CHAPITRE I

INTRODUCTION AUX THÉORÈMES DE HILBERT-SAMUEL ARITHMÉTIQUES

par Huayi Chen

Table des matières

1. Introduction

En géométrie algébrique, un théorème de Hilbert-Samuel au sens général consiste à décrire le comportement asymptotique d'un anneau gradué par $\mathbb{N}$. Par exemple, étant donnée une algèbre graduée $R_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ sur un corps de base k, telle que chaque composante homogène R_n soit de rang fini sur k, la *fonction de Hilbert* de $R_\bullet$ est définie comme l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui envoie $n \in \mathbb{N}$ sur le rang de R_n sur k. Le théorème de Hilbert-Samuel dans ce cadre-là affirme que, si $R_\bullet$ est engendrée comme k-algèbre par R_1, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[T]$ tel que $P(n) = \mathrm{rg}_k(R_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Ce résultat peut être obtenu en utilisant la méthode classique de dévissage.

Le théorème de Hilbert-Samuel est aussi valable pour un anneau gradué (non nécessairement une algèbre sur un corps) $R_\bullet$ engendré comme R_0-algèbre par R_1, tel que chaque composante homogène R_n soit un R_0-module de longueur finie (voir §1.1 du chapitre 1 *infra*), où on considère la fonction qui envoie $n \in \mathbb{N}$ sur la longueur de R_n (appelée *fonction de Hilbert-Samuel de $R_\bullet$*). Par ailleurs, ce résultat se généralise naturellement aux modules gradués de type fini sur un tel anneau, voir [**7**, VIII §4] pour les détails.

Dans beaucoup de situations pratiques, l'anneau gradué en question s'écrit comme un système linéaire gradué d'un faisceau inversible. Soient X un schéma projectif sur un corps de base k et L un $\mathscr{O}_X$-module inversible. La somme directe $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(X, L^{\otimes n})$ forme une k-algèbre graduée. Cette algèbre est de type fini notamment lorsque L est ample. Dans ce cas-là on peut déduire du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch et du théorème d'annulation de Serre le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert de cette algèbre graduée. Il est aussi possible d'adapter la méthode de dévissage dans le cadre géométrique pour relier le coefficient du terme principal de la fonction de Hilbert au nombre d'intersection de L, toujours sous une hypothèse de positivité convenable du fibré inversible.

Dans le cas où le fibré inversible n'est pas ample, l'algèbre graduée des sections globales n'est pas nécessairement de type fini et le théorème d'annulation de Serre ne s'applique plus. La méthode de dévissage n'est donc pas adéquate pour étudier la fonction de Hilbert de ce genre de fibrés inversibles. En revanche, les résultats de Fujita [**22**] et Takagi [**41**] (approximation de Fujita) montrent que, au moins dans le cas où X est un schéma *intègre* et projectif sur un corps et L est un $\mathscr{O}_X$-module inversible gros (c'est-à-dire qu'une puissance tensorielle de L admet un sous-faisceau inversible ample), la fonction de Hilbert de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(X, L^{\otimes n})$ est équivalente, lorsque $n \to +\infty$, à un polynôme dont le degré est égal à la dimension de Krull de X. Cependant, contrairement au cas où L est ample, le coefficient du terme dominant pourrait être un nombre irrationnel, comme l'a montré Cutkosky [**20**, exemple 1.6]. En utilisant la méthode combinatoire d'Okounkov [**37**], le théorème d'approximation de Fujita a été généralisé dans [**30, 33**] au cas d'un système linéaire gradué qui contient un diviseur ample.

L'analogue arithmétique du théorème de Hilbert-Samuel avait d'abord été démontré par Gillet et Soulé [**27**, §5] en utilisant leur théorème de Riemann-Roch arithmétique (voir aussi [**26**] pour la théorie de l'intersection arithmétique, voir aussi §3 du chapitre 1 *infra*). Ensuite ce résultat a été revisité et généralisé dans divers contextes par différents auteurs.

On considère un morphisme projectif et plat $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et un fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$. En géométrie d'Arakelov, un théorème de Hilbert-Samuel arithmétique cherche à décrire le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique du système de fibrés vectoriels normés $\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$. Il y a cependant des variations dans cette formulation. D'abord il y a plusieurs choix naturels pour la structure du fibré vectoriel normé $\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$, comme par exemple la norme L^2 et la norme sup. Si le théorème de Gromov (voir [**40**] VIII.2.5 Lemma 2) permet de comparer la norme L^2 à la norme sup, et a été utilisé dans des travaux comme ceux d'Abbes-Bouche [**1**] et Randriambololona [**38**], l'article [**3**] de Berman et Freixas i Montplet considère des métriques hermitiennes singulières, où la norme sup sur l'image directe du fibré peut ne pas avoir de sens (voir aussi [**35**] pour le cas de l'espace de modules des courbes pointées). Un autre point est le choix de l'invariant arithmétique dans la définition de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique. Dans la littérature, il y a au moins deux possibilités : le degré d'Arakelov (ou la caractéristique d'Euler-Poincaré) et le logarithme du nombre de petites sections. On peut comparer par exemple [**46**] à [**36**]. Même si le faisceau inversible $\mathscr{L}$ est ample et sa métrique est semi-positive, en général ces deux constructions donnent des fonctions de Hilbert-Samuel arithmétiques non équivalentes.

Similairement à la situation géométrique, la méthode du théorème de Riemann-Roch arithmétique et la combinaison du dévissage avec des méthodes analytiques s'appliquent difficilement au cas où la fibre générique de $\mathscr{L}$ n'est pas ample. Inspiré par des travaux sur la méthode combinatoire dans le cadre de la géométrie algébrique, deux approches différentes ont été proposées pour étudier le comportement asymptotique des fonctions de Hilbert-Samuel arithmétiques. Celle de [**47, 48**] adapte la méthode de Lazarsfeld-Mustaţă dans le cadre arithmétique en considérant la fibre du $\mathbb{Z}$-schéma au-dessus d'une place non archimédienne, tandis que celle de [**13, 6**] repose sur le résultat même du théorème d'approximation de Fujita des systèmes linéaires gradués, ainsi que la méthode de $\mathbb{R}$-filtration développée dans [**14**]. On renvoie les lecteurs à [**9, 10**] pour le cas torique, où la méthode est aussi d'une nature combinatoire.

Je ne cherche pas à donner un aperçu panoramique des résultats du type théorème de Hilbert-Samuel, mais plutôt me limite au cas d'une algèbre graduée sur un corps de base, ainsi que quelques analogues arithmétiques, en mettant une attention particulière sur la similitude et la différence des méthodes utilisées. Le cours est organisé comme suit. Dans le deuxième paragraphe, on traite le cas d'une algèbre de semi-groupe et la méthode combinatoire ; dans le troisième paragraphe, une interprétation géométrique du problème sera présentée en faisant le lien avec la théorie de l'intersection ; dans le quatrième paragraphe, on discute l'analogue métrique du problème ; enfin, dans le cinquième paragraphe, on traite des analogues arithmétiques du théorème de Hilbert-Samuel.

Remerciement. — Je suis reconnaissant au collègue anonyme pour sa soigneuse lecture du texte et pour ses commentaires.

2. Méthode combinatoire

2.1. Algèbre de polynômes. — Le prototype du théorème de Hilbert-Samuel est le cas des algèbres de polynômes. Soient k un corps commutatif et $R_\bullet = k[T_0, \ldots, T_d]$ l'algèbre des polynômes à $d+1$ variables (où $d \in \mathbb{N}$), gradué par le degré des polynômes (autrement dit, R_n est l'espace vectoriel sur k engendré par les monômes de degré n). La fonction de Hilbert de $R_\bullet$ est

$$(n \in \mathbb{N}) \longmapsto \binom{d+n}{d}.$$

C'est un polynôme de degré d en n, dont le coefficient du terme dominant est $1/d!$: on a

$$\binom{d+n}{d} = \frac{(n+d)\cdots(n+1)}{d!} = \frac{1}{d!}n^d + O(n^{d-1}), \quad n \to +\infty. \tag{1}$$

2.2. Algèbre de semi-groupes. — L'algèbre de polynômes est un cas particulier d'algèbres de semi-groupes. Soient $d \in \mathbb{N}$ et Γ un sous-semi-groupe de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ (muni de la loi d'addition). On désigne par $k[\Gamma]$ l'algèbre du semi-groupe Γ. Par définition $k[\Gamma]$ est la somme directe d'une famille de k-modules libres de rang 1 paramétrée par Γ. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on désigne par e^γ le générateur canonique du k-module libre de rang 1 indexé par γ.[1] La loi de multiplication sur $k[\Gamma]$ est choisie de sorte que $e^{\gamma+\gamma'} = e^\gamma e^{\gamma'}$ pour tout couple $(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2$. L'algèbre $k[\Gamma]$ est canoniquement munie d'une $\mathbb{N}$-graduation :

$$k[\Gamma] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^d \\ (n,\alpha) \in \Gamma}} k e^{(n,\alpha)}.$$

1. L'expression e^γ est purement formelle, qui ne sert qu'à écrire la loi de composition de Γ d'une manière multiplicative.

2.3. Semi-groupe d'un corps convexe. — Un exemple typique de semi-groupe dans $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ est celui qui provient d'un *corps convexe* dans $\mathbb{R}^d$, par lequel on entend une partie convexe et compacte de $\mathbb{R}^d$, dont l'intérieur est non vide. Étant donné un corps convexe $\Delta\subset\mathbb{R}^d$, on construit un sous-ensemble $\Gamma(\Delta)$ de $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ comme suit :

$$\Gamma(\Delta) := \{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d \mid n\geqslant 1,\ \tfrac{1}{n}\alpha\in\Delta\}\cup\{(0,0)\}.$$

Par la convexité de Δ, on obtient que $\Gamma(\Delta)$ est un sous-semi-groupe de $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$. En outre, la fonction de Hilbert de l'algèbre $k[\Gamma(\Delta)]$ est donnée par la formule

$$(n\in\mathbb{N})\longmapsto \#\{\alpha\in\mathbb{Z}^d \mid \tfrac{1}{n}\alpha\in\Delta\}.$$

Par la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de Lebesgue, on obtient

$$\#\{\alpha\in\mathbb{Z}^d \mid \tfrac{1}{n}\alpha\in\Delta\} = \mathrm{vol}(\Delta)n^d + o(n^d),\quad n\to+\infty,$$

où vol est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Dans le cas où Δ est le simplexe

$$\{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}_+^d \mid x_1+\cdots+x_d\leqslant 1\},$$

dont le volume est $1/d!$, on retrouve le résultat dans le cas des algèbres de polynômes.

2.4. Fonction de Hilbert d'une algèbre de semi-groupe. — Khovanskiĭ [**31**] a montré que la méthode du corps convexe peut être appliquée à étudier un sous-semi-groupe général de $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$. Soit Γ un sous-semi-groupe de $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$. On suppose que $\Gamma\cap(\{0\}\times\mathbb{Z}^d)=\{(0,0)\}$ pour des raisons de simplicité [(2)]. Soient $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ et $\Gamma_{\mathbb{R}}$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d$ et le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ engendrés par Γ, respectivement. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit

$$\Gamma_n := \{\alpha\in\mathbb{Z}^d \mid (n,\alpha)\in\Gamma\}.$$

Similairement, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, soit

$$\Gamma_{\mathbb{Z},n} := \{\alpha\in\mathbb{Z}^d \mid (n,\alpha)\in\Gamma_{\mathbb{Z}}\}.$$

Il s'avère que

$$\mathbb{N}(\Gamma) := \{n\in\mathbb{N} \mid \Gamma_n\neq\varnothing\}$$

est un sous-semi-groupe de $\mathbb{N}$. En outre, le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par $\mathbb{N}(\Gamma)$ s'identifie à

$$\mathbb{Z}(\Gamma) := \{n\in\mathbb{Z} \mid \Gamma_{\mathbb{Z},n}\neq\varnothing\}.$$

2. Cette hypothèse supplémentaire est anodine car $(\Gamma\cap(\mathbb{N}_{\geqslant 1}\times\mathbb{Z}^d))\cup\{(0,0)\}$ est aussi un sous-semi-groupe de $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$.

On suppose que le groupe $\mathbb{Z}(\Gamma)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Alors $\Gamma_{\mathbb{R}}\cap(\{1\}\times\mathbb{R}^d)$ est un espace affine dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, dont le sous-espace vectoriel sous-jacent est $\Gamma_{\mathbb{R}}\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^d)$. En outre, l'ensemble $\Gamma_{\mathbb{Z}}\cap(\{0\}\times\mathbb{Z}^d)$ est un réseau (3) dans $\Gamma_{\mathbb{R}}\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^d)$. On munit ce dernier de l'unique mesure de Haar telle que le réseau $\Gamma_{\mathbb{Z}}\cap(\{0\}\times\mathbb{Z}^d)$ soit de covolume 1.

Soit $A(\Gamma)$ la projection canonique de $\Gamma_{\mathbb{R}}\cap(\{1\}\times\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}^d$. C'est un espace affine dans $\mathbb{R}^d$. La mesure de Haar sur $\Gamma_{\mathbb{R}}\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^d)$ induit (par translation puis par projection) une mesure borélienne sur $A(\Gamma)$ que l'on note $\mathrm{vol}(\cdot)$. En outre, on désigne par $\Delta(\Gamma)$ l'adhérence de l'ensemble

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N},\,n\geqslant 1}\{n^{-1}\alpha\,|\,\alpha\in\Gamma_n\}.$$

C'est une partie fermée et convexe dans $A(\Gamma)$ qui engendre $A(\Gamma)$ comme espace affine. En particulier, l'intérieur relatif de $\Delta(\Gamma)$ dans $A(\Gamma)$ est non vide.

En utilisant le théorème de Bézout, par un argument élémentaire on obtient que l'ensemble $(\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}(\Gamma))\setminus\mathbb{N}(\Gamma)$ est fini. La méthode de Khovanskiĭ est une généralisation aux dimensions supérieures de ce résultat (on renvoie à [**31**, Proposition 1] pour une démonstration, voir aussi [**30**, §1] et [**5**, §1]).

Lemme 2.1. — *Pour tout sous-ensemble convexe et compact E de $A(\Gamma)$ qui est contenu dans l'intérieur relatif de $\Delta(\Gamma)$, on a*

$$E\cap\{\tfrac{1}{n}\alpha\,|\,\alpha\in\Gamma_n\}=E\cap\{\tfrac{1}{n}\alpha\,|\,\alpha\in\Gamma_{\mathbb{Z},n}\}$$

pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ suffisamment grand.

Encore par la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de Lebesgue on déduit du lemme précédent le résultat suivant. Remarquons qu'aucune condition de finitude n'est exigée pour le sous-semi-groupe Γ.

Théorème 2.2. — *Soient Γ un sous-semi-groupe de $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ et $R_\bullet:=k[\Gamma]$. Alors*

$$\lim_{n\in\mathbb{N}(\Gamma),\,n\to+\infty}\frac{\mathrm{rg}_k(R_n)}{n^{\dim A(\Gamma)}}=\mathrm{vol}(\Delta(\Gamma)).$$

On renvoie les lecteurs à [**30**, Theorem 1.15] pour les détails.

3. c'est-à-dire un sous-$\mathbb{Z}$-module discret de rang maximal.

2.5. Cas d'une algèbre graduée générale. — Okounkov [**37**] a généralisé cette méthode combinatoire à l'étude de la log-concavité de la fonction de multiplicité. Son approche a été développée par Lazarsfeld et Mustaţă [**33**], et Kaveh et Khovanskiĭ [**30**] respectivement pour étudier le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée intègre (non nécessairement de type fini). L'idée remonte à la méthode très classique d'associer à une algèbre $\mathbb{N}$-filtrée son algèbre graduée correspondante. Cette procédure, qui change la structure d'algèbre en général, permet de garder toutes les informations de la fonction de Hilbert. On introduit une relation d'ordre total $\leqslant$ sur $\mathbb{Z}^d$, supposée être «additive», autrement dit, $\alpha \leqslant \beta$ entraîne $\alpha+\gamma \leqslant \beta+\gamma$ pour tout $(\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{Z}^d)^3$. Cette propriété est par exemple satisfaite par la relation d'ordre lexicographique.

Soit $R_\bullet$ une k-algèbre graduée telle que $R_0 = k$. On entend par *valuation homogène à valeurs dans* $(\mathbb{Z}^d, \leqslant)$ sur $R_\bullet$ toute application [(4)]

$$v : \coprod_{n\in\mathbb{N}} R_n \longrightarrow \mathbb{Z}^d \cup \{+\infty\}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(a) pour tout élément homogène f de $R_\bullet$, $v(f) \in \mathbb{Z}^d$ si et seulement si f est non nul, et $v(f) = 0$ si $f \in R_0 \setminus \{0\}$.

(b) si f et g sont deux éléments homogènes de $R_\bullet$, on a $v(fg) = v(f) + v(g)$;

(c) si $n \in \mathbb{N}$ et si x et y sont deux éléments de R_n, on a $v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$;

(d) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, l'espace vectoriel quotient

$$\mathrm{gr}^\alpha(R_n) := \{x \in R_n \,|\, v(x) \geqslant \alpha\}/\{x \in R_n \,|\, v(x) > \alpha\}$$

a pour dimension 0 ou 1 sur k.

Sous ces conditions la somme directe

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{gr}^\alpha(R_n)$$

est munie d'une structure de k-algèbre graduée. En outre, elle est isomorphe à l'algèbre du semi-groupe

$$\Gamma(R_\bullet) := \{(n,\alpha) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d \,|\, \mathrm{gr}^\alpha(R_n) \neq \{0\}\}.$$

4. On convient que $\alpha \lneqq +\infty$ et $\alpha + (+\infty) = +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ et que $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Il s'avère que les algèbres graduées $R_\bullet$ et $k[\Gamma(R_\bullet)]$ ont la même fonction de Hilbert. Par le théorème 2.2 on peut utiliser la partie convexe $\Delta(\Gamma(R_\bullet))$ pour décrire le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert de $R_\bullet$. Il faut cependant remarquer que l'existence d'une valuation homogène sur $R_\bullet$ n'est pas immédiate. En tout cas elle implique que l'anneau $R_\bullet$ est intègre. Dans le cas où $R_\bullet$ est un système linéaire gradué d'un diviseur de Cartier sur un k-schéma projectif et intègre possédant un point rationnel régulier, une telle valuation homogène peut être construite en choisissant un système de paramètres de l'anneau local en ce point rationnel régulier. Cependant l'existence d'un point rationnel régulier entraîne que le K-schéma est géométriquement intègre. On renvoie les lecteurs à **[15, 16]** pour une approche alternative basée sur la géométrie d'Arakelov relativement à un corps de fonctions où cette hypothèse n'est pas nécessaire.

3. Approche géométrique

3.1. Interprétation géométrique des algèbres graduées. — Soit $R_\bullet$ une k-algèbre graduée de type fini, qui est engendrée comme k-algèbre par R_1. Le spectre projectif de $R_\bullet$ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}(R_1)$ et l'homomorphisme canonique

$$\alpha_n : R_n \longrightarrow H^0(\mathrm{Proj}(R_\bullet), \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}(R_\bullet)}(n))$$

est un isomorphisme lorsque $n \in \mathbb{N}$ est assez grand (voir **[28]** III.2.3.1). On peut donc ramener l'étude asymptotique de la fonction de Hilbert au cas d'un système linéaire gradué.

Soient X un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} k$ et L un $\mathscr{O}_X$-module inversible ample. On considère la k-algèbre graduée

$$R(L)_\bullet := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^0(X, L^{\otimes n})$$

et on cherche à comprendre le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert de L définie par

$$(n \in \mathbb{N}) \longmapsto F_L(n) := \mathrm{rg}_k(H^0(X, L^{\otimes n})).$$

Comme L est ample, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $H^0(X, L^{\otimes n_0})$ soit non nul. Pour simplifier on suppose qu'il existe une section non nulle $s \in H^0(X, L)$ telle que l'homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-modules $f_s : L^\vee \to \mathscr{O}_X$ défini par s soit injectif. Soient Y le sous-schéma fermé de X défini par l'annulation de s et $i : Y \to X$ le morphisme d'inclusion. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, on a une suite exacte d'homomorphismes de $\mathscr{O}_X$-modules

$$0 \longrightarrow L^{\otimes(n-1)} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes f_s} L^{\otimes n} \longrightarrow L^{\otimes n} \otimes i_*(\mathscr{O}_Y) \longrightarrow 0\ ,$$

qui induit une suite exacte de groupes de cohomologie :

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes(n-1)}) \xrightarrow{\cdot s} H^0(X, L^{\otimes n}) \to H^0(Y, i^*(L^{\otimes n})) \to H^1(X, L^{\otimes(n-1)}),$$

où on a remplacé $H^0(X, L^{\otimes n} \otimes i_*(\mathscr{O}_Y))$ par $H^0(Y, i^*(L^{\otimes n}))$ via les isomorphismes suivants (en utilisant l'adjonction entre i_* et i^*) :

$$\begin{aligned} H^0(X, L^{\otimes n} \otimes i_*(\mathscr{O}_Y)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, L^{\otimes n} \otimes i_*(\mathscr{O}_Y)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(L^{\vee\otimes n}, i_*(\mathscr{O}_Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(i^*(L)^{\vee\otimes n}, \mathscr{O}_Y) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_Y, i^*(L)^{\otimes n}) \cong H^0(Y, i^*(L)^{\otimes n}). \end{aligned}$$

Comme L est ample, le théorème d'annulation de Serre montre que $H^1(X, L^{\otimes n}) = \{0\}$ et donc

$$F_L(n) - F_L(n-1) = F_{i^*(L)}(n) \tag{2}$$

pour n assez grand, où F_L et $F_{i^*(L)}$ sont respectivement les fonctions de Hilbert de L et $i^*(L)$. Ainsi par récurrence on montre qu'il existe un polynôme P_L de degré $\dim(X)$ tel que $F_L(n) = P_L(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand.

3.2. Nombre d'intersection et théorème de Hilbert-Samuel. — Pour tout entier naturel i, on désigne par $Z_i(X)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de dimension i de X, dont les éléments sont appelés des *cycles de dimension i dans X*. Si f est une fonction rationnelle non nulle sur un sous-schéma fermé intègre W de dimension $i+1$, on désigne par (f) l'élément

$$\sum_Y \mathrm{ord}_Y(f) Y \in Z_i(X),$$

où Y parcourt l'ensemble des sous-schémas fermés intègres de dimension i de W, et $\mathrm{ord}_Y(f)$ est défini dans §1.1.3 du chapitre 1 *infra.* L'élément (f) est appelé *cycle associé à la fonction rationnelle f*. On dit qu'un cycle de dimension i est *rationnellement équivalent à zéro* s'il appartient au sous-groupe $R^i(X)$ de $Z^i(X)$ engendré par les cycles associés aux fonctions rationnelles non nulles sur les sous-schémas intègres de dimension $i+1$ de X. On désigne par $\mathrm{CH}_i(X)$ le groupe quotient $Z_i(X)/R_i(X)$, appelé *groupe de Chow de dimension i* de X. Si α est un élément de $\mathrm{CH}_0(X)$, qui est représenté par le cycle $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$, où

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des entiers, et $x_1, \ldots, x_n$ sont des points fermés de X, on désigne par $\deg(\alpha)$ l'entier

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j [\kappa(x_j) : k],$$

où $\kappa(x_j)$ désigne le corps résiduel du point x_j.

Soient $i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ et Z un sous-schéma fermé intègre de dimension i de X. Soient s une section rationnelle non nulle de $L|_Z$ et (s) le cycle

$$\sum_{Y} \mathrm{ord}_Y(s) Y,$$

où Y parcourt l'ensemble des sous-schémas fermé intègre de dimension $i-1$ de Z. On désigne par $c_1(L) \cap [Z]$ l'élément de $\mathrm{CH}_{i-1}(X)$ représenté par ce cycle (il s'avère que cette classe d'équivalence rationnelle ne dépend pas du choix de la section rationnelle s). Plus généralement, si α est un élément de $\mathrm{CH}_i(X)$, qui est représenté par le cycle $\sum_{j=1}^{m} a_j Z_j$, où $a_1, \ldots, a_m$ sont des entiers, et $Z_1, \ldots, Z_m$ sont des sous-schémas intègres de dimension i de X, on désigne par $c_1(L) \cap \alpha$ la classe de cycles $\sum_{j=1}^{m} a_j c_1(L) \cap [Z_j]$ dans $\mathrm{CH}_{i-1}(X)$.

La formule de récurrence (2) montre que le coefficient du terme dominant du polynôme P_L est

$$\frac{\deg(c_1(L)^{\dim(X)} \cap [X])}{\dim(X)!}.$$

En conclusion, on obtient le résultat suivant (voir [**32**, théorème 1.1.24]).

Théorème 3.1. — *Soient X un schéma projectif de dimension d sur* $\mathrm{Spec}\, k$ *et L un $\mathscr{O}_X$-module inversible ample, alors on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{rg}_k(H^0(X, L^{\otimes n}))}{n^d/d!} = \deg(c_1(L)^d \cap [X]).$$

Une démonstration alternative (dans le cas où X est un schéma régulier) consiste à appliquer le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch, qui affirme que (voir [**32**, exemple 1.1.27])

$$\begin{aligned}\chi(X, L^{\otimes n}) := \sum_{i=0}^{d} \mathrm{rg}_k(H^i(X, L^{\otimes n})) &= \deg(\mathrm{ch}(L^{\otimes d})\mathrm{Td}(X)) \\ &= \deg(c_1(L)^d \cap [X]) \frac{n^d}{d!} + O(n^{d-1}).\end{aligned}$$

On utilise aussi le théorème d'annulation de Serre pour identifier $\chi(X, L^{\otimes n})$ à $H^0(X, L^{\otimes n})$ quand n est assez grand.

3.3. Diviseurs de Cartier et systèmes linéaires. — Soient X un schéma projectif et intègre sur $\operatorname{Spec} K$ et L un $\mathscr{O}_X$-module inversible. On définit le *volume* de L comme

$$\operatorname{vol}(L) := \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{rg}_k(H^0(X, L^{\otimes n}))}{n^d/d!}, \tag{3}$$

où d est la dimension de X. On a vu plus haut que, si L est un $\mathscr{O}_X$-module ample, alors $\operatorname{vol}(L) = \deg(c_1(L)^d \cap [X])$. En outre la limite supérieure dans la formule précédente est en fait une limite.

Dans le cas où X est un schéma intègre, il est plus commode d'utiliser le langage des diviseurs de Cartier. Soit $\mathscr{O}_X^\times$ le faisceau en groupes abéliens défini comme suit : pour tout sous-ensemble ouvert U de X, $\mathscr{O}_X^\times(U)$ est l'ensemble des $a \in \mathscr{O}_X(U)$ tels que l'homothétie $a : \mathscr{O}_U \to \mathscr{O}_U$ soit un isomorphisme. Similairement, soient $\mathscr{M}_X$ le faisceau des fonctions rationnelles sur X et $\mathscr{M}_X^\times$ le faisceau en groupes abéliens qui envoie U sur l'ensemble des $a \in \mathscr{M}_X(U)$ tels que l'homothétie $a : \mathscr{M}_U \to \mathscr{M}_U$ soit un isomorphisme. On voit aussitôt que $\mathscr{O}_X^\times$ est un sous-faisceau en groupes abéliens de $\mathscr{M}_X^\times$. On entend par *diviseur de Cartier* toute section sur X du faisceau quotient $\mathscr{M}_X^\times/\mathscr{O}_X^\times$. On dit qu'un diviseur de Cartier D est *effectif* et on note $D \geqslant 0$ s'il appartient à $\Gamma(X, (\mathscr{M}_X^\times \cap \mathscr{O}_X)/\mathscr{O}_X^\times)$. On désigne par $\operatorname{Div}(X)$ le groupe des diviseurs de Cartier sur X et par $\operatorname{Div}^+(X)$ le sous-semi-groupe de $\operatorname{Div}(X)$ des diviseurs effectifs.

Les diviseurs de Cartier sont étroitement liés aux faisceaux inversibles. Soit L un $\mathscr{O}_X$-module inversible. A toute section globale non nulle s de $L \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_X$, on peut associer un diviseur de Cartier $\operatorname{div}(s)$ comme suit. Pour tout sous-ensemble ouvert U de X sur lequel le $\mathscr{O}_X$-module L se trivialise par une section $s_0 \in \Gamma(U, L)$, il existe une unique fonction rationnelle non nulle f telle que $s = fs_0$. La classe de f dans $\Gamma(U, \mathscr{M}_X^\times/\mathscr{O}_X^\times)$ ne dépend pas du choix de la trivialisation locale s_0. Donc le recollement des classes de fonctions rationnelles quand U varie donne un diviseur de Cartier $\operatorname{div}(s)$.

Réciproquement, si D est un diviseur de Cartier sur X, on désigne par $\mathscr{O}_X(D)$ le sous-$\mathscr{O}_X$-module de $\mathscr{M}_X$ engendré par $-D$. C'est un $\mathscr{O}_X$-module inversible. L'application θ de $\operatorname{Div}(X)$ dans $\operatorname{Pic}(X)$ qui envoie tout diviseur de Cartier D sur la classe d'isomorphisme du $\mathscr{O}_X$-module inversible $\mathscr{O}_X(D)$ est un morphisme surjectif de groupes (voir **[28]** IV.21.3.4-5). On dit que le diviseur D est *ample* si le faisceau inversible $\mathscr{O}_X(D)$ est ample.

Les constructions ci-dessus peuvent aussi être obtenues par la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux abéliens

$$1 \longrightarrow \mathscr{O}_X^\times \longrightarrow \mathscr{M}_X^\times \longrightarrow \mathscr{M}_X^\times/\mathscr{O}_X^\times \longrightarrow 0\ ,$$

qui s'écrit comme

$$1 \longrightarrow H^0(X, \mathscr{O}_X^\times) \longrightarrow H^0(X, \mathscr{M}_X^\times) \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}(X) \xrightarrow{\theta} H^1(X, \mathscr{O}_X^\times).$$

On désigne par $\mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}$ le produit tensoriel $\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. Les éléments dans $\mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}$ sont appelés les $\mathbb{R}$-diviseurs (de Cartier) sur X. Un $\mathbb{R}$-diviseur D sur X est dit *effectif* (et on note $D \geqslant_{\mathbb{R}} 0$) s'il peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de diviseurs de Cartier effectifs. Il est clair que, si D est un diviseur de Cartier effectif, alors son image dans $\mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-diviseur effectif. La réciproque est vraie lorsque X est un schéma normal.

Soit $K = k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X. On appelle *système linéaire* sur X tout sous-k-espace vectoriel de K qui est de rang fini sur k. Si V est un système linéaire sur X, on désigne par $k(V)$ la sous-extension de K/k engendrée par les éléments de la forme a/b, où a et b appartiennent à $V \setminus \{0\}$.

Exemple 3.2. — Pour tout diviseur de Cartier D sur X, on définit

$$H^0(D) := \{f \in K^\times \mid D + \mathrm{div}(f) \geqslant 0\} \cup \{0\}.$$

C'est un système linéaire sur X. En outre, on a un isomorphisme canonique entre $H^0(D)$ et $H^0(X, \mathscr{O}_X(D))$. Similairement, pour tout $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier E, on définit

$$H^0_{\mathbb{R}}(E) := \{f \in K^\times \mid E + \mathrm{div}(f) \geqslant_{\mathbb{R}} 0\} \cup \{0\}.$$

C'est aussi un système linéaire sur X. Rappelons que, si D est un diviseur de Cartier sur X, alors on a $H^0(D) \subset H^0_{\mathbb{R}}(D\otimes 1)$. Ces deux espaces sont identiques quand X est normal, mais ils sont en général différents (voir [**19**, exemple 2.4.15] pour un contre-exemple).

3.4. Cas torique. — Dans le cas d'une variété torique, les systèmes linéaires et la géométrie des corps convexes sont étroitement liés. Le livre de Fulton [**23**] donne une vue panoramique sur ce sujet. On se contente ici d'une description succincte. Rappelons qu'une *variété torique de dimension d sur k* est par définition un schéma intègre et normal X sur $\mathrm{Spec}\, k$ muni d'une immersion ouverte du tore $\mathbb{T} \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ dans X ainsi qu'une action $\mu : \mathbb{T} \times X \to X$ qui prolonge l'action canonique de $\mathbb{T}$ sur lui-même, où $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$ désigne le groupe multiplicatif sur k.

Les variétés toriques peuvent être décrites de façon combinatoire. On désigne par $N = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}, \mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}^d$ le réseau des sous-groupes à un paramètre de $\mathbb{T}$. Soit $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ son réseau dual, qui s'identifie au groupe des caractères de $\mathbb{T}$. On appelle *cône polyédral rationnel* dans $N_{\mathbb{R}}$ tout sous-ensemble σ de $N_{\mathbb{R}}$ de la forme

$$\sigma = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \,|\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}_+^r\},$$

où $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est une famille finie d'éléments de N (on dit que σ est *engendré* par la famille $\{v_1, \ldots, v_r\}$). Étant donné un cône polyédral rationnel σ dans $N_{\mathbb{R}}$, on désigne par $\sigma^\vee$ le sous-ensemble de $M_{\mathbb{R}}$ des vecteurs α tels que $\alpha(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \sigma$ (on identifie $M_{\mathbb{R}}$ à l'espace des formes linéaires sur $N_{\mathbb{R}}$). Il s'avère que $\sigma^\vee$ est un cône polyédral rationnel dans $M_{\mathbb{R}}$, appelé *cône dual* de σ. En outre, on a $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$ si on identifie N au bidual de lui-même. Rappelons que le lemme de Gordan montre que $M_\sigma := M \cap \sigma^\vee$ est un sous-semi-groupe de type fini de M.

Soit σ un cône dans $N_{\mathbb{R}}$. On appelle *face* de σ tout sous-ensemble de la forme $\sigma \cap \mathrm{Ker}(\varphi)$, où φ est un élément de $\sigma^\vee$. Toute face de σ est un cône polyédral rationnel. On dit qu'un cône polyédral rationnel σ est *strictement convexe* si $\{0\}$ est une face de σ, ou de façon équivalente, $\sigma^\vee$ engendre $M_{\mathbb{R}}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Pour tout cône polyédral rationnel σ qui est strictement convexe, on désigne par X_σ le schéma affine $\mathrm{Spec}\, k[M_\sigma]$. Si τ est une face de σ, alors $k[M_\tau]$ est une localisation de $k[M_\sigma]$ par un élément et donc X_τ s'identifie à un sous-schéma ouvert de X_σ. En particulier, le schéma $X_{\{0\}}$ correspondant à la face $\{0\}$ s'identifie au tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d = \mathrm{Spec}\, k[M]$. On a une action de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^d$ sur X_σ, qui correspond à l'homomorphisme canonique

$$k[M_\sigma] \longrightarrow k[M_\sigma] \otimes_k k[M]$$

qui envoie e^α sur $e^\alpha \otimes e^\alpha$ ($\alpha \in M_\sigma$). Cette action étend l'action canonique de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}^n$ sur lui-même. Donc X_σ est une variété torique affine. On peut montrer que le schéma X_σ est toujours intègre et normal ; il est régulier si et seulement si σ est engendré par une base de N sur $\mathbb{Z}$ (cf. [**23**, §2.1]).

On appelle *éventail* toute famille finie Σ de cônes polyédraux rationnels strictement convexes dans $N_{\mathbb{R}}$ telle que, pour tout $(\sigma, \sigma') \in \Sigma^2$, l'intersection $\sigma \cap \sigma'$ est une face commune de σ et σ'. Étant donné un éventail Σ, le recollement des schémas affines X_σ, $\sigma \in \Sigma$, forme un k-schéma que l'on note X_Σ. Les actions du tore $\mathbb{T}$ sur X_σ, $\sigma \in \Sigma$, se recollent en une action de $\mathbb{T}$ sur X_Σ qui prolonge l'action canonique de $\mathbb{T}$ sur lui-même. Ainsi X_Σ est une variété torique, appelé la variété torique *correspondant à* Σ. Le k-schéma X_Σ est propre si et seulement si $|\Sigma| := \bigcup_{\sigma\in\Sigma}\sigma = N_{\mathbb{R}}$ (cf. [**23**, §2.4]).

Soient Σ un éventail et X_Σ la variété torique correspondant à Σ. On appelle $\mathbb{T}$-*diviseur de Cartier* sur X_Σ tout diviseur de Cartier invariant par $\mathbb{T}$. Soit D un $\mathbb{T}$-diviseur de Cartier sur X_Σ. Localement sur un ouvert affine X_σ, $\sigma\in\Sigma$, le $\mathbb{T}$-diviseur de Cartier D est représenté par une fonction rationnelle sur X_σ qui est invariante par l'action de $\mathbb{T}$, qui est donc de la forme $e^{-\alpha_\sigma}$, où α_σ est un élément de M. La condition de recollement s'interprète comme suit : pour tout couple $(\sigma,\sigma')\in\Sigma^2$, la différence $\alpha_\sigma-\alpha_{\sigma'}$ appartient à $M_\sigma\cap M_{\sigma'}$. On peut ainsi faire correspondre biunivoquement l'ensemble des $\mathbb{T}$-diviseurs de Cartier à celui des *fonctions de support virtuelles* sur $|\Sigma|$, à savoir les fonctions $\psi:|\Sigma|\rightarrow\mathbb{R}$ telles que, pour tout $\sigma\in\Sigma$, la restriction de ψ à σ s'identifie à la restriction d'une forme linéaire dans M. Si $\psi:|\Sigma|\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction de support virtuelle, on désigne par D_ψ le $\mathbb{T}$-diviseur de Cartier correspondant. Le diviseur D_ψ est effectif si et seulement si la fonction ψ est négative. En outre, deux $\mathbb{T}$-diviseurs de Cartier D_ψ et D_φ sont rationnellement équivalents si et seulement si la différence $\psi-\varphi$ s'identifie à la restriction d'une forme linéaire dans M.

Soient Σ un éventail et $\psi:|\Sigma|\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction de support virtuelle. L'espace $H^0(D_\psi)$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel libre engendré par (voir [**23**, §3.5] pour les détails)

$$\{e^\alpha\,|\,\alpha\in M,\ \psi(x)\leqslant\alpha(x)\text{ pour tout }x\in|\Sigma|\}.$$

En particulier, si on désigne par Δ_ψ l'ensemble $\bigcap_{\sigma\in\Sigma}\Delta_\psi(\sigma)$, où

$$\Delta_\psi(\sigma) := \{\alpha\in M_{\mathbb{R}}\,|\,\forall\,x\in\sigma,\ \psi(x)\leqslant\alpha(x)\},$$

alors on a

$$H^0(D_\psi)\cong\bigoplus_{\alpha\in\Delta_\psi\cap M}k\mathrm{e}^\alpha.$$

Ainsi l'algèbre graduée $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}H^0(nD_\psi)$ s'identifie à l'algèbre du semi-groupe

$$\Gamma(\Delta_\psi)=\{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times M\,|\,n\geqslant 1,\ \tfrac{1}{n}\alpha\in\Delta_\psi\}\cup\{(0,0)\}$$

dans $\mathbb{N}\times M\cong\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$, et la méthode combinatoire décrite au §2 peut être utilisée pour étudier la fonction de Hilbert-Samuel d'un diviseur invariant par le tore dans une variété torique.

3.5. Corps convexe de Newton-Okounkov. — La méthode du corps de Newton-Okounkov permet de relier l'étude des systèmes linéaires gradués et la géométrie des corps convexes dans le cas général. Soient X un k-schéma intègre (non nécessairement torique) et K le corps des fonctions rationnelles sur X. On entend par *système linéaire gradué* sur X toute sous-k-algèbre graduée

$$V_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n T^n$$

de l'anneau des polynômes

$$K[T] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} KT^n$$

telle que chaque V_n soit un système linéaire.

Supposons que le k-schéma X possède un point rationnel régulier x. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est régulier et son corps des fractions s'identifie à K. Son complété est isomorphe à l'algèbre des séries formelles $k[\![T_1,\dots,T_d]\!]$ (cf. [**21**, Proposition 10.16]). On munit le groupe $\mathbb{Z}^d$ de la relation d'ordre lexicographique et on considère l'application $k[\![T_1,\dots,T_d]\!] \to \mathbb{Z}^d \cup \{+\infty\}$ qui envoie toute série formelle

$$\sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d} \lambda_\alpha T_1^{\alpha_1}\cdots T_d^{\alpha_d},$$

sur (avec la convention $\inf\varnothing = +\infty$)

$$\inf\{\alpha\in\mathbb{N}^d \mid \lambda_\alpha \neq 0\}.$$

La composition de cette application avec l'homomorphisme d'inclusion $\mathscr{O}_{X,x} \to k[\![T_1,\dots,T_d]\!]$ donne une application $v : \mathscr{O}_{X,x} \to \mathbb{N}^d \cup \{+\infty\}$ qui s'étend en une application $v : K \to \mathbb{Z}^d \cup \{+\infty\}$ en prenant

$$v(f/g) = v(f) - v(g) \text{ pour } (f,g)\in K^2,\ g\neq 0.$$

Il s'avère que, pour tout système linéaire gradué $V_\bullet$, l'application v induit une valuation homogène sur $V_\bullet$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. On peut donc appliquer la méthode combinatoire du paragraphe précédent pour obtenir le résultat suivant (voir [**30**, théorème 4] et [**33**, théorème 2.13]).

Théorème 3.3. — *Soit $V_\bullet$ un système linéaire gradué sur X. On suppose que $V_\bullet$ est* birationnel, *c'est-à-dire $K = k(V_n)$ pour un certain $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Soit*

$$\mathbb{N}(V_\bullet) := \{n\in\mathbb{N} \mid V_n \neq \{0\}\}.$$

Alors la limite

$$\mathrm{vol}(V_\bullet) := \lim_{n\in\mathbb{N}(V_\bullet),\, n\to+\infty} \frac{\mathrm{rg}_k(V_n)}{n^d/d!}$$

existe dans $]0,+\infty]$. *En outre, on a*

$$\frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{d!} = \mathrm{vol}(\Delta(\Gamma(V_\bullet))).$$

Si de plus $V_\bullet$ *est contenu dans un système linéaire gradué de type fini, alors* $\Delta(\Gamma(V_\bullet))$ *est compact et* $\mathrm{vol}(V_\bullet)$ *est fini.*

Dans le cadre géométrique, la méthode combinatoire permet de tirer plus d'information géométrique que l'interprétation de la fonction volume par la mesure de la partie convexe $\Delta(V_\bullet) := \Delta(\Gamma(V_\bullet))$ (appelée *corps de Newton-Okounkov* dans la littérature). Par exemple, en utilisant le fait que la valuation homogène à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ provient d'une valuation sur K, on déduit de l'inégalité de Brunn-Minkowski le résultat suivant (cf. [**6**, Proposition 2.10]) pour un variant de cet énoncé pour les systèmes linéaires gradués filtrés. Voir [**39**] pour un survol sur l'inégalité de Brunn-Minkowski dans le cadre de la géométrie convexe, voir aussi [**42**] pour des liens avec l'inégalité d'indice de Hodge.

Théorème 3.4. — *Soient* $U_\bullet$, $V_\bullet$ *et* $W_\bullet$ *trois systèmes linéaires gradués sur* X *qui sont birationnels. On suppose que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *assez grand, on a*

$$U_n \cdot V_n := \{fg \mid f \in U_n,\ g \in V_n\} \subset W_n.$$

Alors on a

$$\Delta(U_\bullet) + \Delta(V_\bullet) := \{x + y \mid x \in \Delta(U_\bullet),\ y \in \Delta(V_\bullet)\} \subset \Delta(W_\bullet).$$

En particulier,

$$\mathrm{vol}(U_\bullet)^{\frac{1}{d}} + \mathrm{vol}(V_\bullet)^{\frac{1}{d}} \leqslant \mathrm{vol}(W_\bullet)^{\frac{1}{d}}.$$

4. Version métrique

Dans ce paragraphe, on suppose que le corps k est muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ telle que la topologie sur k induite par $|\cdot|$ est complète.

4.1. Norme déterminant. — Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang fini sur k. On munit $\mathrm{d\acute{e}t}(V)$ du *déterminant* $\|\cdot\|_{\mathrm{d\acute{e}t}}$ de la norme $\|\cdot\|$, défini comme

$$\forall\, \eta \in \mathrm{d\acute{e}t}(V), \quad \|\eta\|_{\mathrm{d\acute{e}t}} := \inf\{\|x_1\| \cdots \|x_r\| \mid \eta = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\}.$$

Soit $R_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ une k-algèbre graduée telle que chaque R_n soit un espace vectoriel de rang fini sur k. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on fixe une norme $\|\cdot\|_n$ sur l'espace vectoriel R_n. La version métrique du problème de Hilbert-Samuel cherche à déterminer le comportement asymptotique de la suite $\{(\mathrm{d\acute{e}t}(R_n), \|\cdot\|_{n,\mathrm{d\acute{e}t}})\}$ d'espaces vectoriels normés de rang 1 sur k.

4.2. Espace de Berkovich. — Dans le cadre géométrique où $R_\bullet$ est un système linéaire gradué, la suite de normes $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ provient souvent d'une métrique, où la théorie de Berkovich est un cadre adéquate pour sa construction, surtout quand la valeur absolue $|\cdot|$ est non archimédienne. Soit X un schéma sur $\mathrm{Spec}\, k$. Ensemblistement l'*espace de Berkovich* associé à X est par définition l'ensemble des couples $x = (j(x), |\cdot|_x)$, où $j(x)$ est un point schématique de X, et $|\cdot|_x$ est une valeur absolue sur le corps résiduel $\kappa(j(x))$, qui prolonge la valeur absolue $|\cdot|$ sur k. On désigne par $\widehat{\kappa}(x)$ le séparé complété du corps $\kappa(j(x))$ par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_x$. Si s est une fonction régulière sur un voisinage ouvert de $j(x)$, on désigne par $s(x)$ l'image de la classe résiduel de s en $j(x)$ par l'application d'inclusion $\kappa(j(x)) \to \widehat{\kappa}(x)$.

L'ensemble X^{an} est naturellement muni d'une topologie de Zariski, celle la moins fine qui rend l'application j continue. Berkovich a défini une autre topologie sur X^{an}, qui est plus fine que la topologie de Zariski (voir **[2]**). Soit U un sous-schéma ouvert de X et f une fonction régulière sur U. Pour tout point $x \in U^{\mathrm{an}}$, on désigne par $|f|(x)$ la valeur absolue de $f(x)$ par rapport à $|\cdot|_x$. On obtient ainsi une fonction $|f| : U^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}_+$. La *topologie de Berkovich* sur X^{an} est définie comme la topologie la moins fine qui rend continue l'application j et toutes les fonctions de la forme $|f|$, où f parcourt l'ensemble des fonctions régulières sur les sous-schémas ouverts de X.

La construction de l'espace de Berkovich est fonctorielle. Si $\phi : Y \to X$ est un morphisme de k-schémas, on désigne par $\phi^{\mathrm{an}} : Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ l'application qui envoie $y = (j(y), |\cdot|_y) \in Y^{\mathrm{an}}$ sur $(\phi(j(y)), |\cdot|_y \circ \phi^\sharp_{j(y)})$, où $\phi^\sharp_{j(y)} : \kappa(\phi(j(y))) \to \kappa(j(y))$ est le morphisme de corps résiduel défini dans la structure du morphisme de schémas $\phi : Y \to X$. Cette application est continue si on munit Y^{an} et X^{an} de la topologie de Berkovich.

4.3. Faisceaux inversible métrisé. — Soit L un $\mathscr{O}_X$-module inversible. On appelle *métrique* sur L toute famille $\varphi := (|\cdot|_\varphi(x))_{x\in X^{\mathrm{an}}}$, où chaque $|\cdot|_\varphi(x)$ est une norme sur $L(x) := L\otimes_{\mathscr{O}_X}\widehat{\kappa}(x)$. On dit que la métrique φ est *continue* si, pour tout sous-schéma ouvert U de X et toute section $s\in H^0(U,L)$, la fonction

$$|s|_\varphi : (x\in U^{\mathrm{an}}) \longmapsto |s(x)|_\varphi(x)$$

est continue sur U^{an}. Dans le cas où le morphisme canonique de schémas $X\to \operatorname{Spec} k$ est propre, l'espace topologique X^{an} est compact. En particulier, pour toute section $s\in H^0(X,L)$, on a

$$\|s\|_{\varphi,\sup} := \sup_{x\in X^{\mathrm{an}}} |s|_\varphi(x) < +\infty,$$

et $\|\cdot\|_{\varphi,\sup}$ définit une norme sur $H^0(X,L)$, qui est ultramétrique lorsque $|\cdot|$ est non archimédienne. Cette norme est appelée la *norme du supremum* associée à la métrique φ.

Si φ et φ' sont deux métriques sur le même $\mathscr{O}_X$-module inversible L, alors il existe une fonction strictement positive λ sur X^{an} telle que

$$\forall\, x\in X^{\mathrm{an}},\quad |\cdot|_\varphi(x) = \lambda(x)|\cdot|_{\varphi'}(x).$$

On définit la *distance entre φ et φ'* comme

$$d(\varphi,\varphi') := \sup_{x\in X^{\mathrm{an}}} |\ln\lambda(x)|.$$

Si X est propre sur $\operatorname{Spec} k$ et si les métriques φ et φ' sont continues, la distance entre φ et φ' est finie.

Similairement, si V est un espace vectoriel de rang fini sur k et si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes sur V, on définit

$$d(\|\cdot\|,\|\cdot\|') := \sup_{0\neq s\in V} \big|\ln\|s\| - \ln\|s\|'\big|.$$

Soit L un $\mathscr{O}_X$-module inversible, muni d'une métrique φ. Soit $i : Y\to X$ un morphisme de schémas. Si y est un point de Y^{an} et si x est l'image de y dans X^{an} par i^{an}, alors $(\widehat{\kappa}(y),|\cdot|_y)$ est une extension valuée de $(\widehat{\kappa}(x),|\cdot|_x)$. En particulier, la norme $|\cdot|_\varphi(x)$ sur $L(x) = L\otimes_{\mathscr{O}_X}\widehat{\kappa}(x)$ induit par extension de corps une norme sur

$$i^*(L)(y) = i^*(L)\otimes_{\mathscr{O}_Y}\widehat{\kappa}(y) \cong L(x)\otimes_{\widehat{\kappa}(x)}\widehat{\kappa}(y).$$

On obtient ainsi une métrique sur $i^*(L)$ que l'on note $i^*(\varphi)$, appelée la *tirée en arrière* de φ par le morphisme i. Cette métrique est continue lorsque φ est continue.

Exemple 4.1. — Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang fini sur k. Soit $\mathscr{O}_V(1)$ le faisceau inversible universel de l'espace projectif $\pi : \mathbb{P}(V) \to \operatorname{Spec} k$. Rappelons que l'on a un homomorphisme surjectif universel de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}$-modules $f : \pi^*(V) \to \mathscr{O}_V(1)$, et tout k-point $\rho : \operatorname{Spec} A \to \mathbb{P}(V)$ de $\mathbb{P}(V)$ à valeurs dans une k-algèbre A correspond à un A-module quotient projectif de rang 1 de $V \otimes_k A$, donné par

$$\rho^*(f) : \rho^*(\pi^*(V)) \longrightarrow \rho^*(\mathscr{O}_V(1)).$$

En particulier, si x est un point de X^{an}, alors la norme $\|\cdot\|$ sur V induit par extension des scalaires une norme $\|\cdot\|_{\widehat{\kappa}(x)}$ sur $V \otimes_k \widehat{\kappa}(x)$ puis par quotient une norme sur $\mathscr{O}_V(1)(x)$. On obtient ainsi une métrique continue sur $\mathscr{O}_V(1)$, appelée *métrique de Fubini-Study* associée à $\|\cdot\|$, notée $|\cdot|_{\mathrm{FS}}$.

On peut montrer que, si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes sur le même espace vectoriel V qui est de rang fini sur k, alors on a

$$d(|\cdot|_{\mathrm{FS}}, |\cdot|'_{\mathrm{FS}}) \leqslant d(\|\cdot\|, \|\cdot\|'),$$

l'égalité est satisfaite si $|\cdot|$ est archimédienne (par le théorème de Hahn-Banach) ou si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont toutes deux ultramétriques.

Dans le cas où $|\cdot|$ est une valeur absolue non archimédienne et non triviale, une autre façon d'obtenir une métrique continue consiste à construire la métrique à partir d'un modèle entier. Soit $\mathfrak{o}_k$ l'anneau de valuation de $(k, |\cdot|)$. Si X est un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} k$ et L est un $\mathscr{O}_X$-module inversible, on entend par *modèle* de (X, L) la donnée d'un $\mathfrak{o}_k$-schéma projectif et plat $\mathfrak{X}$ et d'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module inversible $\mathfrak{L}$ tels que la fibre générique de $\mathfrak{X}$ est isomorphe à X et que la restriction de $\mathfrak{L}$ à la fibre générique est isomorphe à L. Si x est un point de X^{an}, on désigne par $\mathfrak{o}_x$ l'anneau de valuation de $\widehat{\kappa}(x)$. Par le critère valuatif de propreté, le morphisme canonique $p_x : \operatorname{Spec} \widehat{\kappa}(x) \to X$ s'étend de façon unique en un morphisme $\mathscr{P}_x : \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_x \to \mathfrak{X}$. La tirée en arrière $\mathscr{P}_x^*(\mathfrak{L})$ induit une norme $|\cdot|_{\mathfrak{L}}(x)$ sur $L(x)$ telle que

$$\forall\, s \in L(x), \quad |s|_{\mathfrak{L}}(x) = \inf\{|a|_x \,|\, a \in \widehat{\kappa}(x)^{\times},\ a^{-1}s \in \mathscr{P}_x^*(\mathfrak{L})\}.$$

On peut montrer que $|\cdot|_{\mathfrak{L}}$ définit une métrique continue sur L, appelée la *métrique induite par le modèle* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{L})$.

4.4. Version métrique du théorème de Hilbert-Samuel. — Soient X un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} k$ et L un $\mathscr{O}_X$-module inversible ample, et φ une métrique continue sur L. Pour tout $x \in X^{\mathrm{an}}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $L^{\otimes n}(x)$ sur $\widehat{\kappa}(x)$ est la $n^{\text{ième}}$ puissance tensorielle de $L(x)$. Ainsi la norme $|\cdot|_\varphi(x)$ induit par puissance tensorielle une norme $|\cdot|_{n\varphi}(x)$ sur $L^{\otimes n}(x)$ telle que, pour tout élément $\ell \in L(x)$, on ait

$$|\ell^{\otimes n}|_{n\varphi}(x) = |\ell|_\varphi(x)^n. \tag{4}$$

Ainsi on obtient une métrique $n\varphi$ sur $L^{\otimes n}$, qui est continue. On munit l'espace vectoriel $H^0(X, L^{\otimes n})$ de la norme $\|\cdot\|_{n\varphi,\sup}$.

Pour simplifier, on suppose que s est une section globale dans $H^0(X, L)$ qui induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X, L^{\otimes(n-1)}) \xrightarrow{\cdot s} H^0(X, L^{\otimes n}) \longrightarrow H^0(Y, i^*(L^{\otimes n})) \longrightarrow 0,$$

où n est un entier positif, Y est le sous-schéma fermé de X défini par l'annulation de s, et $i : Y \to X$ est le morphisme d'inclusion. On a un isomorphisme canonique entre des espaces vectoriels de rang un sur k :

$$\text{dét}(H^0(X, L^{\otimes(n-1)})) \otimes \text{dét}(H^0(Y, i^*(L^{\otimes n}))) \cong \text{dét}(H^0(X, L^{\otimes n})). \tag{5}$$

Si on munit ces espaces de déterminant des normes

$$\|\cdot\|_{(n-1)\varphi,\sup,\text{dét}}, \ \|\cdot\|_{n\varphi,\sup,\text{dét}} \text{ et } \|\cdot\|_{i^*(n\varphi),\sup,\text{dét}},$$

respectivement, l'isomorphisme (5) n'est pas une isométrie en général. Cependant, si la métrique φ est semi-positive, le défaut d'isométrie peut être décrit par des invariants de la métrique.

Définition 4.2. — Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit φ_n la métrique continue sur L dont la $n^{\text{ième}}$ puissance symétrique s'identifie à la tirée en arrière de la métrique de Fubini-Study $|\cdot|_{n\varphi,\sup,\mathrm{FS}}$ sur $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(H^0(X,L^{\otimes n}))}(1)$ par l'immersion fermée $X \to \mathbb{P}(H^0(X, L^{\otimes n}))$. On dit que la métrique φ est *semi-positive* si

$$\lim_{n\to+\infty} d(\varphi_n, \varphi) = 0.$$

Dans le cas où la valeur absolue $|\cdot|$ est archimédienne, φ est semi-positive si et seulement si elle est pluri-sous-harmonique (voir [**44**]) ; dans le cas où la valeur absolue $|\cdot|$ est non archimédienne et non triviale, φ est semi-positive si et seulement si elle est limite uniforme d'une suite de métriques induites par des modèles amples sur l'anneau de valuation de $(k, |\cdot|)$ (voir [**18**, §3]). Cette condition est aussi équivalente à la pluri-sous-harmonicité non archimédienne (voir [**29**, §6] et [**12**, §6.8]).

Si la métrique φ est semi-positive, le défaut d'isométrie de l'isomorphisme (5) peut être estimé en fonction de la mesure de Monge-Ampère.

On a

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad &\frac{1}{\dim_k(H^0(X, L^{\otimes n}))} \ln \frac{\|\cdot\|_{n\varphi,\mathrm{sup,dét}}}{\|\cdot\|_{(n-1)\varphi,\mathrm{sup,dét}} \otimes \|\cdot\|_{i^*(n\varphi),\mathrm{sup,dét}}} \\
&= -\int_{X^{\mathrm{an}}} \ln|s|\, c_1(\varphi)^{\wedge d} + O(\ln(n)).
\end{aligned}
$$

Dans le cas où $|\cdot|$ est archimédienne, la mesure $c_1(\varphi)^{\wedge d}$ est définie comme la puissance extérieure du courant. Dans le cas non archimédien, cette mesure est définie dans [**11**].

4.5. Méthode combinatoire. — Similairement au cas géométrique, la méthode combinatoire peut aussi être appliquée aux systèmes linéaires gradués normés. Soient X un schéma projectif et intègre sur $\operatorname{Spec} k$ et $V_\bullet$ un système linéaire gradué sur X. Rappelons que $V_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n T^n$ est une sous-k-algèbre graduée de $K[T] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} KT^n$, où K désigne le corps des fonctions rationnelles sur X. On suppose que chaque espace vectoriel V_n est muni d'une norme $\|\cdot\|_n$ de sorte que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, et tout $(s_m, s_n) \in V_m \times V_n$, on ait

$$
\|s_m \cdot s_n\|_{n+m} \leqslant \|s_m\|_m \cdot \|s_n\|_n. \tag{7}
$$

Comme dans le cas géométrique, on suppose l'existence d'un point régulier $x \in X(k)$ et on fixe un système de paramètres $\{z_1, \ldots, z_d\}$ dans l'anneau local régulier $\mathscr{O}_{X,x}$. Ainsi l'homomorphisme de l'anneau des séries formelles $k[\![T_1, \ldots, T_d]\!]$ dans le complété $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x}$ qui envoie T_i sur z_i est un isomorphisme.

Soit $v : K \to \mathbb{Z}^d \cup \{+\infty\}$ la valuation comme dans le paragraphe précédent. Cette valuation définit une $\mathbb{Z}^d$-filtration sur K (comme espace vectoriel sur k) : pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, soit

$$
\mathscr{F}^\alpha(K) = \{s \in K \mid v(s) \geqslant \alpha\}.
$$

Si V est un sous-espace vectoriel de rang fini de K, alors cette filtration induit par restriction une $\mathbb{Z}^d$-filtration sur V que l'on note encore $\mathscr{F}$ par abus de notation. On a vu que la somme directe des sous-quotients

$$
\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{gr}^\alpha(V_n)
$$

forme une k-algèbre graduée qui est isomorphe à l'algèbre du semi-groupe $\Gamma(V_\bullet)$. Dans la suite, on identifie ces deux k-algèbres graduées. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, la norme $\|\cdot\|_n$ sur V_n induit par passage au sous-quotient une norme $\|\cdot\|_{(n,\alpha),\mathrm{sq}}$ sur $\mathrm{gr}^\alpha(V_n)$.

On déduit de l'hypothèse (7) que, si γ et γ' sont deux éléments de $\Gamma(V_\bullet)$, alors

$$\|e^{\gamma+\gamma'}\|_{\gamma+\gamma',\mathrm{sq}} \leqslant \|e^{\gamma}\|_{\gamma,\mathrm{sq}} \cdot \|e^{\gamma'}\|_{\gamma',\mathrm{sq}}.$$

Les normes déterminants $\|\cdot\|_{n,\mathrm{d\acute{e}t}}$ sont naturellement liées à ces normes sous-quotients. En effet, si on identifie V_n à

$$\bigoplus_{\alpha\in\Gamma_n} \mathrm{gr}^{\alpha}(V_n),$$

on a

$$\frac{1}{\mathrm{rg}_k(V_n)}\left|\ln\frac{\|\cdot\|_{n,\mathrm{d\acute{e}t}}}{\bigoplus_{\alpha\in\Gamma_n}\|\cdot\|_{(n,\alpha),\mathrm{sq}}}\right| \leqslant \ln(\mathrm{rg}_k(V_n)),$$

où $\Gamma_n = \{\alpha\in\mathbb{Z}^d \,|\, (n,\alpha)\in\Gamma(V_\bullet)\}$.

En utilisant la méthode dans [**6**] (voir aussi [**45, 17**]), on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.3. — *Soient X un schéma projectif et intègre de dimension $d\geqslant 1$ sur* $\operatorname{Spec} k$ *qui possède un point rationnel régulier, et $V_\bullet$ un système linéaire gradué sur V. On suppose que*

$$\sup_{\substack{n\geqslant 1,\,\alpha\in\mathbb{Z}^d\\ (n,\alpha)\in\Gamma(V_\bullet)}} \Big(-\frac{1}{n}\ln\|e^{(n,\alpha)}\|_{(n,\alpha),\mathrm{sq}}\Big) < +\infty.$$

Alors la suite de mesures de probabilité

$$\frac{1}{\mathrm{rg}_k(V_n)}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^d\\ (n,\alpha)\in\Gamma(V_\bullet)}} \delta_{-\ln\|e^{(n,\alpha)}\|_{(n,\alpha),\mathrm{sq}}},\quad n\in\mathbb{N}(V_\bullet)$$

converge faiblement vers une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$, où δ_x désigne la mesure de Dirac en x. En outre, si on désigne par G la fonction concave sur $\Delta(V_\bullet)$ dont le graphe est le bord supérieur de l'enveloppe convexe des points

$$\frac{1}{n}((n,\alpha), -\ln\|e^{(n,\alpha)}\|_{(n,\alpha),\mathrm{sq}}),\quad (n,\alpha)\in\Gamma(V_\bullet),\ n\geqslant 1,$$

alors la mesure de probabilité limite s'identifie à l'image directe de la mesure uniforme sur $\Delta(V_\bullet)$ par la fonction G.

Remarque 4.4. — Soient Σ un éventail tel que $|\Sigma| = \mathbb{R}^d$, $X = X_\Sigma$ la variété torique associée, et $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de support virtuelle. On suppose que $V_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(nD_\psi)$ est le système linéaire gradué total du $\mathbb{T}$-diviseur de Cartier D_ψ et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la norme $\|\cdot\|_n$ est de la forme $\|\cdot\|_{n\varphi,\sup}$, où φ est une métrique continue semi-positive sur $\mathscr{O}(D_\psi)$ qui est invariante par l'action du tore. Il s'avère que la métrique φ correspond à une fonction concave $f_\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $|f_\varphi - \psi|$ soit une fonction bornée. Alors la fonction G décrite dans le théorème 4.3 s'identifie au dual au sens de Legendre-Fenchel de la fonction convexe f_φ. On renvoie les lecteurs à [**8**] pour plus de détails sur le point de vue de la géométrie convexe dans l'étude de l'arithmétique des variétés toriques, et à [**34**] pour la géométrie d'Arakelov (notamment la théorie de l'intersection arithmétique) des variétés toriques.

5. Cas arithmétique

Dans ce paragraphe, on suppose que k est un corps de nombres. On désigne par Σ_k l'ensemble des places de k. Pour toute place $\sigma \in \Sigma_k$, soit $|\cdot|_\sigma$ la valeur absolue sur k qui prolonge la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$ (dans ce cas-là la place σ est dite *archimédienne*) ou la valeur absolue p-adique pour certain nombre premier p, où la valeur absolue de p est $1/p$ (dans ce cas-là la place σ est dite *non archimédienne*). On désigne par k_σ le complété de k par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_\sigma$, sur lequel la valeur absolue $|\cdot|_\sigma$ s'étend de façon unique.

5.1. Fibré vectoriels adéliques sur un corps de nombres. — On appelle *fibré vectoriel adélique* sur $\operatorname{Spec} k$ la donnée $\overline{V}$ d'un espace vectoriel de rang fini V sur k et une famille de normes $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k}$, où chaque $\|\cdot\|_\sigma$ est une norme sur $V_\sigma := V \otimes_k k_\sigma$, qui satisfait aux conditions suivantes :

(a) si la place σ est non archimédienne, alors la norme $\|\cdot\|_\sigma$ est ultramétrique ;

(b) il existe une base $(e_i)_{i=1}^r$ de V sur k telle que, pour toute place $\sigma \in \Sigma_k$ sauf un nombre fini, on a

$$\forall\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \in k_\sigma^r, \quad \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\|_\sigma = \max(|\lambda_1|_\sigma,\ldots,|\lambda_r|_\sigma).$$

Les fibrés vectoriels adéliques sont des cas particuliers des espaces adéliques rigides introduits dans le chapitre 2. On renvoie les lecteurs à [**24**] pour une présentation détaillée de la théorie des fibrés vectoriels adéliques, voir aussi [**4**] pour le cadre classique de fibrés vectoriels hermitiens sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres.

Soit $\overline{V}$ un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} k$. Le rang de V sur k est appelé le *rang* de $\overline{V}$. Si $\overline{V}$ est de rang 1, on définit son *degré d'Arakelov* comme

$$\widehat{\deg}(\overline{V}) = -\sum_{\sigma\in\Sigma_k} [k_\sigma : \mathbb{Q}_\sigma] \ln \|s\|_\sigma,$$

où s est un élément non nul de V. Rappelons que la formule du produit

$$\forall\, a \in k^{\times}, \quad \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \ln |a|_\sigma = 0$$

montre que cette définition ne dépend pas du choix de s. Plus généralement, si $\overline{V} = (V, (\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k}))$ est un fibré vectoriel adélique de rang quelconque, on désigne par $\mathrm{dét}(\overline{V})$ la donnée $(\mathrm{dét}(V), (\|\cdot\|_{\sigma,\mathrm{dét}})_{\sigma\in\Sigma_k})$ et on définit le degré d'Arakelov de $\overline{V}$ comme $\widehat{\deg}(\mathrm{dét}(\overline{V}))$ (voir §2 du chapitre 2 *infra* pour la construction du degré d'Arakelov dans le cadre des espaces adéliques rigides).

5.2. Fibrés inversibles adéliques sur une variété arithmétique. — Soit $\pi : X \to \operatorname{Spec} k$ un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} k$. On appelle *fibré inversible adélique* sur X la donnée $\overline{L}$ d'un $\mathscr{O}_X$-module inversible L et d'une famille $(\varphi_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k}$ de métriques, où chaque φ_σ est une métrique continue sur L_σ, la tirée en arrière de L par le changement de base $X_{k_\sigma} \to X$, qui satisfait à la condition suivante : il existe un modèle entier $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ de (X, L) tel que, pour toute place non archimédienne σ sauf un nombre fini, la métrique φ_σ soit induite par le modèle $(\mathscr{X}_{\mathfrak{o}_{k_\sigma}}, \mathscr{L}_{\mathfrak{o}_{k_\sigma}})$ de (X_σ, L_σ), où $\mathfrak{o}_{k_\sigma}$ est l'anneau de valuation de k_σ. Rappelons qu'un modèle entier de (X, L) est par définition la donnée $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ d'un schéma projectif et plat $\mathscr{X}$ sur l'anneau des entiers algébriques dans k dont la fibre générique est isomorphe à X, ainsi qu'un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible $\mathscr{L}$ dont la restriction à la fibre générique est isomorphe à L. Il s'avère que

$$\pi_*(\overline{L}) := (H^0(X, L), (\|\cdot\|_{\varphi_\sigma,\sup})_{\sigma\in\Sigma_k})$$

est un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} k$.

5.3. Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique. — Si $\overline{L} = (L, (\varphi_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k})$ est un fibré inversible adélique sur X, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\overline{L}^{\otimes n}$ le fibré inversible adélique $(L^{\otimes n}, (n\varphi_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k})$, où $n\varphi_\sigma$ désigne la $n^{\text{ième}}$ puissance tensorielle de φ_σ, définie dans la formule (4).

Comme le degré d'Arakelov peut être calculé par une somme par rapport aux places de k, on déduit de la version métrique du théorème de Hilbert-Samuel le résultat suivant.

Théorème 5.1. — *Soient $\pi : X \to \operatorname{Spec} k$ un schéma projectif intègre de dimension d sur $\operatorname{Spec} k$ et $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur X. On* *suppose que L est ample et que les métriques φ_σ sont semi-positives, alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\widehat{\deg}(\pi_*(\overline{L}^{\otimes n}))}{n^{d+1}/(d+1)!}=\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{L})^{(d+1)}).$$

5.4. Cas sans hypothèse d'amplitude. — Dans le cas où L n'est pas ample, la méthode de dévissage ne s'applique plus. Pour contourner cette difficulté, on applique le théorème 4.3 au cas où la valeur absolue est triviale. On désigne par $|\cdot|_0$ la valeur absolue triviale sur k. Si $\overline{V}$ est un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} k$, on définit une norme $\|\cdot\|_{\overline{V}}$ comme suit (où on considère la valeur absolue triviale sur k). Pour tout $s\in V\setminus\{0\}$, soit $\widehat{\deg}(s)$ le nombre

$$-\sum_{\sigma\in\Sigma_k}[k_\sigma:\mathbb{Q}_\sigma]\ln\|s\|_\sigma,$$

appelé le *degré d'Arakelov* de s. Pour tout $s\in V$, soit $\|s\|_{\overline{V}}$ l'infimum de l'ensemble des $\lambda>0$ tels que s puisse s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients dans k des vecteurs non nuls de V de degré d'Arakelov au moins $-\ln(\lambda)$. Comme $|\cdot|_0$ est la valeur absolue triviale, la restriction de $\|\cdot\|_{\overline{V}}$ à $V\setminus\{0\}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, dont le cardinal ne dépasse pas le rang de V sur k. Ces valeurs sont précisément les minima successifs au sens de Thunder [**43**]. Ces minima sont naturellement liés aux invariants arithmétiques de $\overline{V}$ via le lemme de Siegel (voir [**25**]). Notamment on a

$$\frac{1}{\operatorname{rg}_k(V)}\bigg|\widehat{\deg}(\overline{V})+\int_{\mathbb{R}}t\,\mathrm{d}\operatorname{rg}_k(B(V,e^{-t}))\bigg|=O(\ln(\operatorname{rg}_k(V))),\tag{8}$$

où $B(V,e^{-t})$ désigne la boule fermée dans V de rayon e^{-t} et centrée à l'origine. En outre, si on désigne par $\widehat{h}^0(\overline{V})$ le logarithme du nombre des éléments $s\in V$ tels que $\sup_{\sigma\in\Sigma_k}\|s\|_\sigma\leqslant 1$, alors on a

$$\frac{1}{\operatorname{rg}_k(V)}\bigg|\widehat{h}^0(\overline{V})+\int_0^{+\infty}t\,\mathrm{d}\operatorname{rg}_k(B(V,e^{-t}))\bigg|=O(\ln(\operatorname{rg}_k(V))).\tag{9}$$

Soit $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur un k-schéma projectif et intègre X. On suppose que X possède un point rationnel régulier. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\overline{V}_n:=\pi_*(\overline{L}^{\otimes n})$. Il s'avère que la suite de normes $(\|\cdot\|_{\overline{V}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à la condition de sous-multiplicativité (7). Ainsi on déduit du théorème 4.3 le résultat suivant (voir [**6**, théorème 3.7]).

Théorème 5.2. — *Soient $\pi:X\to\operatorname{Spec} k$ un schéma projectif et intègre, de dimension d sur* $\operatorname{Spec} k$ *et $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur*

X tel que L soit gros. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\overline{V}_n := \pi_*(\overline{L}^{\otimes n})$. Il existe alors une fonction concave G sur le corps de Newton-Okounkov $\Delta(L)$ de l'algèbre graduée $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\deg}(\overline{V}_n)}{n^{d+1}/(d+1)!} = \int_{\Delta(L)} G(x)\,\mathrm{d}x, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\widehat{h}^0(\overline{V}_n)}{n^{(d+1)}/(d+1)!} = \int_{\Delta(L)} \max(G(x),0)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Références

[1] A. Abbes & T. Bouche – « Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique" », *Annales de l'Institut Fourier* **45** (1995), no. 2, p. 375–401.

[2] V. G. Berkovich – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[3] R. J. Berman & G. Freixas i Montplet – « An arithmetic Hilbert-Samuel theorem for singular hermitian line bundles and cusp forms », *Compositio Mathematica* **150** (2014), no. 10, p. 1703–1728.

[4] J.-B. Bost – « Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz) », *Astérisque* (1996), no. 237, p. Exp. No. 795, 4, 115–161, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/1995.

[5] S. Boucksom – « Corps d'Okounkov (d'après Okounkov, Lazarsfeld-Mustaţă et Kaveh-Khovanskii) », *Astérisque* (2014), no. 361, p. Exp. No. 1059, vii, 1–41.

[6] S. Boucksom & H. Chen – « Okounkov bodies of filtered linear series », *Compositio Mathematica* **147** (2011), no. 4, p. 1205–1229.

[7] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1983, Algèbre commutative. Chapitre 8. Dimension. Chapitre 9. Anneaux locaux noethériens complets.

[8] J. I. Burgos Gil, P. Philippon & M. n. Sombra – « Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights », *Astérisque* (2014), no. 360, p. vi+222.

[9] J. I. Burgos Gil, P. Philippon & M. n. Sombra – « Heights of toric varieties, entropy and integration over polytopes », in *Geometric science of information*, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 9389, Springer, Cham, 2015, p. 286–295.

[10] J. I. Burgos Gil, P. Philippon & M. n. Sombra – « Successive minima of toric height functions », *Annales de l'Institut Fourier* **65** (2015), no. 5, p. 2145–2197.

[11] A. Chambert-Loir – « Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **595** (2006), p. 215–235.

[12] A. Chambert-Loir & A. Ducros – « Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich », arXiv :1204.6277.

[13] H. Chen – « Arithmetic Fujita approximation », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **43** (2010), no. 4, p. 555–578.

[14] H. Chen – « Convergence des polygones de Harder-Narasimhan », *Mémoires de la Société Mathématique de France. Nouvelle Série* (2010), no. 120, p. 120.

[15] H. Chen – « Okounkov bodies : an approach of function field arithmetic », *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, **30** (2018), no. 3, p. 829–845.

[16] H. Chen & H. Ikoma – « On subfiniteness of graded linear series », *European Journal of Mathematics*, à paraître.

[17] H. Chen & C. Maclean – « Distribution of logarithmic spectra of the equilibrium energy », *Manuscripta Mathematica* **146** (2015), no. 3-4, p. 365–394.

[18] H. Chen & A. Moriwaki – « Extension property of semipositive invertible sheaves over a non-archimedean field », *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V.* **18** (2018), no. 1, p. 241–282.

[19] H. Chen & A. Moriwaki – *Arakelov geometry over adelic curves*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2258, Springer, Singapore, 2020.

[20] S. D. Cutkosky – « Zariski decomposition of divisors on algebraic varieties », *Duke Mathematical Journal* **53** (1986), no. 1, p. 149–156.

[21] D. Eisenbud – *Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995.

[22] T. Fujita – « Approximating Zariski decomposition of big line bundles », *Kodai Mathematical Journal* **17** (1994), no. 1, p. 1–3.

[23] W. Fulton – *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry.

[24] E. Gaudron – « Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global », *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **119** (2008), p. 21–95.

[25] E. Gaudron – « Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés », *Manuscripta Mathematica* **130** (2009), no. 2, p. 159–182.

[26] H. Gillet & C. Soulé – « Arithmetic intersection theory », *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1990), no. 72, p. 93–174 (1991).

[27] H. Gillet & C. Soulé – « An arithmetic Riemann-Roch theorem », *Inventiones Mathematicae* **110** (1992), no. 3, p. 473–543.

[28] A. Grothendieck – « Éléments de géométrie algébrique », rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné, *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* **4, 8, 11, 17, 24, 28, 32**.

[29] W. Gubler & K. Künnemann – « Positivity properties of metrics and delta-forms », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **752** (2019), p. 141–177.

[30] K. Kaveh & A. G. Khovanskiĭ – « Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory », *Annals of Mathematics. Second Series* **176** (2012), no. 2, p. 925–978.

[31] A. G. Khovanskiĭ – « The Newton polytope, the Hilbert polynomial and sums of finite sets », *Rossiĭskaya Akademiya Nauk. Funktsional'nyĭ Analiz i ego Prilozheniya* **26** (1992), no. 4, p. 57–63, 96.

[32] R. Lazarsfeld – *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Classical setting : line bundles and linear series.

[33] R. Lazarsfeld & M. Mustaţă – « Convex bodies associated to linear series », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **42** (2009), no. 5, p. 783–835.

[34] V. Maillot – « Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables », *Mémoires de la Société Mathématique de France. Nouvelle Série* (2000), no. 80, p. vi+129.

[35] G. Freixas i Montplet – « An arithmetic Hilbert-Samuel theorem for pointed stable curves », *Journal of the European Mathematical Society* **14** (2012), no. 2, p. 321–351.

[36] A. Moriwaki – « Continuity of volumes on arithmetic varieties », *Journal of algebraic geometry* **18** (2009), no. 3, p. 407–457.

[37] A. Okounkov – « Brunn-Minkowski inequality for multiplicities », *Inventiones Mathematicae* **125** (1996), no. 3, p. 405–411.

[38] H. Randriambololona – « Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les faisceaux cohérents », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **590** (2006), p. 67–88.

[39] R. Schneider – *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[40] C. Soulé – *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, With the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer.

[41] S. Takagi – « Fujita's approximation theorem in positive characteristics », *Journal of Mathematics of Kyoto University* **47** (2007), no. 1, p. 179–202.

[42] B. Teissier – « Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques », *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Séries A et B* **288** (1979), no. 4, p. A287–A289.

[43] J. L. Thunder – « An adelic Minkowski-Hlawka theorem and an application to Siegel's lemma », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **475** (1996), p. 167–185.

[44] G. Tian – « On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds », *Journal of Differential Geometry* **32** (1990), no. 1, p. 99–130.

[45] D. Witt Nyström – « Transforming metrics on a line bundle to the Okounkov body », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **47** (2014), no. 6, p. 1111–1161.

[46] X. Yuan – « Big line bundles over arithmetic varieties », *Inventiones Mathematicae* **173** (2008), no. 3, p. 603–649.

[47] X. Yuan – « On volumes of arithmetic line bundles », *Compositio Mathematica* **145** (2009), no. 6, p. 1447–1464.

[48] X. Yuan – « Volumes of arithmetic Okounkov bodies », *Mathematische Zeitschrift* **280** (2015), no. 3-4, p. 1075–1084.

4 mars 2020

Huayi Chen, Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche, Université Paris Diderot • *E-mail :* huayi.chen@imj-prg.fr
Url : webusers.imj-prg.fr/~huayi.chen/