une variante de la forme de Chow que l'on appelle la *forme de Cayley*. Rappelons que dans la définition de la forme de Chow, on considère en fait les coordonnées de Stiefel de la grassmannian. Pour définir la forme de Cayley, on utilise les coordonnées de Plücker.

Soient $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel hermitien de rang $n+1$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ et X un sous-schéma intègre de dimension d et de degré δ de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$. On désigne par $\theta:\mathcal{E}_K^\vee\otimes(\Lambda^{d+1}\mathcal{E}_K)\to$

$\Lambda^d\mathcal{E}_K$ l'homomorphisme de substraction qui envoie $\xi\otimes(x_0\wedge\cdots\wedge x_d)$ en

$$\sum_{i=0}^d(-1)^i\xi(x_i)x_0\wedge\cdots\wedge x_{i-1}\wedge x_{i+1}\wedge\cdots\wedge x_d.$$

Soit $\widetilde{\Gamma}$ la sous-variété de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)\times\mathbb{P}(\Lambda^{d+1}\mathcal{E}_K^\vee)$ qui classifie les points (ξ,α) tels que $\theta(\xi\otimes\alpha)=0$. Soient $\widetilde{p}:\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)\times\mathbb{P}(\Lambda^{d+1}\mathcal{E}_K^\vee)\to\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ et $\widetilde{q}:\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)\times\mathbb{P}(\Lambda^{d+1}\mathcal{E}_K^\vee)\to\mathbb{P}(\Lambda^{d+1}\mathcal{E}_K^\vee)$ les deux projections. L'intersection ensembliste $\widetilde{\Gamma}\cap\widetilde{p}^{-1}(X)$ est irréductible. En outre, si on considère $\widetilde{\Gamma}\cap\widetilde{p}^{-1}(X)$ comme un sous-schéma réduit de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)\times\mathbb{P}(\Lambda^{d+1}\mathcal{E}_K^\vee)$, alors l'image schématique $\widetilde{q}(\widetilde{\Gamma}\cap\widetilde{p}^{-1}(X))$ est une hypersurface de degré δ de $\mathbb{P}(\Lambda^{d+1}\mathcal{E}_K^\vee)$, qui correspond à un sous-fibré inversible hermitien $\overline{\Psi}_X$ de $S^\delta(\Lambda^{d+1}\overline{\mathcal{E}})$. L'espace vectoriel (de rang 1) $\Psi_{X,K}$ est appelé la *forme de Cayley* de X.

On peut reproduire la forme de Chow de X à partir de la forme de Cayley. Si ψ_X est un élément non-nul de $\Psi_{X,K}$ (considéré comme un polynôme homogène de degré δ sur $\Lambda^{d+1}\mathcal{E}_K^\vee$), alors le polynôme multi-homogène ψ_X de multi-degré $(\delta,\ldots,\delta)$ sur $\mathcal{E}_K^\vee$ défini comme

$$\psi_X(x_0,\ldots,x_d):=\varphi_X(x_0\wedge\cdots\wedge x_d)$$

engendre la forme de Chow $\Phi_{X,K}$ (comme espace vectoriel sur K).

Le degré d'Arakelov de la forme de Cayley est aussi étroitement lié à la hauteur de X. On a

$$0\leqslant h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)+\widehat{\mu}(\overline{\Psi}_X)+\frac{1}{2}\log\binom{N+\delta}{\delta}\leqslant\frac{1}{2}\delta\mathcal{H}_N,$$

où

$$N=\mathrm{rg}(\Lambda^{d+1}\mathcal{E}_K)-1=\binom{n+1}{d+1}-1\quad\text{ et }\quad\mathcal{H}_N=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}.$$

En utilisant la forme de Cayley, on peut construire un système de générateurs de X qui sont de degré δ. Soit ψ_X un élément non-nul de $\Psi_{X,K}$, considéré comme un polynôme homogène de degré δ sur $\Lambda^{d+1}\mathcal{E}_K^\vee$. Soient $x,y_0,\cdots,y_d$ des variables dans $\mathcal{E}_K$ et ξ une variable dans $\mathcal{E}_K^\vee$. Pour tout $i=0,1\cdots,d$, soit $z_i=\xi(x)y_i-\xi(y_i)x$. Comme

$$\begin{aligned}&z_0\wedge\cdots\wedge z_d\\&=\xi(x)^{d+1}y_0\wedge\cdots\wedge y_d-\sum_{i=0}^d\xi(x)^d\xi(y_i)y_0\wedge\cdots\wedge y_{i-1}\wedge x\wedge y_{i+1}\wedge\cdots\wedge y_d\\&=\xi(x)^d\Big(\xi(x)y_0\wedge\cdots\wedge y_d-\sum_{i=0}^d\xi(y_i)y_0\wedge\cdots\wedge y_{i-1}\wedge x\wedge y_{i+1}\wedge\cdots\wedge y_d\Big),\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\psi_{X,K}(z_0\wedge\cdots\wedge z_d)=\xi(x)^{\delta d}\psi_{X,K}\Big(&\xi(x)y_0\wedge\cdots\wedge y_d\\&-\sum_{i=0}^d\xi(y_i)y_0\wedge\cdots\wedge y_{i-1}\wedge x\wedge y_{i+1}\wedge\cdots\wedge y_d\Big).\end{aligned}$$

En remplaçant les variables $x, y_0, \cdots, y_d$ dans

$$\psi_{X,K}\Big(\xi(x)y_0 \wedge \cdots \wedge y_d - \sum_{i=0}^{d} \xi(y_i)y_0 \wedge \cdots \wedge y_{i-1} \wedge x \wedge y_{i+1} \wedge \cdots \wedge y_d\Big),$$

par des valeurs dans leurs domaines de définition, on obtien un système $I_{X,K}$ de polynômes de degré δ sur $\mathcal{E}_K^\vee$, qui définit un sous-schéma $\widetilde{X}$ de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$. D'après [**34**, Lemma 11], le schéma coïncide avec X dans un ouvert contenant le lieu de régularité de X. En outre, on a $\widetilde{X}_{\mathrm{red}} = X$.

Soit I_X le plus grand sous-$\mathcal{O}_K$-module de $S^\delta(\mathcal{E})$ tel que $I_X \otimes_{\mathcal{O}_K} K = I_{X,K}$. La pente minimale de $\overline{I}_X$ (considéré comme un sous-fibré vectoriel hermitien de $S^\delta(\overline{\mathcal{E}})$) peut être minorée en fonction de la hauteur de X. En effet, il existe une constante explicite $C_1(\overline{\mathcal{E}}, d, \delta)$ telle que (cf. [**Ch6**, Proposition 3.6])

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{I}_X) \geqslant -h_{\overline{L}}(X) - C_1(\overline{\mathcal{E}}, d, \delta).$$

Si on applique le critère jacobien à $I_{X,K}$, on obtient le résultat suivant qui décrit la complexité du lieu de sigularité de X (cf. [**Ch6**] Theorem 3.10).

Théorème 2.3.1. — *Soient X un sous-schéma intègre de dimension d et de degré δ de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ et $\mathscr{X}$ l'adhérence Zariski de X dans $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Il existe un sous-fibré vectoriel hermitiel $\overline{M}$ de $S^{(\delta-1)(n-d)}\overline{\mathcal{E}}$ tel que*

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{M}) \geqslant -(n-d)h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) - C_3(\overline{\mathcal{E}}, d, \delta)$$

et que le sous-schéma de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ défini par l'annulation de M contiennent le lieu de singularité de chaque fibre de $\mathscr{X}$ mais ne contient pas le point générique de X, où $C_3(\overline{\mathcal{E}}, d, \delta)$ est une constante explicite qui vérifie $C_3(\overline{\mathcal{E}}, d, \delta) \ll_{\overline{\mathcal{E}},d} \delta$.

2.4. Hypersurfaces auxiliaires

Soient $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel hermitien de rang $n+1$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ et X un sous-schéma intègre de dimension $d \geqslant 1$ et de degré δ de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$. On désigne par $\mathscr{X}$ l'adhérence Zariski de X dans $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ et par $\mathcal{L}$ le faisceau inversible universel de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de points rationnels de X. Pour tout entier $D \geqslant 1$, soient $F_{D,K}$ l'image de $H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{L}_K^{\otimes D}) \to H^0(X, \mathcal{L}_K^{\otimes D}|_X)$ et

$$f_D : F_{D,K} \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} \mathcal{L}_K^{\otimes D}|_{P_i}$$

l'application d'évaluation. Si l'application f_D n'est pas injective, alors il existe une section $s \in E_{D,K} := H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{L}_K^{\otimes D})$ qui ne s'annule pas identiquement sur X et dont le diviseur contient tous les points P_i $(i \in I)$. Le diviseur de s est une hypersurface de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ que l'on appelle une *hypersurface auxiliaire* qui recouvre la famille $(P_i)_{i\in I}$.

Dans le cas où l'application est injective, il existe un sous-ensemble $I^{(0)} \subset I$ de cardinale $r_1(D) := \mathrm{rg}(F_{D,K})$ tel que l'application d'évaluation

$$f_D^{(0)} : F_{D,K} \longrightarrow \bigoplus_{i \in I^{(0)}} \mathcal{L}_K^{\otimes D}|_{P_i}$$

soit un isomorphisme. Le théorème 2.2.2 s'applique et on en déduit

$$\frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} = \frac{1}{r_1(D)} \Big[\sum_{i \in I_0} h(P_i) + h(\Lambda^{r_1(D)} f_D^{(0)}) \Big], \tag{2.6}$$

Cependent, l'égalité (2.6) ne peut pas être vraie lorsque la hauteur $h(\Lambda^{r_1(D)} f_D^{(0)})$ est suffisamment négative. L'une des conditions qui conduisent à une valeur très négative de $h(\Lambda^{r_1(D)} f_D^{(0)})$ est que les points $(P_i)_{i \in I_0}$ sont assez proches pour une (ou plusieurs) métrique(s). Dans le cas d'une ultramétrique (associée à une place finie $\mathfrak{p}$), cela revient à dire que les points $(P_i)_{i \in I_0}$ ont la même réduction modulo de certain épaississement d'un $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$-point de $\mathscr{X}$.

Soient $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$ et ξ un point rationnel de $\mathscr{X}_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}$. On désigne par $\mathcal{O}_\xi$ l'anneau local de $\mathscr{X}$ en ξ et par $\mathfrak{m}_\xi$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_\xi$. La fonction de Hilbert-Samuel locale est définie comme

$$H_\xi(k) := \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}} \Big((\mathfrak{m}_\xi / \mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi)^k / (\mathfrak{m}_\xi / \mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi)^{k+1} \Big) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

On désigne par μ_ξ la *multiplicité* de l'anneau local $\mathcal{O}_\xi / \mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi$. On a

$$H_\xi(k) = \frac{\mu_\xi}{(d-1)!} k^{d-1} + o(k^{d-1}).$$

Soit $(q_\xi(m))_{m \geqslant 1}$ la suite croissante d'enties positifs tels que tout entier $k \in \mathbb{N}$ apparaisse exactement $H_\xi(k)$ fois. Soit $(Q_\xi(m))_{m \geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de $(q_\xi(m))_{m \geqslant 1}$:

$$Q_\xi(m) := q_\xi(1) + \cdots + q_\xi(m).$$

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$ et si $a \geqslant 1$ est un entier, on désigne par $A_{\mathfrak{p}}^{(a)}$ l'anneau local artinien $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}^a \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$. La discussion au-dessus peut être résumé en un théorème comme la suite (cf. [**Ch7**, Theorem 3.1]).

Théorème 2.4.1. — *Soit $(\mathfrak{p}_j)_{j \in J}$ une famille finie d'idéaux maximaux de $\mathcal{O}_K$ et $(a_j)_{j \in J}$ une famille d'entiers $\geqslant 1$. Pour tout $j \in J$, soit η_j un point dans $\mathscr{X}(A_{\mathfrak{p}_j}^{a_j})$ dont la réduction modulo $\mathfrak{p}_j$ est notée comme ξ_j. On suppose que les points $(\xi_j)_{j \in J}$ sont distincts. Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de points rationnels de $\mathscr{X}_K$ telle que, pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, la réduction de P_i modulo $\mathfrak{p}_j^{a_j}$ s'identifie à η_j. On suppose en outre que*

$$\sup_{i \in I} h(P_i) < \frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} - \frac{\log r_1(D)}{2D} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{j \in J} \frac{Q_{\xi_j}(r_1(D))}{D r_1(D)} \log N_{\mathfrak{p}_j}^{a_j}, \tag{2.7}$$

où $N_{\mathfrak{p}_j}$ est le cardinale de $\mathcal{O}_K / \mathfrak{p}_j$. Il existe alors une section $s \in E_{D,K}$ qui n'est pas identiquement nulle sur X et telle que $(P_i)_{i \in I} \subset \mathrm{div}(s)$.

L'idée de considérer plusieurs places finies est due à Salberger [**43**, Theorem 3.2]. Ici le point original est de considérer les épaississements des points dans les fibres spéciales. Cela nous permet de montrer que la dépendance par rapport au corps de nombres K de certaines constantes figurant dans la majoration explicite de la fonction de comptage peut être réduite à la dépendance par rapport à $[K:\mathbb{Q}]$.

Pour obtenir des estimations explicites de la fonction de comptage à partir du théorème précédent, les minorations explicites de $\widehat{\mu}(\overline{F}_D)$, $-\log r_1(D)$ et des $Q_{\xi_j}(r_1(D))$ sont nécessaires. Ces trois termes correspondent respectivement aux contributions de l'arithmétrique, la géométrie algébrique globale, et la géométrie algébrique locale. Rappelons que l'on a discuté dans le théorème 2.2.1 une minoration explicite de $\widehat{\mu}(\overline{F}_D)$ due à David et Philippon. En outre, une majoration explicite de $r_1(D)=\mathrm{rg}(F_D)$ est obtenue dans un travail de Chardin [**16**] : pour tout entier $D\geqslant 1$, on a

$$\mathrm{rg}(F_D)\leqslant \delta\binom{D+d}{d}.$$

Soient $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$ et ξ un point rationnel de $\mathscr{X}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$. Si ξ est un point régulier, alors on a $H_\xi(k)=\binom{k+d-1}{d-1}$ pour tout entier $k\geqslant 1$, et donc (cf. [**Ch7**, Proposition 3.5])

$$Q_\xi(r)>(d!)^{\frac{1}{d}}\frac{d}{d+1}r^{1+\frac{1}{d}}-\frac{d+3}{2d+2}dr. \tag{2.8}$$

Cependent, dans le cas où le point ξ n'est pas régulier, la majoration explicite de la fonction de Hilbert-Samule locale est un problème très délicat. Ce problème a été discuté dans [**45**] dans le cas où $\mathscr{X}$ est Cohen-Macaulay, mais les majorations obtenues dans ce travail sont loins d'être optimales pour avoir des applications intéressantes dans le problème de comptage. Toutefois, dans le cas particulier où $d=1$ et le point ξ est Cohen-Macaulay[(2)], un résultat de Lipman [**31**, Theorem 1.9] montre que $H_\xi(k)\leqslant\mu_\xi$ quel que soit $k\in\mathbb{N}$, où μ_ξ est la multiplicité de ξ. On en déduit

$$Q_\xi(r)\geqslant\frac{r^2}{2\mu_\xi}-\frac{r}{2\mu_\xi}. \tag{2.9}$$

Ces estimations explicites conduisent aux résultats « prêts à utiliser » comme la suite (pour simplifier les constantes, on suppose que $\overline{\mathcal{E}}=\overline{\mathcal{O}}_K^{\oplus(n+1)}$ est trivial).

Théorème 2.4.2. — *Soient $(\mathfrak{p}_j)_{j\in J}$, $(\xi_j)_{j\in J}$, $(a_j)_{j\in J}$, $(\eta_j)_{j\in J}$ et $(P_i)_{i\in I}$ comme dans le théorème précédent. On suppose que les points $(\xi_j)_{j\in J}$ sont distincts, et que chaque P_i admet, pour tout $j\in I$, η_j comme réduction modulo $A_{\mathfrak{p}_j}^{(a_j)}$. Soit en outre $\varepsilon>0$.*

(2) Autrement dit, l'anneau local $\mathcal{O}_\xi/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi$ est de dimension 1, et l'idéal $\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi$ contient un non-diviseur de zéro de $\mathcal{O}_\xi/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi$.

(1) Si les points $(\xi_j)_{j\in J}$ sont réguliers, et si

$$\sum_{j\in J}\log N_{\mathfrak{p}_j}^{a_j} \geqslant (1+\varepsilon)\Big(\log B + [K:\mathbb{Q}]\log(n+1)\Big)\delta^{-\frac{1}{d}}\frac{d+1}{d}, \tag{2.10}$$

alors, pour tout entier D vérifiant

$$D > (\varepsilon^{-1}+1)\Big(\delta^{-\frac{1}{d}}(d+3)/2+\delta-2\Big), \tag{2.11}$$

il existe une hypersurface de degré D dans $\mathbb{P}^n_K$ qui contient la famille $(P_i)_{i\in I}$ mais ne contient pas le point générique de X.

(2) Si $\mathscr{X}$ est Cohen-Macaulay, $d=1$ et si

$$\sum_{j\in J}\frac{\log N_{\mathfrak{p}_j}^{a_j}}{\mu_{\xi_j}} \geqslant (1+\varepsilon)\frac{2}{\delta}\Big(\log B + [K:\mathbb{Q}]\log(n+1)\Big), \tag{2.12}$$

alors, pour tout entier D vérifiant

$$D > (1+\varepsilon^{-1})\Big(\delta-2+\delta^{-1}\Big), \tag{2.13}$$

il existe une hypersurface de degré D dans $\mathbb{P}^n_K$ qui contient la famille $(P_i)_{i\in I}$ mais ne contient pas le point générique de X.

2.5. Applications au problème de comptage

Soient $n \geqslant 1$ un entier et $\overline{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{O}}_K^{\oplus(n+1)}$ le fibré vectoriel hermitien trivial de rang $n+1$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Soit $\overline{\mathcal{L}}$ le faisceau inversible universel sur $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, muni des métriques de Fubini-Study. Le problème de comptage explicite consite à touver une majoration explicite du cardinale de

$$S(X;B) := \{P\in X(K) \mid H_{\overline{\mathcal{L}}}(P)\leqslant B\}.$$

Rappelons qu'un argument de projection linéaire montre qu'il y a un revêtement de X sur $\mathbb{P}^d$ dont le nombre de couches est partout $\leqslant \delta$. De plus, la hauteur de point rationnel diminue lorsque l'on prend la projection. Par conséquent, on a

$$\#S(X;B) \leqslant \delta\#S(\mathbb{P}^d;B) \ll_K B^{d-1}.$$

Pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ et tout entier $a\geqslant 1$, on désigne par $A_{\mathfrak{p}}^{(a)}$ l'anneau local artinien $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^a\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$. Pour tout $\eta\in\mathscr{X}(A_{\mathfrak{p}}^{(a)})$, on désigne par $S(X;B,\eta)$ le sous-ensemble de $S(X;B)$ des points dont les réductions modulo $\mathfrak{p}^a$ coïncident avec η. L'ensemble $S(X;B)$ s'écrit alors comme une union disjointe des $S(X;B,\eta)$.

D'après le théorème 2.2.2, si η modulo $\mathfrak{p}$ est un point régulier de $\mathscr{X}_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}$ et si $N_{\mathfrak{p}}^a$ est suffisamment grand, alors $S(X;B,\eta)$ est contenu dans une hypersurface de « petit » degré qui coupe X. Rappelons que le critère jacobien montre que, si η est un point dans $\mathscr{X}(A_{\mathfrak{p}}^{(a)})$ dont la réduction modulo $\mathfrak{p}$ est un point régulier de $\mathscr{X}_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}$, alors tous les points rationnels dans $S(X;B,\eta)$ sont réguliers. Il est donc commode d'introduire l'expression $S_1(X;B)$ pour désigner l'ensemble des points réguliers dans

$S(X;B)$. Le lieu de singularité de X ayant pour dimension $< d$, la densité de ses points rationnels peut être estimée par le théorème de Schanuel, qui conduit à un terme négligeable dans la majoration de $\#S(X;B)$.

Il est cependent nécessaire de souligner que tout point rationnel de X n'a pas une réduction modulo $\mathfrak{p}$ qui est un point régulier de $\mathscr{X}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$. Il est donc utile d'introduire une famille de places finies de K qui assure que, pour tout $x \in S_1(X;B)$, il existe au moins une place dans la famille telle que la réduction de x modulo cette place soit régulier. On utilise l'expression $S_1(X;B,\mathfrak{p})$ pour désigner le sous-ensemble de $S_1(X;B)$ des points x dont la réduction modulo $\mathfrak{p}$ est un point régulier de $\mathscr{X}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$. Soient $N_0 > 0$ (qui joue le rôle d'un paramètre à optimiser) et r la partie entière de

$$\frac{(n-d)(\delta-1)\log B + \big((n-d)h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) + C_3\big)[K:\mathbb{Q}]}{\log N_0} + 1, \tag{2.14}$$

où $C_3 = C_3(\overline{\mathcal{E}}, d, \delta)$ est la constante introduite dans le théorème 2.3.1. On peut démontrer que (cf. [**Ch7**, Lemma 4.1]), si $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ sont des places finies distinctes de K telles que $N_{\mathfrak{p}_i} \geqslant N_0$ pour tout i, alors

$$S_1(X;B) = \bigcup_{i=1}^r S_1(X;B,\mathfrak{p}_i).$$

On en déduit ainsi le résultat suivant :

Théorème 2.5.1. — *Soient $\varepsilon > 0$ et D un entier tel que*

$$D > \max\Big\{(\varepsilon^{-1}+1)\big(\delta^{-\frac{1}{d}}(d+3)/2 + \delta - 2\big), 2(n-d)(\delta-1) + d + 4\Big\}.$$

Il existe une constante explicite $C(\varepsilon,\delta,n,d,K)$ telle que, pour tout $B \in \mathbb{R}$, $B \geqslant e^{\varepsilon}$, l'ensemble $S_1(X;B)$ est recouvert par au plus $C(\varepsilon,\delta,n,d,K)B^{(1+\varepsilon)\delta^{-\frac{1}{d}}(d+1)}$ hypersurfaces de degré D qui ne contiennent pas X.

La constante $C(\varepsilon,\delta,n,d,K)$ vérifie la relation

$$\log C(\varepsilon,\delta,n,d,K) \ll_{n,d,[K:\mathbb{Q}],\varepsilon} \delta^{1+1/d}. \tag{2.15}$$

Dans le cas particulier où $d=1$, on obtient que, pour tout nombre $B \geqslant \mathrm{e}^{\varepsilon}$, on a

$$\#S(X;B) \leqslant (C(\varepsilon,\delta,n,1,K)+1)\delta D B^{(1+\varepsilon)2/\delta}.$$

Le théorème 2.5.1 est une généralisation de certains résultats de Heath-Brown [**28**, Theorem 14] et Broberg [**13**, Theorem 1] au sens que le nombre des hypersurfaces recouvrant est explicit. Il ne conduit pas à une amélioration de l'exposant de B. La souplesse de la méthode (notamment le théorème 2.2.2) est cependant remarquable : elle permet de considerer différentes façons de regrouper les points dans $S(X;B)$ d'une manière uniforme. Cela est essentiel pour déterminer la nature de la dépendence de $C(\varepsilon,\delta,n,d,K)$ par rapport à K. Avec le choix initial de Heath-Brown, l'occurence du discrimiant de K semble d'être inévitable dans l'estimé du nombre d'hypersurfaces recouvrantes.

Dans le cas d'une courbe plane, cette méthode permet d'obtenir des majorations fines pour le nombre de points rationnel de petites hauteurs (cf. [**Ch7**, Theorem 5.1]).

Théorème 2.5.2. — *On suppose que X est une courbe plane. Soit*

$$D = \lfloor 2(\delta - 2 + \delta^{-1}) \rfloor + 1.$$

Pour tout nombre réel B tel que $e < B < e^{\delta^2}$, on a

$$\#S(X;B) \leqslant C_4(K,B)\delta D, \tag{2.16}$$

où $C_4(K,B)$ est une constante explicite telle que $C_4(K,B) \ll_K B^{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

La démonstration repose sur la deuxième partie du théorème 2.2.2. Le point clé est d'introduire une famille $(\mathfrak{p}_i)_{i=1}^r$ de places finies de K et de considérer les familles

$$S(X;B,(\xi_i)_{i=1}^r) := \bigcap_{i=1}^r S(X;B,\xi_i),$$

où $(\xi_i)_{i=1}^r \in \prod_{i=1}^r \mathscr{X}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}_i})$. L'ensemble $S(X;B)$ est alors regroupé comme

$$S(X;B) = \left[\bigcup_{i=1}^r \bigcup_{\substack{\xi \in \mathscr{X}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}_i}) \\ \mu_\xi \leqslant \delta/\sqrt{\log B}}} S(X;B,\xi) \right] \cup \bigcup_{\substack{(\xi_i)_{i=1}^r \in \prod_{i=1}^r \mathscr{X}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}_i}) \\ \mu_{\xi_i} > \delta/\sqrt{\log B}}} S(X;B,(\xi_i)_{i=1}^r). \tag{2.17}$$

D'après le théorème 2.2.2, chaque famille de la forme $S(X;B,\xi)$ ou $S(X;B,(\xi_i)_{i=1}^r)$ est contenu dans une hypersurface de degré D qui ne contient pas X pour différentes raisons, celui-là est parce que ξ admet une petite multiplicité, tandis que celui-ci provient d'une famille $(\xi_i)_{i=1}^r$ de plusieurs réductions.

Le théorème précédent appliqué au cas où $B = \delta$ montre que $\#S(X;\delta) \ll_K \delta^{2+\varepsilon}$. Cela donne une réponse confirmative à une conjecture de Heath-Brown (cf. [**20**, Question 27]). On termine ce chapitre par un exemple (cf. [**41**]) d'une courbe plane dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ définie par l'équation

$$F(T_0,T_1,T_2) = \left(\prod_{k=1}^{\delta} (T_1 - kT_0)^2 \right) + \left(\prod_{k=1}^{\delta} (T_2 - kT_0)^2 \right).$$

Cette courbe a pour degré 2δ et admet δ^2 points rationnels (de hauteur $\leqslant \delta$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Abbes & T. Bouche – "Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique"", *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier* **45** (1995), no. 2, p. 375–401.

[2] W. Banaszczyk – "Inequalities for convex bodies and polar reciprocal lattics in $\mathbf{R}^n$", *Discrete & Computational Geometry. An International Journal of Mathematics and Computer Science* **13** (1995), no. 2, p. 217–231.

[3] R. Berman & S. Boucksom – "Growth of balls of holomorphic sections and energy at equilibrium", *Inventiones Mathematicae* **181** (2010), no. 2, p. 337–394.

[4] E. Bombieri & J. Pila – "The number of integral points on arcs and ovals", *Duke Mathematical Journal* **59** (1989), no. 2, p. 337–357.

[5] T. Borek – "Successive minima and slopes of Hermitian vector bundles over number fields", *Journal of Number Theory* **113** (2005), no. 2, p. 380–388.

[6] J.-B. Bost – "Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz)", *Astérisque* (1996), no. 237, p. Exp. No. 795, 4, 115–161, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/1995.

[7] ______, "Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields", *Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques* (2001), no. 93, p. 161–221.

[8] J.-B. Bost – "Evaluation maps, slopes, and algebraicity criteria", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Madrid, 2006)* (Switzerland), European Mathematical Society, 2007, p. 537–562.

[9] J.-B. Bost, H. Gillet & C. Soulé – "Heights of projective varieties", *Journal of the American Mathematical Society* **7** (1994), no. 4, p. 903–1027.

[10] J.-B. Bost & K. Künnemann – "Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic schemes. I. Geometry of numbers", *Advances in Mathematics* **223** (2010), no. 3, p. 987–1106.

[11] S. Boucksom – "On the volume of a line bundle", *International Journal of Mathematics* **13** (2002), no. 10, p. 1043–1063.

[BC] S. Boucksom & H. Chen – "Okounkov bodies of filtered linear series", à paraître dans *Compositio Mathematica*, 2009.

[12] S. Boucksom, C. Favre & M. Jonsson – "Differentiability of volumes of divisors and a problem of Teissier", *Journal of algebraic geometry* **18** (2009), no. 2, p. 279–308.

[13] N. Broberg – "A note on a paper by R. Heath-Brown: "The density of rational points on curves and surfaces" [Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 2, 553–595]", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **571** (2004), p. 159–178.

[14] W. D. Brownawell – "Applications of Cayley-Chow forms", in *Number theory (Ulm, 1987)*, Lecture Notes in Math., vol. 1380, Springer, New York, 1989, p. 1–18.

[15] A. Chambert-Loir – "Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. [Crelle's Journal]* **595** (2006), p. 215–235.

[16] M. Chardin – "Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique", *Bulletin de la Société Mathématique de France* **117** (1989), no. 3, p. 305–318.

[17] H. Chen – "Positivité en géométrie algébrique et en géométrie d'Arakelov : application à l'algébrisation et à l'étude asymptotique des polygones de Harder-Narasimhan", Thèse de l'Ecole Polytechnique, Décembre 2006.

[Ch3] ———, "Convergence des polygones de Harder-Narasimhan", *Mémoires de la Société Mathématique de France* **120** (2010), p. 1–120.

[18] ———, "Positive degree and arithmetic bigness", 2008, `arXiv:0803.2583`.

[Ch4] ———, "Arithmetic Fujita approximation", *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **43** (2010), no. 4, p. 555–578.

[Ch5] ———, "Differentiability of the arithmetic volume function", à paraître dans *Journal of the London Mathematical Society*, 2010.

[Ch6] ———, "Explicit uniform estimation of rational points I. Estimation of heights", à paraître dans *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 2009.

[Ch7] ———, "Explicit uniform estimation of rational points II. Hypersurface coverings", à paraître dans *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 2009.

[19] C. Christensen & W. Gubler – "Der relative Satz von Schanuel", *Manuscripta Mathematica* **126** (2008), no. 4, p. 505–525.

[20] Colliot-Thélène & al. – "Report on the Workshop "Rational and integral points on higher dimensional varieties"", 2002.

[21] S. David & P. Philippon – "Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores", *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV* **28** (1999), no. 3, p. 489–543.

[22] T. Fujita – "Approximating Zariski decomposition of big line bundles", *Kodai Mathematical Journal* **17** (1994), no. 1, p. 1–3.

[23] É. Gaudron – "Pentes de fibrés vectoriels adéliques sur un corps globale", *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **119** (2008), p. 21–95.

[24] ———, "Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés", *Manuscripta Mathematica* **130** (2009), no. 2, p. 159–182.

[25] H. Gillet & C. Soulé – "On the number of lattice points in convex symmetric bodies and their duals", *Israel Journal of Mathematics* **74** (1991), no. 2-3, p. 347–357.

[26] H. Gillet & C. Soulé – "An arithmetic Riemann-Roch theorem", *Inventiones Mathematicae* **110** (1992), no. 3, p. 473–543.

[27] D. Grayson – "Reduction theory using semistability", *Commentarii Mathematici Helvetici* **59** (1984), no. 4, p. 600–634.

[28] D. R. Heath-Brown – "The density of rational points on curves and surfaces", *Annals of Mathematics. Second Series* **155** (2002), no. 2, p. 553–595.

[29] K. Kaveh & A. G. Khovanskii – "Algebraic equations and convex bodies", à paraître dans Perspectives in Analysis, Topology and Geometry, Birkhäuser series "Progress in Mathematics", 2009.

[30] R. Lazarsfeld & M. Mustaţă – "Convex bodies associated to linear series", *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **42** (2009), no. 5, p. 783–835.

[31] J. Lipman – "Stable ideals and Arf rings", *American Journal of Mathematics* **93** (1971), p. 649–685.

[32] A. Moriwaki – "Arithmetic height functions over finitely generated fields", *Inventiones Mathematicae* **140** (2000), no. 1, p. 101–142.

[33] ——, "Continuity of volumes on arithmetic varieties", *Journal of algebraic geometry* **18** (2009), no. 3, p. 407–457.

[34] J. V. Nesterenko – "Estimate of the orders of the zeroes of functions of a certain class, and their application in the theory of transcendental numbers", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* **41** (1977), no. 2, p. 253–284, 477.

[35] A. Okounkov – "Brunn-Minkowski inequality for multiplicities", *Inventiones Mathematicae* **125** (1996), no. 3, p. 405–411.

[36] P. Philippon – "Critères pour l'indépendance algébrique", *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1986), no. 64, p. 5–52.

[37] ——, "Sur des hauteurs alternatives. I", *Mathematische Annalen* **289** (1991), no. 2, p. 255–283.

[38] J. Pila – "Density of integral and rational points on varieties", *Astérisque* (1995), no. 228, p. 4, 183–187, Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992).

[39] H. Randriambololona – "Hauteurs pour les sous-schémas et exemples d'utilisation de méthodes arakeloviennes en théorie de l'approximation diophantienne", Thèse de l'Université Paris XI, UFR Scientifique d'Orsay, Janvier 2002.

[40] ——, "Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les faisceaux cohérents", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **590** (2006), p. 67–88.

[41] G. Rémond – "Nombre de points rationnels des courbes", *Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series* **101** (2010), no. 3, p. 759–794.

[42] R. Rumely, C. F. Lau & R. Varley – "Existence of the sectional capacity", *Memoirs of the American Mathematical Society* **145** (2000), no. 690, p. viii+130.

[43] P. Salberger – "On the density of rational and integral points on algebraic varieties", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **606** (2007), p. 123–147.

[44] C. Soulé – "Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants", *Astérisque* (1991), no. 198-200, p. 355–371 (1992), Journées Arithmétiques, 1989 (Luminy, 1989).

[45] V. Srinivas & V. Trivedi – "On the Hilbert function of a Cohen-Macaulay local ring", *Journal of Algebraic Geometry* **6** (1997), no. 4, p. 733–751.

[46] U. Stuhler – "Eine Bemerkung zur Reduktionstheorie quadratischen Formen", *Archiv der Mathematik* **27** (1976), p. 604–610.

[47] L. Szpiro, E. Ullmo & S. Zhang – "Équirépartition des petits points", *Inventiones Mathematicae* **127** (1997), no. 2, p. 337–347.

[48] S. Takagi – "Fujita's approximation theorem in positive characteristics", *Journal of Mathematics of Kyoto University* **47** (2007), no. 1, p. 179–202.

[49] X. Yuan – "Big line bundles over arithmetic varieties", *Inventiones Mathematicae* **173** (2007), no. 3, p. 603–649.

[50] ———, "On volumes of arithmetic line bundles", *Compositio Mathematica* **145** (2009), no. 6, p. 1447–1464.

[51] S.-W. Zhang – "Equidistribution of small points on abelian varieties", *Annals of Mathematics. Second Series* **147** (1998), no. 1, p. 159–165.

[52] S. Zhang – "Positive line bundles on arithmetic varieties", *Journal of the American Mathematical Society* **8** (1995), no. 1, p. 187–221.