THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Chen Huayi

pour obtenir

le grade de : Docteur de l'École Polytechnique
Spécialité : Mathématiques

Positivité en géométrie algébrique et en géométrie d'Arakelov :

application à l'algébrisation et à l'étude asymptotique des polygones de Harder-Narasimhan

Thèse présentée le 1er décembre 2006 devant la commission d'examen :

Jean-Benoît	Bost	Directeur de thèse
Antoine	Chambert-Loir	Examinateur
Pierre	Colmez	Président du jury
Damian	Rössler	Rapporteur
Christophe	Soulé	Rapporteur

Introduction

Le but de cette thèse est d'étudier diverses notions de *positivité*, dans le cadre de la géométrie algébrique et de la géométrie d'Arakelov, pour un fibré vectoriel sur une variété algébrique projective, et de développer des applications à l'étude de l'algébricité des sous-schémas formels des variétés algébriques et du comportement asymptotique des polygones de Harder-Narasimhan.

Hartshorne [53] a démontré que, si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel propre et régulier sur un corps k et si le sous-schéma de définition Y de $\widehat{V}$ est de dimension ≥ 1, connexe, localement une intersection complète dans $\widehat{V}$, et dont le fibré normal dans $\widehat{V}$ est *ample*, alors le degré de transcendence de $k(\widehat{V})/k$ est inférieur ou égal à la dimension de $\widehat{V}$. Il en déduit que si Y est une sous-variété fermée d'une variété algébrique X et si $\widehat{V}$ est un sous-schéma formel fermé de $\widehat{X}_Y$, alors $\widehat{V}$ est algébrique. La condition d'amplitude de $N_Y\widehat{V}$ peut être affaiblie dans le contexte de la géométrie analytique complexe par la condition de 1-*positivité*. Dans cette thèse, on introduit une condition de positivité, appelée P_3, plus faible que l'amplitude, et on montre que le résultat d'algébricité de Hartshorne reste vrai lorsque l'on suppose que $N_Y\widehat{V}$ satisfasse P_3. Dans le cadre de la géométrie algébrique complexe, cette condition est aussi plus faible que la 1-positivité. La démonstration s'inspire des techniques de "polynômes auxilliaires" de l'approximation diophantienne, sous la forme de la *méthode des pentes* due à J.-B. Bost. En outre, on développe un critère numérique de la condition P_3 qui est la négativité de la limite d'une suite de pentes maximales, qui définit la *pente maximale asymptotique* du **dual** du fibré normal $N_Y\widehat{V}$. La démonstration de l'existence de cette limite de pentes maximales repose sur des variantes du lemme de Fekete sur les suites sous-additives.

Il s'avère que le même type d'argument, combiné avec des techniques combinatoires, permet d'établir, dans le cadre de la géométrie algébrique et dans le cadre de la géométie d'Arakelov, la convergence des polygones de Harder-Narasimhan (normalisés) d'une algèbre graduée en fibrés vectoriels sur une courbe projective et lisse, ou en fibré vectoriels hermitiens sur le spectre d'un anneaux des entiers algébriques. La limite des polygones est une courbe concave sur $[0,1]$ qui est en général non-triviale. La démonstration de la partie arithmétique utilise une nouvelle majoration de la pente maximale du produit tensoriel de plusieurs fibrés vectoriels hermitiens établie dans cette thèse.

L'organisation de cette thèse est la suivante :

Dans le premier chapitre, on rappelle diverses conventions et définitions, et des résultats classiques qui seront utilisés par la suite.

On introduit dans le deuxième chapitre la condition appelée P_3 pour un couple (X,E) formé d'une variété projective X de dimension ≥ 1 sur un corps k, et d'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E : on dit que la condition $P_3(X,E)$ est vérifiée, si *pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L sur X*, ou de façon équivalente pour un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample L sur X, *il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $i > \lambda d$, l'espace $H^0(X, S^i(E^\vee)\otimes L^{\otimes d})$ est réduit à* 0. Par la dualité de Serre, si X est une courbe algébrique lisse et si le corps k est de caractéristique

0, alors la condition P_3 est équivalente à l'amplitude de E sur X. En appuyant sur un résultat dû à Hartshorne, qui affirme l'équivalence de l'amplitude et la p-amplitude d'un fibré vectoriel sur une courbe projective lisse définie sur un corps de caractéristique $p > 0$, on démontre que, dans le cas où X est une courbe projective lisse sur un corps de caractéristique positive, l'amplitude de E implique la condition $P_3(X, E)$. Dans le cas où X est de dimension > 1, en coupant X par des hyperplanes génériques, on montre que l'amplitude de E sur X implique celle de la restriction de E sur une courbe générique dans X et donc la condition $P_3(X, E)$. En donnant un contre exemple, qui consiste en un produit de deux variétés projectives et un fibré inversible produit tensoriel externe, on montre que la condition P_3 est strictement plus faible que l'amplitude. D'autre part, dans le cadre de la géométrie algébrique complexe, on montre que la condition P_3 est plus faible que la 1-positivité.

Dans la deuxième partie du chapitre, on cherche à étudier la condition de positivité d'un fibré vectoriel E sur une variété projective X de dimension ≥ 1 dans la situation relative où est donné un morphisme projectif et surjectif π de X vers une courbe projective lisse C. En utilisant une généralisation du lemme de Fekete sur les suites sous-additives, on démontre que, si L est un fibré inversible sur X ample relativement à π, alors la suite $\left(\frac{\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}))}{n}\right)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\mu^\pi_{\max}(L)$ et que l'on appelle la *pente maximale asymptotique* de L (relativement à π). La sur-additivité de $\mu^\pi_{\max}(L)$ par rapport à L (pour le produit tensoriel) nous permet d'étendre la notion de la pente maximale asymptotique pour un fibré inversible quelconque sur X. Cette pente maximale asymptotique est liée à la positivité de L : on a

$$\mu^\pi_{\max}(L) > 0 \Longrightarrow \mu^\pi_{\max}(L^\vee) < 0 \Longrightarrow P_3(X, L).$$

C'est un critère numérique assurant la condition P_3. On donne un exemple du calcul de la pente maximale asymptotique $\mu^\pi_{\max}(L)$ en étudiant le cas où X est un schéma abélien sur C. Par passage au fibré inversible canonique sur le fibré projectif, on étend la définition de la pente maximale asymptotique à un fibré vectoriel sur X et on démontre l'analogue du critère numérique ci-dessus pour la condition P_3.

La dernière partie du chapitre est consacrée aux applications des résultats précédents aux problèmes d'algébricité. On établit l'énoncé suivant :

Soient X une variété projective sur un corps k et Y une sous-variété fermée lisse de X. Soit $\widehat{V}$ un sous-schéma formel lisse du complété formel $\widehat{X}_Y$ de X le long de Y, admettant Y comme schéma de définition. Si le fibré normal $N_Y\widehat{V}$ à Y dans $\widehat{V}$ satisfait à la condition P_3, alors $\widehat{V}$ est algébrique.

Ce critère d'algébrisation, combiné aux divers critères assurant la condition P_3, permet d'améliorer des résultats sur l'étude de la relation entre équivalence formelle et équivalence étale des germes de plongement de variétés projectives. Plus précisément, si Y est une variété projective lisse sur un corps k plongée dans deux variétés lisses X_1 et X_2 qui admet des *voisinages formels* $\widehat{X_1}_Y$ et $\widehat{X_2}_Y$ dans X_1 et X_2 isomorphes de sorte que $N_Y\widehat{X_1}_Y$ satisfasse à la condition P_3, alors il existe des *voisinage étales* de Y dans X_1 et X_2 isomorphes. Ceci renforce un résultat de Gieseker (valable sous une hypothèse d'amplitude sur le fibré normal), et établit des versions algébriques du théorème de Commichau-Grauert et Hirschowitz (démontrés dans un cadre analytique).

Le troisième chapitre est consacré à l'analogue dans le cadre de la géométrie d'Arakelov, des définitions et des résultats établis dans le deuxième chapitre. On montre d'abord que, si $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est une variété arithmétique et si $\overline{\mathscr{L}}$ est un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample sur $\mathscr{X}_K$, alors la suite $\left(\frac{\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}))}{n}\right)_{n\geq 1}$ admet une limite $\widehat{\mu}^\pi_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$

dans $\mathbb{R}$. On appelle cette limite la *pente maximale asymptotique arithmétique* du fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$. L'application $\overline{\mathscr{L}} \mapsto \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ est aussi sur-additive par rapport à $\overline{\mathscr{L}}$ (pour le produit tensoriel), donc se prolonge sur l'ensemble des fibrés inversibles hermitiens généraux sur $\mathscr{X}$. Par passage au fibré inversible canonique (muni de la métrique de Fubini-Study) on peut définir la pente maximale asymptotique arithmétique d'un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$.

On propose comme analogue de P_3 la condition suivante : on dit qu'un fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $\mathscr{X}$ est *faiblement positif* si pour tout fibré inversible hermitien $\overline{L}$ sur $\mathscr{X}$ (ou de façon équivalente, pour un fibré inversible hermitien $\overline{L}$ arithmétiquement ample sur $\mathscr{X}$) il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, la norme de la plus petite section non-nulle de $S^n\overline{E}^{\vee} \otimes \overline{L}^{\otimes d}$ croît exponentiellement par rapport à n. Cette condition est plus faible que l'amplitude arithmétique de $\overline{E}$ sur $\mathscr{X}$, et on a aussi un critère numérique comme ci-dessous :

si $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}^{\vee}) < 0$, *alors* $\overline{E}$ *est faiblement positif.*

Dans la dernière partie du chapitre on propose un critère d'algèbricité des sous-schémas formels et on en profite pour démontrer une généralisation d'un théorème de Borel sur la rationnalité d'une série formelle :

Soit φ *un élément dans* $\mathbb{Z}[\![T_1, \cdots, T_n]\!]$ *qui définit une fonction méromorphe sur un voisinage de la boule fermée* $\overline{B(0,R)}$ *de* $\mathbb{C}^n$. *Si* $R > \sqrt{n}$, *alors* φ *est rationnel.*

Après avoir terminé la rédaction de ce travail et l'avoir soumis comme thèse, l'auteur a appris que ce résultat avait été établi antérieurement par Y. André, sous une forme plus générale qui généralise le théorème de Borel-Dwork, dans son ouvrage [3], Chapter VIII.

Le quatrième chapitre peut être considéré comme un préliminaire à la seconde moitié de la thèse. La notion de la *filtration de Harder-Narasimhan,* ou de la *filtration canonique* d'un fibré vectoriel sur une courbe projective lisse remonte à l'article [51] de Harder et Narasimhan. Son avatar en géométrie d'Arakelov est introduit par Stuhler [85] et Grayson [42] pour un fibré vectoriel hermitien sur le spectre d'un anneau des entiers algébriques. Cette filtration, sous sa forme classique, est indexée par un ensemble fini ordonné, donc est en fait un drapeau du fibré vectoriel (hermitien) en question. Apparamment cette construction n'a aucune fonctorialité par rapport au fibré vectoriel (hermitien) considéré, mais on montre dans ce chapitre que, si on munit les sous-fibrés vectoriels dans ce drapeau de poids convenables, on obtient une filtration indexée par $\mathbb{R}$ en sous-fibrés vectoriels du fibré vectoriel en question, et cette nouvelle construction est fonctorielle. D'autre part, le foncteur, de la catégorie des fibrés vectoriels (hermitiens), vers la catégorie des espaces vectoriels sur le corps des fonctions rationnelles sur le schéma de base, défini par la restriction sur le point générique, préserve le rang. Donc la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel (hermitien) induit par ce foncteur une $\mathbb{R}$-filtration sur sa fibre générique. On peut donc ramener l'étude des filtrations de Harder-Narasimhan des fibrés vectoriels (hermitiens) en celle des $\mathbb{R}$-filtrations des espaces vectoriels.

On introduit dans le premier paragraphe la théorie générale des filtrations dans une catégorie quelconque. On se concentre dans le deuxième paragraphe à l'étude des filtrations des espaces vectoriels sur un corps. La mesure de probabilité et le polygone associés à une $\mathbb{R}$-filtration sont aussi discutés dans ce paragraphe. Dans le troisième paragraphe, on propose des axiomes sur une catégorie exacte pour que le formalisme de filtration de Harder-Narasimhan puisse s'établir. Enfin dans le dernier paragraphe on donne quelques exemples.

Le cinquième chapitre est consacré à la majoration de la pente maximale d'un produit tensoriel de fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ que l'on utilisera dans le dernier chapitre de la thèse.

Soit $(\overline{E}_i)_{1\leq i\leq n}$ *une famille finie de fibrés vectoriels hermitiens non-nuls sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. *Si on note* $\overline{E}=\overline{E}_1\otimes\cdots\otimes\overline{E}_n$, *alors*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})\leq\sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i)+\log\operatorname{rg}(E_i)\Big). \tag{1}$$

La démonstration repose sur la théorie des invariants. On cherche à majorer le degré d'Arakelov d'un sous-fibré inversible hermitien $\overline{M}$ de $\overline{E}$. Si M_K est semi-stable pour l'action du groupe algébrique $\mathbb{SL}(E_{1,K})\times\cdots\times\mathbb{SL}(E_{n,K})$, alors la théorie classique des invariants fournit une section d'une puissance tensorielle de $E_K^\vee$ dont la norme est connue ; sinon le critère de Hilbert-Mumford et les résultats de Kempf [61] reformulés par Ramanan-Ramanathan [77] dans la théorie géométrique des invariants nous ramènent au cas précédent.

C'est dans le dernier chapitre de la thèse qu'est démontrée la convergence des polygones de Harder-Narasimhan. Comme remarqué dans le quatrième chapitre, si $\mathscr{B}=\bigoplus_n\mathscr{B}_n$ est une algèbre graduée en fibrés vectoriels (resp. fibré vectoriels hermitiens) sur une courbe projective lisse C (resp. le spectre d'un anneau $\mathcal{O}_K$ des entiers algébriques) de corps des fonctions rationnelles K, alors la filtration de Harder-Narasimhan de chaque $\mathscr{B}_n$ induit une $\mathbb{R}$-filtration sur $B_n:=\mathscr{B}_{n,K}$. Si $\mathscr{B}$ est l'une des algèbres suivantes :

1) $\bigoplus_{n\geq 0}\pi_*(L^{\otimes n})$, où $\pi:X\rightarrow C$ est un morphisme projectif et surjectif d'une variété projective sur C et L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample relativement à π,
2) $\bigoplus_{n\geq 0}\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$, où $\pi:\mathscr{X}\rightarrow\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ est une variété arithmétique, et $\overline{\mathscr{L}}$ est un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample sur $\mathscr{X}_K$,

alors il existe une fonction $f:\mathbb{Z}_{>0}\rightarrow\mathbb{R}_{\geq 0}$ avec $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f(n)/n=0$ telle que $B=\bigoplus_n B_n$, munie des filtrations induites comme ci-dessus, soit une *K-algèbre graduée f-quasi-filtrée*. En particulier, la démonstration du cas 2) fait appel à l'inégalité (1) démontrée dans le chapitre précédent.

Le résultat principal du dernier chapitre est la suivante :

Soient $f:\mathbb{Z}_{>0}\rightarrow\mathbb{R}_{\geq 0}$ *une fonction telle que* $\lim\limits_{n\rightarrow+\infty}f(n)/n=0$, *$K$ un corps et* $B=\bigoplus_{n\geq 0}B_n$ *une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée, intègre, de type fini sur K. Si B_n et non-nul pour n suffisamment grand et si* $\limsup\limits_{n\rightarrow+\infty}\dfrac{\mu_{\max}(B_n)}{n}<+\infty$, *alors les polygones normalisés des B_n convergent uniformément vers une courbe concave sur* $[0,1]$.

En appuyant sur la normalisation de Noether, on se ramène au cas où B est une algèbre symétrique d'un espace vectoriel de rang fini sur K. Ensuit, la construction de mesures discrètes sur des produits d'ensembles de points à coordonnées entières dans des simplexes dont les marginales par les projections et l'addition sont équidistribuées nous permet d'obtenir la presque sur-additivité (par rapport à n) des mesures associées (normalisées) aux B_n. Enfin, une variante du lemme de Fekete que l'on a utilisée dans le troisième chapitre pour démontrer l'existence de la pente maximale asymptotique permet d'obtenir la convergence vague des mesures associées aux B_n et donc la convergence uniforme des polygones associés aux B_n.

Des contre-exemples montrent l'impossibilité de généraliser le résultat ci-dessus au cas où B n'est pas intègre, ou au cas d'un module gradué quasi-filtré.

Dans le dernier paragraphe, on redémontre le théorème de convergence pour un module bigradué, en utilisant la méthode de "*séries de Poincaré en deux variables*" inspirée par Faltings et Wüstholz [30]. Bien que cette méthode ne soit valable que pour un cas très restrictif (bigradué), elle nous permet de calculer explicitement la limite des polygones. En particulier, lorsque $B=K[X,Y]$ est l'algèbre des polynômes en deux variables, où X est Y sont de bidegré

$(1, \lambda)$ et $(1, \mu)$, respectivement, avec $\lambda \leq \mu$, alors la courbe limite est $\mu x - \frac{\mu-\lambda}{2} x^2$. Cela montre que la limite des polygones est en général non-triviale.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

1.1 Notations

Dans cette thèse, sauf mention au contraire, tous les anneaux sont supposés être commutatifs et unifères.

Soit k un corps. On appelle *variété algébrique* sur k tout schéma intègre et de type fini sur $\operatorname{Spec} k$ (donc quasi-compact et quasi-séparé sur $\operatorname{Spec} k$). On appelle *courbe algébrique* sur k toute variété algébrique sur k qui est de dimension 1.

On désigne par pt (resp. $\mathrm{pt}_{\mathbb{C}}$) l'espace annelé dont l'espace topologique sous-jacent est un singleton et dont le faisceau d'anneaux structurel est le faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}$ (resp. $\underline{\mathbb{C}}$).

Si U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^d$, on désigne par $\mathcal{O}_U^{\mathrm{diff}}$ le faisceau des germes de fonctions lisses à valeurs réelles sur U. C'est une algèbre sur le faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}$ sur U. La structure de $\underline{\mathbb{R}}$-algèbre sur $\mathcal{O}_U^{\mathrm{diff}}$ détermine un morphisme de $(U, \mathcal{O}_U^{\mathrm{diff}})$ vers pt.

On appelle *variété lisse* (réelle) tout espace annelé $X = (|X|, \mathcal{O}_X^{\mathrm{diff}})$ sur pt dont l'espace topologique sous-jacent $|X|$ est paracompact (cf. [39] II.3.2) et qui est localement isomorphe à un pt-espace annelé (appelé une *carte locale*) de la forme $(U, \mathcal{O}_U^{\mathrm{diff}})$, où U est une partie ouverte non-vide d'un espace affine $\mathbb{R}^d$ (on dit que cette carte locale a pour dimension d). On appelle la *dimension* de X la borne supérieure des dimensions des cartes locales de X, notée $\dim X$. Si $|X|$ est connexe, alors toutes les cartes locales de X ont la même dimension. On dit que X est *équidimensionnelle* si toutes les composantes connexes de X ont la même dimension.

Si V est une partie ouverte de $\mathbb{C}^d$, on désigne par $\mathcal{O}_V^{\mathrm{an}}$ le faisceau des germes de fonctions analytiques complexes sur V ; c'est une algèbre sur $\underline{\mathbb{C}}$. Si on considère V comme une partie ouverte de $\mathbb{R}^{2d}$, on peut aussi considérer la $\underline{\mathbb{R}}$-algèbre $\mathcal{O}_V^{\mathrm{diff}}$ sur V. Evidemment $(V, \mathcal{O}_V^{\mathrm{an}})$ est un espace annelé sur $\mathrm{pt}_{\mathbb{C}}$.

On appelle *variété analytique complexe* tout espace annelé $X = (|X|, \mathcal{O}_X^{\mathrm{an}})$ sur $\mathrm{pt}_{\mathbb{C}}$ dont l'espace topologique sous-jacent $|X|$ est paracompact et qui est localement isomorphe à un $\mathrm{pt}_{\mathbb{C}}$-espace annelé (appelé une *carte locale*) de la forme $(V, \mathcal{O}_V^{\mathrm{an}})$ où V est une partie ouverte non-vide d'un espace affine $\mathbb{C}^d$ (on dit que cette carte locale a pour dimension complexe d). On appelle la *dimension complexe* de X la borne supérieure des dimensions des cartes locales de X, notée $\dim_{\mathbb{C}} X$. Si $|X|$ est connexe, alors toutes les cartes locales de X ont la même dimension complexe. On dit que X est *équidimensionnelle* si toutes les composantes connexes de X ont la même dimension.

Si X est une variété analytique complexe, en recollant les faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_V^{\mathrm{diff}}$, où V parcourt les cartes locales de X, on obtient un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X^{\mathrm{diff}}$ sur $|X|$, appelé le *faisceau des germes de fonctions lisses* sur X. Les sections de $\mathcal{O}_X^{\mathrm{diff}}$ sont appelées des *fonctions* *lisses.* C'est une $\underline{\mathbb{R}}$-algèbre. L'espace annelé $X_{\mathbb{R}} = (|X|, \mathcal{O}_X^{\mathrm{diff}})$ est une variété lisse réelle. On désigne par $\dim_{\mathbb{R}} X$ sa dimension. On a la relation $\dim_{\mathbb{R}} X = 2 \dim_{\mathbb{C}} X$. D'autre part, on a un homomorphisme naturel de $\underline{\mathbb{C}}$-algèbres de $\mathcal{O}_X^{\mathrm{an}}$ vers $\mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}}$.

On appelle *schéma formel* (noethérien et adique) tout espace topologiquement annelé $\mathfrak{X} = (|\mathfrak{X}|, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ dont l'espace topologique sous-jacent $|\mathfrak{X}|$ est quasi-compact et qui est localement isomorphe au spectre formel d'un anneau noethérien adique (cf. [50] I.10). Le faisceau d'anneaux topologiques $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ admet un *plus grand idéal de définition* $\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}$; c'est le seul idéal de définition $\mathfrak{I}$ tel que le schéma (usuel) $(|\mathfrak{X}|, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I})$ soit réduit. Le schéma $\mathfrak{X}_0 = (|\mathfrak{X}|, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}})$ est appelé le *schéma de définition* du schéma formel $\mathfrak{X}$. Le faisceau d'anneaux sous-jacent à $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est isomorphe à la limite projective $\varprojlim_n \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}^n$. Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathfrak{X}_n = (|\mathfrak{X}|, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}^{n+1})$ est un schéma, appelé le $n^{\text{ième}}$ *voisinage infinitésimal* de $\mathfrak{X}_0$ dans $\mathfrak{X}$. L'espace localement annelé sous-jacent à $\mathfrak{X}$ est isomorphe à la limite inductive $\varinjlim_n \mathfrak{X}_n$ dans la catégorie des espaces localement annelés.

Si X est un schéma noethérien et si Y est un sous-schéma fermé réduit de X défini par l'idéal cohérent I, on appelle le *complété formel* de X le long de Y le schéma formel (noethérien et adique) $(|Y|, \varprojlim_n (\mathcal{O}_X/I^n)|_Y)$, noté $\widehat{X}_Y$. Le schéma formel $\widehat{X}_Y$ a pour schéma de définition Y. Pour tout entier $n \geq 1$, le $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de Y dans $\widehat{X}_Y$ est le sous-schéma fermé de X défini par l'idéal cohérent I^{n+1}.

Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel noethérien et $\mathfrak{J}$ un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Si on désigne par $|\mathfrak{Y}|$ le support du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}} + \mathfrak{J})$ (c'est un sous-espace topologique fermé de $|\mathfrak{X}|$), l'espace topologiquement annelé $\mathfrak{Y} = (|\mathfrak{Y}|, (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J})|_{|\mathfrak{Y}|})$ est un schéma formel noethérien, appelé un *sous-schéma formel* (fermé) de $\mathfrak{X}$. On remarque que $\mathfrak{Y}$ a pour schéma de définition $|\mathfrak{X}|$ si et seulement si $\mathfrak{J}$ est contenu dans le plus grand idéal de définition $\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$.

Si p est un nombre premier strictement positif, pour toute algèbre A sur $\mathbb{F}_p$ on désigne par $F_A : A \to A$ l'*endomorphisme de Frobenius* qui envoie x en x^p. Si $X : \mathbf{Alg}_{\mathbb{F}_p} \to \mathbf{Ens}$ est un foncteur de la catégorie des $\mathbb{F}_p$-algèbres vers la catégorie des ensembles, on désigne par $F_X : X \to X$ la transformation naturelle de X vers lui-même qui associe à toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A l'application

$$X(F_A) : X(A) \longrightarrow X(A),$$

où $F_A : A \to A$ est l'endomorphisme de Frobenius. On appelle F_X le *morphisme de Frobenius absolu* de X. Si B est une algèbre sur $\mathbb{F}_p$ et si $X = \operatorname{Spec} B$ est le schéma affine défini par B, alors $F_X = \operatorname{Spec} F_B$. Il n'est généralement pas vrai que le morphisme de Frobenius absolu F_X soit fini, mais lorsque X est un schéma localement de type fini sur un *corps parfait* k (à savoir, l'endomorphisme de Frobenius $F_k : k \to k$ est un automorphisme), le morphisme F_X est fini et surjectif.

Soit k une extension de $\mathbb{F}_p$. Si $X : \mathbf{Alg}_{\mathbb{F}_p} \to \mathbf{Ens}$ est un foncteur, et si $\varphi : X \to \operatorname{Spec} k$ est un morphisme de fonteurs, on désigne par $X^{(p)}$ le produit fibré (dans la catégorie des foncteurs covariants de $\mathbf{Alg}_{\mathbb{F}_p}$ vers $\mathbf{Ens}$ qui s'identifie à la catégorie des préfaisceaux sur $\mathbf{SchAff}_{\mathbb{F}_p}$ — la catégorie des $\mathbb{F}_p$-schémas affines)

$$\begin{tikzcd} X^{(p)} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi^{(p)}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r, "\operatorname{Spec} F_k"'] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

Comme $\operatorname{Spec} F_k \circ \varphi = \varphi \circ F_X$, il existe un unique morphisme Fr de X vers $X^{(p)}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "\mathrm{Fr}"] \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& X^{(p)} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\
& \operatorname{Spec} k \arrow[r, "\operatorname{Spec} F_k"'] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Le morphisme Fr est appelé le *morphisme de Frobenius relatif*. Lorsque k est un corps parfait, le morphisme $\pi : X^{(p)} \to X$ est un isomorphisme de foncteurs sur $\mathbf{Alg}_{\mathbb{F}_p}$ (attention : ce n'est pas un isomorphisme de k-foncteurs si $k \neq \mathbb{F}_p$ et si X est non-vide car dans ce cas-là le morphisme $\varphi^{(p)} : X^{(p)} \to \operatorname{Spec} k$ ne satisfait pas $\varphi^{(p)} = \varphi \circ \pi$).

1.2 Rappels sur les faisceaux de modules

1.2.1 Torsion dans un module sur un anneau, modules sans torsion

On rappelle dans ce sous-paragraphe quelques notations et résultats concernant les modules sans torsion sur un anneau commutatif unifère. La référence est [64].

Définition 1.2.1 Soient A un anneau et K son *anneau total des fractions* (à savoir $K = S^{-1}A$, où S est la partie multiplicative des non-diviseurs de zéro de A). Pour tout A-module M, on désigne par M_{tor} le noyau de l'homomorphisme canonique $M \to K \otimes_A M$, appelé le *sous-module de torsion* de M. On dit qu'un A-module M est *sans torsion* si $M_{\mathrm{tor}} = 0$, i.e., l'homomorphisme canonique $M \to K \otimes_A M$ est injectif.

Lemme 1.2.2 *Soient A un anneau réduit et $a \in A$. Si pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A, l'image canonique de a dans $A_{\mathfrak{p}}$ est non-nulle, alors a est un non-diviseur de zéro dans A. La réciproque est vraie lorsque A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.*

Démonstration. L'anneau A étant réduit, pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$, $A_{\mathfrak{p}}$ est un corps. Par conséquent, pour tout élément x dans A, l'image canonique de x dans $A_{\mathfrak{p}}$ est nulle si et seulement si $x \in \mathfrak{p}$.

"$\Longrightarrow$" : Si $b \in A$ est tel que $ab = 0$, alors pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A, on a $b \in \mathfrak{p}$ puisque $a \notin \mathfrak{p}$. Par conséquent, on a $b = 0$ car A est réduit.

"$\Longleftarrow$" Soient $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leq i \leq n}$ les idéaux premiers minimaux de A. S'il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $a \in \mathfrak{p}_i$, en choisissant $b \in \Big(\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j\Big) \setminus \mathfrak{p}_i$, on a $ab \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathfrak{p}_j = \{0\}$. Cela est absurde car a est un non-diviseur de zéro. $\square$

Lemme 1.2.3 *Soit A un anneau de dimension ≤ 0 — c'est-à-dire, un anneau dont tout idéal premier est un idéal maximal. On suppose que l'anneau A n'admette qu'un nombre fini d'idéaux maximaux $(\mathfrak{m}_i)_{1 \leq i \leq n}$. Alors A s'identifie canoniquement à l'anneau produit $A_{\mathfrak{m}_1} \times \cdots \times A_{\mathfrak{m}_n}$.*

Démonstration. En effet, on a un homomorphisme canonique φ de A vers $B = A_{\mathfrak{m}_1} \times \cdots \times A_{\mathfrak{m}_n}$. En tant que A-module, B s'identifie canoniquement à $A_{\mathfrak{m}_1} \oplus \cdots \oplus A_{\mathfrak{m}_n}$. Comme A est un anneau de dimension 0 on a $(A_{\mathfrak{m}_i})_{\mathfrak{m}_j} = 0$ pour $i \neq j$. En effet, $A_{\mathfrak{m}_i}$ est un anneau local de dimension

0, donc son idéal maximal est nilpotent. Si $\mathfrak{m}_j$ est un idéal maximal autre que $\mathfrak{m}_i$, alors $A \setminus \mathfrak{m}_j$ contient un élément dans $\mathfrak{m}_i$. Donc $(A_{\mathfrak{m}_i})_{\mathfrak{m}_j} = 0$. Par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\varphi_{\mathfrak{m}_i}$ est un isomorphisme, i.e., φ est un isomorphisme de A-modules, et donc un isomorphisme de A-algèbres. □

Proposition 1.2.4 *Soit A un anneau réduit. On suppose que l'anneau A n'admette qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leq i \leq n}$. Alors l'anneau total des fractions de A s'identifie canoniquement à $A_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times A_{\mathfrak{p}_n}$.*

Démonstration. Soit S l'ensemble des non-diviseurs de zéros de A. Comme A est réduit et n'admet qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux, il n'a pas d'idéal associé immergé (cf. [19] chap. IV, §2 n°3, Remarque) compte tenu du lemme 1.2.2. Par conséquent, $S = A \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n)$. Donc $S^{-1}A$ est un anneau de dimension ≤ 0 dont l'ensemble des idéaux maximaux est $\{S^{-1}\mathfrak{p}_1, \cdots, S^{-1}\mathfrak{p}_n\}$. Le lemme 1.2.3 montre que $S^{-1}A \cong A_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times A_{\mathfrak{p}_n}$. □

Proposition 1.2.5 *Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. Si on désigne par K (resp. L) l'anneau total des fraction de A (resp. de $S^{-1}A$), on a un homomorphisme canonique injectif de $S^{-1}K$ dans L. Cet homomorphisme devient un isomorphisme lorsque A et réduit et n'admet qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.*

Démonstration. Soient T la partie multiplicative des non-diviseurs de zéro dans A, U la partie multiplicative des non-diviseurs de zéro de $S^{-1}A$. Si a est un élément dans T, alor $a/1$ est dans U. En effet, si $b/s \in S$ est tel que $ab/s = 0$, alors il existe $t \in S$ tel que $abt = 0$. Comme a est un non-diviseur de zéro on a $bt = 0$, i.e., $b/s = 0$ dans $S^{-1}A$. Par conséquent, on a un homomorphisme de $S^{-1}T^{-1}A = T^{-1}S^{-1}A$ vers $U^{-1}S^{-1}A$ puisque l'image canonique de T dans $S^{-1}A$ est contenue dans U. De plus, cet homomorphisme est injectif car U consiste en des non-diviseurs de zéro de $S^{-1}A$.

Si A est réduit et n'admet qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$. Alors K est isomorphe à $A_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times A_{\mathfrak{p}_n}$. Si on suppose que $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leq i \leq k}$ soient les idéaux premiers minimaux de A ne rencontrant pas S, alors $S^{-1}K$ est isomorphe à $A_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times A_{\mathfrak{p}_k}$. D'autre part, L est isomorphe à $(S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times (S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}_k}$ qui est naturellement isomorphe à $A_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times A_{\mathfrak{p}_k}$. □

Proposition 1.2.6 *Soient A un anneau réduit qui n'admet qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux, M un A-module. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1) M est un A-module sans torsion ;

2) pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module sans torsion ;

3) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module sans torsion.

Démonstration. Soit K l'anneau total des fractions de A. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $K_{\mathfrak{p}}$ est l'anneau total des fractions de $A_{\mathfrak{p}}$, et on a $(K \otimes_A M)_{\mathfrak{p}} \cong K_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$. La proposition résulte donc du [19] chap. II §3 n°3 Théorème 1. □

Proposition 1.2.7 *Si A est un anneau et $u : N \to M$ est un homomorphisme de A-modules, alors u envoie N_{tor} dans M_{tor}. En particulier, si M est un A-module sans torsion et si N est un sous-A-module de M, alors N est aussi sans torsion.*

Démonstration. Soit K l'anneau total des fractions de A. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[d, "\psi"] \\ K \otimes_A N \arrow[r] & K \otimes_A M \end{tikzcd}$$

où $\varphi : N \to K \otimes N$ et $\psi : M \to K \otimes M$ sont des homomorphismes canoniques. Par conséquent, l'homomorphisme u envoie donc $N_{\text{tor}} = \operatorname{Ker} \varphi$ dans $M_{\text{tor}} = \operatorname{Ker} \psi$. □

Proposition 1.2.8 *Soient A un anneau, K l'anneau total des fractions de A et M un A-module. L'homomorphisme canonique*

$$K \otimes_A M \longrightarrow K \otimes_A (M/M_{\text{tor}})$$

est un isomorphisme. Le A-module M/M_{tor} est sans torsion.

Démonstration. On a une suite exacte à gauche

$$0 \longrightarrow M_{\text{tor}} \longrightarrow M \longrightarrow K \otimes_A M \ . \tag{1.1}$$

Comme K est un A-module plat, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow K \otimes_A M_{\text{tor}} \longrightarrow K \otimes_A M \longrightarrow K \otimes_A M \ .$$

Donc $K \otimes_A M_{\text{tor}} = 0$. Par conséquent,

$$K \otimes_A (M/M_{\text{tor}}) \cong (K \otimes_A M) \big/ (K \otimes_A M_{\text{tor}}) = K \otimes_A M.$$

Enfin, la suite exacte (1.1) montre que l'homomorphisme canonique

$$M/M_{\text{tor}} \longrightarrow K \otimes_A M \cong K \otimes_A (M/M_{\text{tor}})$$

est injectif, i.e., M/M_{tor} est un A-module sans torsion. □

Définition 1.2.9 Soient A un anneau, M un A-module et N un sous-A-module de M. On appelle *saturation* de N dans M le noyau de l'homomorphisme composé

$$M \longrightarrow M/N \longrightarrow (M/N) \big/ (M/N)_{\text{tor}} \ ,$$

noté N_{sat}. Si $N = N_{\text{sat}}$, on dit que N est un *sous-A-module saturé* de $\mathcal{F}$.

Proposition 1.2.10 *Soient A un anneau, M un A-module et N un sous-A-module de M. Le A-module M/N_{sat} est sans torsion. En outre, si N' est un sous-A-module de M tel que $N \subset N'$ et que M/N' soit sans torsion, alors $N_{\text{sat}} \subset N'$. Ainsi N_{sat} est le plus petit sous-A-module N' de M tel que $N \subset N'$ et que M/N' soit sans torsion.*

Démonstration. Par définition $M/N_{\text{sat}} = (M/N) \big/ (M/N)_{\text{tor}}$ est sans torsion d'après la proposition 1.2.8.

Si N' est un sous-A-module contenant N, le morphisme $M/N \to M/N'$ envoie $(M/N)_{\text{tor}}$ dans $(M/N')_{\text{tor}}$. En particulier, si M/N' est sans torsion, il se factorise en un homomorphisme $(M/N) \big/ (M/N)_{\text{tor}} \to M/N'$. Par conséquent, le noyau N' de l'homomorphisme quotient $M \to M/N'$ contient le noyau N_{sat} de l'homomorphisme $M \to (M/N) \big/ (M/N)_{\text{tor}}$ □

Lemme 1.2.11 (cf. [19] chap. 6 §3 n°6) *Soit A un anneau de valuation. Tout A-module sans torsion est plat, tout A-module sans torsion de type fini est libre.*

Définition 1.2.12 Soient A un anneau et M un A-module. On appelle *dual* de M le A-module $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. On a un homomorphisme canonique fonctoriel $\theta_M : M \to M^{\vee\vee}$ donné par $\theta_M(x) : f \mapsto f(x)$.

Proposition 1.2.13 *Soient A un anneau et M un A-module. Si θ_M est injectif, alors M est sans torsion.*

Démonstration. Si M n'est pas sans torsion, il existe un élément non-nul x de M tel que $\mathrm{ann}(x)$ contienne un non-diviseur de zéro r de A. Comme θ_M est injectif, $\theta_M(x) \neq 0$. Donc il existe $f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ tel que $f(x) \neq 0$. Mais $rf(x) = f(rx) = 0$. Cela est absurde car r n'est pas un diviseur de zéro de A. □

Proposition 1.2.14 *Si A est un anneau intègre dont le corps des fractions est K, M est un A-module de type fini et sans torsion, alors θ_M est injectif.*

Démonstration. S'il existe un élément non-nul x de M tel que $\theta_M(x) = 0$, alors pour tout homomorphsime $g : M \to A$ on a $g(x) = 0$. L'homomorphisme canonique $i : M \to K \otimes_A M$ est injectif. On choisit un homomorphisme surjectif K-linéaire $\varphi : K \otimes_A M \to K$ tel que $\varphi i(x) \neq 0$. Comme M est de type fini, il existe $a \in A$, $a \neq 0$ tel que $a\varphi(M) \subset A$. On a $f = a\varphi i \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ et $f(x) \neq 0$. Cela est absurde. □

1.2.2 Torsion dans un faisceau de modules

Dans ce sous-paragraphe on discutera le sous-module de torsion d'un faisceau de modules sur un espace annelé. Les résultats rappelés ici sont dans [50] I.8.4 et [49] IV.20 (où il y a quelques erreurs corrigées par Kleiman dans [63]).

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\mathcal{S}$ un sous-faisceau de monoïdes du faisceau de monoïdes (multiplicatifs) sous-jacent à $\mathcal{O}_X$. Alors

$$U \longmapsto \Gamma(U, \mathcal{S})^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

est un préfaisceau d'anneaux dont le faisceau d'anneaux associé est appelé le *faisceau d'anneaux de fractions* de $\mathcal{O}_X$ à dénominateurs dans $\mathcal{S}$, noté $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{O}_X$. Pour tout point $x \in X$ on a un isomorphisme d'anneaux $(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{O}_X)_x \cong \mathcal{S}_x^{-1}\mathcal{O}_{X,x}$. Donc $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-module plat (c'est-à-dire Id_X-plat suivant la terminologie de [50] 0.5.7.1). Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, on désigne par $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$ le $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$. On a pour tout point $x \in X$, $(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F})_x \cong \mathcal{S}_x^{-1}\mathcal{F}_x$.

Exemple 1.2.15 Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé, alors

$$\mathcal{S}_X : U \longmapsto \{s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid \text{l'homothétie } h_s : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U \text{ est injective}\}$$

est un sous-faisceau de monoïdes multiplicatifs de $\mathcal{O}_X$. Le faisceau d'anneaux de fractions $\mathcal{K}_X := \mathcal{S}_X^{-1}\mathcal{O}_X$ est appelé le *faisceau des germes de fonctions méromorphes* sur X. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, alors $\mathcal{K}_X(\mathcal{F}) := \mathcal{S}_X^{-1}\mathcal{F}$ est appelé le *faisceau des germes de sections méromorphes* de $\mathcal{F}$. Si U est une partie ouverte de X, les éléments dans $\Gamma(U, \mathcal{K}_X)$ (resp. $\Gamma(U, \mathcal{K}_X(\mathcal{F}))$) sont appelés les *fonctions méromorphes* (resp. *sections méromorphes* de $\mathcal{F}$) sur U.

Remarque 1.2.16 Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Si U est un ouvert de X, $\Gamma(U, \mathcal{S}_X)$ est contenu dans l'ensemble des non-diviseurs de zéro de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Pour tout $x \in X$, $\mathcal{S}_{X,x} = \varinjlim_{U \ni x} \Gamma(U, \mathcal{S}_X)$ est contenu dans le monoïde des éléments réguliers de $\mathcal{O}_{X,x}$. Par conséquent, $\mathcal{K}_{X,x}$ est un sous-anneau de l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}_{X,x}$ et l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \to \mathcal{K}_X$ est injectif. En outre, $\mathcal{K}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-module plat.

Remarque 1.2.17 Si $X = \operatorname{Spec} A$ est un schéma affine, alors $\Gamma(X, \mathcal{S}_X)$ est l'ensemble des non-diviseurs de zéro de A. En effet, si $a \in A$ est tel que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, l'homothétie de $A_{\mathfrak{p}}$ définie par a soit injective, alors a est un non-diviseur de zéro. Par conséquent, $\Gamma(X, \mathcal{S}_X)$ contient (donc est égal à) l'ensemble des non-diviseurs de zéro de A.

Proposition 1.2.18 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. On suppose que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

1) $\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent,

2) $(X, \mathcal{O}_X)$ est un schéma réduit dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini.

Alors pour tout $x \in X$, $\mathcal{S}_{X,x}$ coïncide avec le monoïde des éléments réguliers de $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{K}_{X,x}$ est l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}_{X,x}$. De plus, si la condition 2) est vérifiée, le faisceau $\mathcal{K}_X$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente.

Démonstration. 1) On suppose que s soit une section dans $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ telle que s_x soit un élément régulier de $\mathcal{O}_{X,x}$. Considérons l'homothétie $s : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ définie par s. Comme $\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, le noyau $\mathcal{N}$ de l'homothétie s est cohérent (cf. [50] 0.5.3.4), donc de type fini. Si s_x est injectif, alors $\mathcal{N}_x = 0$. Par conséquent, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x tel que $\mathcal{N}|_V = 0$ (cf. [50] 0.5.2.2), i.e., $s|_V \in \Gamma(V, \mathcal{S}_X)$.

2) La question étant locale, on se ramène au cas où $X = \operatorname{Spec} A$, avec A un anneau réduit et à un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. D'après la remarque 1.2.17, $\Gamma(X, \mathcal{S}_X)$ est l'ensemble des non-diviseurs de zéro de A. En outre, pour tout élément $f \in A$, $\Gamma(X_f, \mathcal{S}_X)$ est l'ensemble des non-diviseurs de zéro de A_f. D'après la proposition 1.2.5, on a

$$\Gamma(X_f, \mathcal{S}_X)^{-1}\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = (\Gamma(X, \mathcal{S}_X)^{-1}\Gamma(X, \mathcal{O}_X))_f.$$

Ceci montre que le préfaisceau $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{S}_X)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\widetilde{K}$, où K est l'anneau total des fractions de A. Par conséquent, $\mathcal{K}_X = \widetilde{K}$ est quasi-cohérent (cf. [50] I.1.4.1), et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\mathcal{K}_{X,\mathfrak{p}} = K_{\mathfrak{p}}$ est l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$. □

Remarque 1.2.19 Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un schéma intègre de point générique η, alors $\mathcal{K}_X$ est isomorphe au faisceau constant défini par le corps $\mathcal{O}_{X,\eta}$. En effet, pour tout ouvert affine $U = \operatorname{Spec} A$ de X, l'anneau total des fractions de A s'identifie à $\mathcal{O}_{X,\eta}$.

Définition 1.2.20 Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, on désigne par $\mathcal{F}_{\mathrm{tor}}$ le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{K}_X(\mathcal{F})$, appelé le *sous-$\mathcal{O}_X$-module de torsion* de $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est *sans torsion* si $\mathcal{F}_{\mathrm{tor}} = 0$, autrement dit, si l'homomorphisme canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{K}_X(\mathcal{F})$ est injectif.

Proposition 1.2.21 *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé tel que $\mathcal{O}_X$ soit un $\mathcal{O}_X$-module cohérent ou un schéma réduit dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ est sans torsion si et seulement si pour tout point $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module sans torsion.*

Démonstration. En effet, l'homomorphisme canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{K}_X(\mathcal{F})$ est injectif si et seulement si pour tout point $x \in X$, l'homomorphisme canonique $\mathcal{F}_x \to (\mathcal{K}_X(\mathcal{F}))_x \cong \mathcal{K}_{X,x} \otimes \mathcal{F}_x$ est injectif, i.e., si et seulement si $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module sans torsion puisque $\mathcal{K}_{X,x}$ est l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}_{X,x}$ (cf. la proposition 1.2.18). □

L'énoncé suivant découle aussitôt des définitions :

Proposition 1.2.22 *Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé et $u : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules, alors u envoie $\mathcal{F}_{1,\mathrm{tor}}$ dans $\mathcal{F}_{2,\mathrm{tor}}$. En particulier, si $\mathcal{F}_2$ est un $\mathcal{O}_X$-module sans torsion et si $\mathcal{F}_1$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{F}_2$, alors $\mathcal{F}_1$ est sans torsion.*

Proposition 1.2.23 *Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé, $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, alors $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\mathrm{tor}}$ est un $\mathcal{O}_X$-module sans torsion, et on a*

$$\mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \cong \mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\mathrm{tor}}).$$

Démonstration. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathrm{tor}} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}\ . \qquad (1.2)$$

Comme $\mathcal{K}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-module plat, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}_{\mathrm{tor}} \longrightarrow \mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$$

est exacte, i.e., $\mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}_{\mathrm{tor}} = 0$. Par conséquent,

$$\mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\mathrm{tor}}) \cong (\mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})\big/(\mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}_{\mathrm{tor}}) = \mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}.$$

Enfin, la suite exacte (1.2) montre que l'homomorphisme

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\mathrm{tor}} \longrightarrow \mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \cong \mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\mathrm{tor}})$$

est injectif, i.e., $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\mathrm{tor}}$ est sans torsion. □

Définition 1.2.24 Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module et $\mathcal{E}$ un sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{F}$. On appelle *saturation* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ l'image inverse de $p^{-1}(\mathcal{F}/\mathcal{E})_{\mathrm{tor}}$ de $(\mathcal{F}/\mathcal{E})_{\mathrm{tor}}$ par l'application quotient $p : \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}_{\mathrm{sat}}$. On dit que $\mathcal{E}$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module *saturé* de M lorsque $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathrm{sat}}$, ou encore, de façon équivalente, lorsque $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ est sans torsion.

Proposition 1.2.25 *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module et $\mathcal{E}$ un sous-$\mathcal{O}_X$-de $\mathcal{F}$. Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}/\mathcal{E}_{\mathrm{sat}}$ est sans torsion. En outre, si $\mathcal{E}'$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ et que $\mathcal{F}/\mathcal{E}'$ soit sans torsion, alors $\mathcal{E}_{\mathrm{sat}} \subset \mathcal{E}'$. Ainsi $\mathcal{E}_{\mathrm{sat}}$ est le plus petit sous-$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ et que $\mathcal{F}/\mathcal{E}'$ soit sans torsion.*

Démonstration. Par définition $\mathcal{F}/\mathcal{E}_{\mathrm{sat}} = (\mathcal{F}/\mathcal{E})\big/(\mathcal{F}/\mathcal{E})_{tor}$ est sans torsion d'après la proposition 1.2.23.

Si $\mathcal{E}'$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{F}$ contenant $\mathcal{E}$, le morphisme $\mathcal{F}/\mathcal{E} \to \mathcal{F}/\mathcal{E}'$ envoie $(\mathcal{F}/\mathcal{E})_{\mathrm{tor}}$ dans $(\mathcal{F}/\mathcal{E}')_{\mathrm{tor}}$. En particulier, si $\mathcal{F}/\mathcal{E}'$ est sans torsion, il se factorise en un homomorphisme $(\mathcal{F}/\mathcal{E})\big/(\mathcal{F}/\mathcal{E})_{\mathrm{tor}} \to \mathcal{F}/\mathcal{E}'$. Par conséquent le noyau $\mathcal{E}'$ de l'homomorphisme quotient $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{E}'$ contient le noyau $\mathcal{E}_{\mathrm{sat}}$ de l'homomorphisme $\mathcal{F} \to (\mathcal{F}/\mathcal{E})\big/(\mathcal{F}/\mathcal{E})_{\mathrm{tor}}$. □

Proposition 1.2.26 *Soient X un schéma réduit dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}_{\mathrm{tor}}$ est quasi-cohérent, la saturation de tout sous-$\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de $\mathcal{F}$ est quasi-cohérente.*

Démonstration. Comme $\mathcal{K}_X$ est quasi-cohérent, le faisceau $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{K}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ est quasi-cohérent. Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}_{\mathrm{tor}}$ est donc quasi-cohérent car il est le noyau d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents. Si $\mathcal{E}$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ est quasi-cohérent. Par conséquent, $(\mathcal{F}/\mathcal{E})_{\mathrm{tor}}$ est quasi-cohérent. Enfin, $\mathcal{E}_{\mathrm{sat}} = \mathrm{Ker}(\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{E} \to (\mathcal{F}/\mathcal{E})\big/(\mathcal{F}/\mathcal{E})_{\mathrm{tor}})$ est quasi-cohérent. $\square$

Proposition 1.2.27 *Soit X un schéma intègre de point générique η. Pour qu'un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathcal{F}$ soit sans torsion, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un sous-$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{G}$ d'une somme directe $\mathcal{K}_X^{(I)}$. En outre, on peut choisir $\mathcal{G}$ et I de telle sorte que $\mathcal{G}$ engendre $\mathcal{K}_X^{(I)}$ comme $\mathcal{K}_X$-module (donc le cardinal de I est égal au rang de $\mathcal{F}_\eta$ sur $\mathcal{O}_{X,\eta}$).*

Démonstration. Suffisance : On a $\mathcal{K}_X(\mathcal{K}_X) = \mathcal{K}_X$, donc $\mathcal{K}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-module sans torsion. Tout sous-$\mathcal{O}_X$-module d'une somme directe de $\mathcal{K}_X$ est sans torsion (cf. la proposition 1.2.22).

Nécessité : Soit $K = \mathcal{O}_{X,\eta}$. On suppose que $U = \operatorname{Spec} A$ soit un ouvert affine non-vide de X, et que $\mathcal{F}|_U$ s'écrive sous la forme $\widetilde{M}$, où M est un A-module. Comme $\mathcal{K}_X|_U = \widetilde{K}$ (cf. la proposition 1.2.18) on obtient $\mathcal{K}_X(\mathcal{F})|_U = (K \otimes_A M)^{\sim}$. Donc $\Gamma(U, \mathcal{K}_X(\mathcal{F})) = K \otimes_A M = \mathcal{F}_\eta$. Cela montre que $\mathcal{K}_X(\mathcal{F})$ est le faisceau constant défini par $\mathcal{F}_\eta$, donc est un $\mathcal{K}_X$-module libre. D'autre part, si $\mathcal{F}$ est sans torsion, l'homomorphisme canonique de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{K}_X(\mathcal{F})$ est injectif, i.e., $\mathcal{F}$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module d'une somme directe $\mathcal{K}_X^{(I)}$ avec $\operatorname{card} I = \operatorname{rg}_K \mathcal{F}_\eta$, et $\mathcal{K}_X(\mathcal{F})$ est engendré comme $\mathcal{K}_X$-module par $\mathcal{F}$. $\square$

Corollaire 1.2.28 *Soit X un schéma intègre de point générique η. Tout $\mathcal{O}_X$-module sans torsion de rang zéro au point générique est nul.*

Démonstration. D'après la proposition 1.2.27, si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module sans torsion, il est un sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{K}_X^{\oplus \operatorname{rg}(\mathcal{F}_\eta)}$. Donc $\mathcal{F} = 0$ si $\mathcal{F}_\eta$ est de rang zéro. $\square$

Corollaire 1.2.29 *Soient X et Y deux schémas intègres, $f : X \to Y$ un morphisme dominant. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent sans torsion $\mathcal{F}$, $f_*\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module sans torsion.*

Démonstration. Comme le foncteur f_* est exact à gauche, on se ramène au cas où $\mathcal{F} = \mathcal{K}_X$. Soient x (resp. y) le point générique de X (resp. Y), $K = \mathcal{O}_{Y,y}$ et $L = \mathcal{O}_{X,x}$. Comme f est dominant, L est une extension de K. Le faisceau $f_*\mathcal{K}_X$ est constant défini par L, donc est une somme directe de $\mathcal{K}_Y = \underline{K}$. Par conséquent, $f_*\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module sans torsion en vertu de la proposition 1.2.27. $\square$

Proposition 1.2.30 *Soit X un schéma intègre, localement noethérien, régulier et de dimension* 1.

1) *Tout $\mathcal{O}_X$-module de type fini et sans torsion est localement libre de rang fini.*
2) *Tout sous-$\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent d'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini est aussi un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini.*

3) Soit $f : \mathcal{L} \to \mathcal{F}$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules sans torsion. Si $\mathcal{L}$ est de rang 1 et si f est non-nul, alors f est injectif.

Démonstration. 1) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module de type fini et sans torsion. Pour tout point $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau régulier de dimension ≤ 1. Donc $\mathcal{O}_{X,x}$ est soit un corps, soit un anneau de valuation discrète ([47] 0_{IV}.17.1.4). Comme $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module sans torsion et de type fini, on obtient que $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module libre compte tenu du lemme 1.2.11. D'autre part, comme X est localement noethérien, $\mathcal{F}$ est de présentation finie (cf. [50] I.2.7.1). Par conséquent, $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre (cf. [50] 0.5.4.1). Enfin, $\mathcal{F}$ est de rang fini car il est de type fini.

2) Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini. Comme X est localement noethérien, le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$ est cohérent, et tout sous-$\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est cohérent (cf. [50] I.2.7.1), donc de présentation finie. D'autre part, $\mathcal{F}$ est sans torsion (cf. la proposition 1.2.22), donc est localement libre de rang fini.

3) Soit E le noyau de f. L'image de f est un sous $\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{F}$, donc sans torsion. Si f est non-nul, $\operatorname{Im} f$ est au moins de rang 1. Comme $\mathcal{L}$ est de rang 1, E est de rang zéro. Comme E est un sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{L}$, il est sans torsion, donc nul. Par conséquent, f est injectif. □

Définition 1.2.31 Soient X un espace annelé et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. On appelle *dual* de $\mathcal{F}$ le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. On a un homomorphisme canonique fonctoriel

$$\theta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}.$$

défini de façon suivante : pour tout ouvert U de X, à toute section $a \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, on fait correspondre l'élément $\theta_{\mathcal{F}}(a) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}^\vee|_U, \mathcal{O}_X|_U)$ qui envoie

$$f \in \Gamma(V, \mathcal{F}^\vee) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X|_V}(\mathcal{F}|_V, \mathcal{O}_X|_V)$$

en $f(a|_V) \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$.

Proposition 1.2.32 *Soient X un schéma intègre localement noethérien et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Si $\mathcal{F}$ est sans torsion, alors $\theta_{\mathcal{F}}$ est injectif.*

Démonstration. Comme X est localement noethérien, on obtient que $\mathcal{F}^\vee$ est cohérent (cf. [44] I.9.1.1). Comme les $\mathcal{O}_X$-modules cohérents sont de présentation finie (cf. [44] 0_{I}.5.3.2), on a $(\theta_{\mathcal{F}})_x = \theta_{\mathcal{F}_x}$ pour tout $x \in X$ (cf. [44] 0_{I}.5.2.6). Si $\mathcal{F}$ est sans torsion, pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module sans torsion (cf. la proposition 1.2.21). Comme X est un schéma intègre, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau intègre, donc $(\theta_{\mathcal{F}})_x$ est injectif (cf. la proposition 1.2.14). □

1.2.3 Faisceaux amples

Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est *ample* (cf. [45] II.4.5.5 et [47] IV.1.7.14) si pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent et de type fini $\mathcal{F}$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$ soit engendré par ses sections globales (autrement dit, il existe un entier $a > 0$ ainsi qu'un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_X^{\oplus a}$ vers $\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$).

Soit f un morphisme quasi-compact d'un schéma quasi-compact et quasi-séparé X vers un schéma Y. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est *ample relativement* à f (cf. [45] II.4.6.1) s'il existe un recouvrement (U_α) de Y par des ouverts affines tel que $L|_{U_\alpha}$ soit ample sur $f^{-1}(U_\alpha)$

pour tout α. Ceci revient à dire que pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent et de type fini $\mathcal{F}$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, l'homomorphisme canonique

$$f^*(f_*(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n})) \longrightarrow \mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$$

soit surjectif (cf. [45] II.4.6.8 et [47] IV.1.7.15). Si Y est affine, cela est équivalent à l'amplitude de L sur X. Lorsque Y est noethérien et f est propre, l'amplitude de L relative à f (ou Y) est aussi équivalente au fait que pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier $q > 0$, on ait $R^q f_*(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}) = 0$ (cf. [46] III.2.6.1).

Dans [52] (voir aussi [54]) Hartshorne a étendu la notion d'amplitude aux faisceaux localement libre de rang fini.

Définition 1.2.33 Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E est *ample* si pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini $\mathcal{F}$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, le faisceau $S^n E \otimes \mathcal{F}$ soit engendré par ses sections au-dessus de X, c'est-à-dire, soit un quotient d'un $\mathcal{O}_X$-module libre de rang fini, où $S^n E$ est la $n^{\text{ième}}$ puissance symétrique de E. On voit aussitôt que tout quotient localement libre non-nul d'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini ample est encore ample.

Voici quelques propriétés classiques de l'amplitude des faisceaux localement libres de rang fini, pour les démonstrations desquelles nous renvoyons à [52] et [6].

Soient X un schéma noethérien et E un $\mathcal{O}_X$-module localement de rang fini. Alors E est ample si et seulement si le faisceau inversible canonique $\mathcal{O}_E(1)$ sur $\mathbb{P}(E)$ est ample (cf. [52] Proposition 3.2).

Soit $f : X \to Y$ un morphisme quasi-compact d'un schéma quasi-compact et quasi-séparé vers un schéma. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E est *ample relativement* à f (ou Y) s'il existe un recouvrement de Y par des ouverts affines (U_α) de telle sorte que $E|_{U_\alpha}$ soit ample sur $f^{-1}(U_\alpha)$ pour tout α. Tout quotient localement libre d'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini ample relativement à Y est ample relativement à Y. Lorsque Y est localement noethérien et f est de type fini, l'amplitude de E relativement à Y est équivalente à l'amplitude de $\mathcal{O}_E(1)$ relativement à Y. Lorsque Y est localement noethérien et f est propre, ceci revient à dire que pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$ il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier $q > 0$, on ait $R^q f_*(S^n E \otimes \mathcal{F}) = 0$. En particulier, si X est un schéma propre sur un schéma affine noethérien, alors un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E est ample sur X si et seulement si E est ample relativement à Y, ou encore si et seulement si pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier $q > 0$, on ait $H^q(X, S^n E \otimes \mathcal{F}) = 0$.

Soient Z un schéma noethérien, $g : Y \to Z$ un morphisme propre et $f : X \to Y$ un morphisme fini et surjectif. Par passage au faisceau canonique du fibré projectif, on voit qu'un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang fini E est ample relativement à g si et seulement si f^*E est ample relativement à gf.

Si X est un schéma de type fini sur un corps de caractéristique 0 ou un schéma propre sur un corps de caractéristique > 0, tout faisceau tensoriel positif d'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini ample est ample. En particulier, le produit tensoriel de deux $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini amples est ample (cf. [52] Theorem 5.2 et [6] Theorem 3.3).

Pour le cas où X est un schéma séparé et de type fini sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Hartshorne a introduit la notion de p-amplitude pour les faisceaux localement libres de rang fini sur X.

Définition 1.2.34 Soient X un schéma séparé et de type fini sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$ et $F_X : X \to X$ le morphisme de Frobenius absolu de X. On dit qu'un

$\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E est *p-ample* si pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$ il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, le faisceau $(F_X^*)^n E \otimes \mathcal{F}$ soit engendré par ses sections au-dessus de X.

Soient X un schéma projectif sur k et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample. Si E est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre p-ample, alors il existe deux entiers strictement positifs n et a tels que $(F_X^*)^n E \otimes L^\vee$ soit un quotient de $\mathcal{O}_X^{\oplus a}$, autrement dit, $(F_X^*)^n E$ soit un quotient de $L^{\oplus a}$. Par conséquent, $(F_X^*)^n E$ est ample. Comme le morphisme de Frobenius absolu F_X est fini et surjectif, on obtient que E est ample. La réciproque n'est pas vraie en général (voir [34] pour un exemple d'un faisceau localement libre de rang 2 ample sur $\mathbb{P}^2$ qui n'est pas p-ample). C'est le cas lorsque X est une courbe non-singulière projective sur k (cf. [52] Proposition 7.3).

1.3 Modules localement libres sur une courbe projective régulière, semi-stabilité

Dans ce paragraphe, on fixe un schéma régulier intègre C de dimension 1 qui est projectif sur le spectre d'un corps k. On désigne par K le corps de fonctions méromorphes sur C, $\eta : \operatorname{Spec} K \to C$ le point générique, et g le genre de C. Harder et Narasimhan [51] furent les premiers qui ont démontré que pour tout faisceau localement libre de rang fini et non-nul E sur C, si E n'est pas semi-stable au sens de Mumford (voir la définition 1.3.10), alors il existe un plus grand sous-$\mathcal{O}_C$-module de E qui le déstabilise. On rappellera leur résultat dans ce paragraphe.

1.3.1 Degré d'un faisceau localement libre, pente

Comme C est irréductible, il est connexe. Par conséquent, pour tout $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini E, le rang de E_x sur $\mathcal{O}_{C,x}$ est constant pour $x \in C$ (cf. [50] 0.5.4.1). On désigne par $\operatorname{rg} E$ cette constante, appelée le *rang* de E. Les référence de ce sous-paragrphe sont [58] et [67].

Les $\mathcal{O}_C$-modules localement libres de rang fini sont invariants par plusieures constructions tensorielles. Par exemple, si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini, il en est de même de son dual $E^\vee := \mathcal{H}\mathrm{om}(E, \mathcal{O}_C)$. De plus, pour tout entier $n \geq 0$, le $n^{\text{ième}}$ *produit symétrique* $S^n E$ et le $n^{\text{ième}}$ *produit extérieur* $\Lambda^n E$ de E sont aussi localement libres de rang fini. On a

$$\operatorname{rg}(S^n E) = \binom{\operatorname{rg} E + n - 1}{n} \text{ si } E \neq 0, \quad \operatorname{rg}(\Lambda^n E) = \binom{\operatorname{rg} E}{n} \text{ si } 0 \leq n \leq \operatorname{rg} E.$$

En particulier, $\Lambda^{\operatorname{rg} E} E$ est localement libre de rang 1. Le $\mathcal{O}_C$-module inversible ainsi défini est appelé le *déterminant* de E, noté $\operatorname{dét} E$.

Définition 1.3.1 Si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini, on appelle *degré* de E l'entier $\deg(c_1(E) \cap [C])$, noté $\deg E$ (cf. [32] 3.2).

On résume ci-dessous des propriété des fonctions deg et rg (voir [32] pour les démonstrations).

Proposition 1.3.2

1) Si $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de $\mathcal{O}_C$-modules localement libres de rang fini, alors*

$$\deg(E) = \deg(E') + \deg(E''), \quad \operatorname{rg}(E) = \operatorname{rg}(E') + \operatorname{rg}(E'').$$

2) Si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini, on a

$$\deg(E) = \deg(\text{dét}\, E).$$

3) Si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini, on a $\deg(E^\vee) = -\deg(E)$.

4) Si L est un $\mathcal{O}_C$-module inversible, s est une section méromorphe non-nulle de L, on a

$$\deg(L) = \deg(\operatorname{div}(s)).$$

En particulier $\deg(\mathcal{O}_C) = 0$, *et si* $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_C, L) = \Gamma(C, L)$ *est non-nul, alors* $\deg(L) \geq 0$.

5) Si E et F sont deux $\mathcal{O}_C$-modules localement libres de rang fini, on a

$$\deg(E \otimes F) = \deg(E) \operatorname{rg}(F) + \operatorname{rg}(E) \deg(F).$$

Proposition 1.3.3 *Si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et F est un sous-$\mathcal{O}_C$-module localement libre de E de même rang, alors* $\deg(F) \leq \deg(E)$.

Démonstration. Soit $r = \operatorname{rg} E = \operatorname{rg} F$. La proposition est triviale pour $r = 0$. Si $r = 1$, E et F sont des $\mathcal{O}_C$-modules inversibles. L'homomorphisme d'inclusion de F vers E induit un homomorphisme non-nul de $\mathcal{O}_C$ vers $F^\vee \otimes E$. Par conséquent, $\deg(F^\vee \otimes E) = \deg(E) - \deg(F) \geq 0$. Pour le cas où $r > 1$, l'homomorphisme d'inclusion $F \to E$ induit un homomorphisme injectif $\text{dét}\, F \to \text{dét}\, E$. On se ramène ainsi au cas où $r = 1$. □

Proposition 1.3.4 *Soient E un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et F un sous-$\mathcal{O}_C$-module quasi-cohérent de E. Alors* $\operatorname{rg} F_{\text{sat}} = \operatorname{rg} F$ *et* $\deg(F_{\text{sat}}) \geq \deg(F)$.

Démonstration. Compte tenu de la proposition 1.2.23, on obtient

$$(\mathcal{K}_X \otimes E)/(\mathcal{K}_X \otimes F) \cong \mathcal{K}_X \otimes (E/F) = \mathcal{K}_X \otimes (E/F_{\text{sat}}).$$

Par conséquent, on a $\operatorname{rg}(E/F_{\text{sat}}) = \operatorname{rg}(E) - \operatorname{rg}(F)$, et donc $\operatorname{rg}(F_{\text{sat}}) = \operatorname{rg}(F)$. Enfin, comme F est un sous-$\mathcal{O}_C$-module quasi-cohérent de F_{sat}, on a $\deg(F) \leq \deg(F_{\text{sat}})$ compte tenu de la proposition 1.3.3. □

Lemme 1.3.5 *Soient X un schéma intègre noethérien, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent sans torsion. Alors il existe deux entiers $a, m > 0$ ainsi qu'un homomorphisme injectif de $\mathcal{F}$ dans $(L^{\otimes m})^{\oplus a}$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{F}$ est sans torsion, l'homomorphisme canonique

$$\theta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$$

est injectif. Puisque L est ample, il existe un entier $m > 0$ tel que $L^{\otimes m} \otimes \mathcal{F}^\vee$ soit engendré par ses sections au-dessus de X, i.e., il existe un entier a et un homomorphisme surjectif

$$\varphi : \mathcal{O}_X^{\oplus a} \longrightarrow L^{\otimes m} \otimes \mathcal{F}^\vee.$$

Par dualité on obtient un homomorphisme injectif

$$L^{\vee \otimes m} \otimes \mathcal{F} \xhookrightarrow{1 \otimes \theta_{\mathcal{F}}} L^{\vee \otimes m} \otimes \mathcal{F}^{\vee\vee} \xhookrightarrow{\varphi^\vee} \mathcal{O}_X^{\oplus a}$$

qui induit un homomorphisme injectif $\mathcal{F} \to (L^{\otimes m})^{\oplus a}$. □

Proposition 1.3.6 *Soit E un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini. L'ensemble*

$$\{\deg(F) \mid F \text{ est un sous-}\mathcal{O}_C\text{-module quasi-cohérent de } E\} \subset \mathbb{Z}$$

est borné supérieurement.

Démonstration. 1) On suppose d'abord que E soit libre, i.e., $E \cong \mathcal{O}_C^{\oplus n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Si F est un sous-$\mathcal{O}_C$-module quasi-cohérent de E, il est localement libre de rang fini (cf. la proposition 1.2.30). Soit r le rang de F. On a un homomorphisme injectif de $\mathcal{O}_C$-modules $\varphi : \text{dét}\, F \to \Lambda^r E$ induit par l'homomorphisme d'inclusion de F dans E. Le faisceau $\Lambda^r E$ est un $\mathcal{O}_C$-module libre, i.e., il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\Lambda^r E \cong \mathcal{O}_C^{\oplus N}$. Soient $\pi_i : \Lambda^r E \to \mathcal{O}_C$ ($1 \leq i \leq N$) les N projections canoniques. Comme φ est non-nul, il existe un entier $i \in \{1, \cdots, N\}$ tel que $\pi_i \varphi \neq 0$. Par conséquent, $\deg(F) = \deg(\text{dét}\, F) \leq \deg(\mathcal{O}_C) = 0$.

2) Soit L un $\mathcal{O}_C$-module inversible. On traite le cas où E est de la forme $L^{\oplus n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Si F est un sous-$\mathcal{O}_C$-module de E, on a un homomorphisme injectif de $F \otimes L^\vee$ vers $\mathcal{O}_C^{\oplus n}$. Par l'étape 1) on obtient $\deg(F \otimes L^\vee) = \deg(F) - \deg(L) \leq 0$, i.e., $\deg(F) \leq \deg(L)$.

3) On traite enfin le cas général. Soit $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_C$-module inversible ample. D'après le lemme 1.3.5, il existe deux entiers $a, m > 0$ et un homomorphisme injectif de E vers $(\mathscr{L}^{\otimes m})^{\oplus a}$. Tout sous-$\mathcal{O}_C$-module F de E peut être considéré comme un sous-$\mathcal{O}_C$-module de $(\mathscr{L}^{\otimes m})^{\oplus a}$. Par l'étape 2), on a $\deg(F) \leq \deg(\mathscr{L}^{\otimes m}) = m \deg(\mathscr{L})$. □

Définition 1.3.7 Soit E un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul. On appelle *pente* de E le nombre rationnel $\mu(E) := \deg(E)/\operatorname{rg}(E)$.

On déduit des propriétés de degrés (cf. la proposition 1.3.2) les propriétés suivantes de pentes :

Proposition 1.3.8

1) Si $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de $\mathcal{O}_C$-modules localement libres de rang fini et non-nuls, alors*

$$\mu(E) = \frac{\operatorname{rg}(E')}{\operatorname{rg}(E)}\mu(E') + \frac{\operatorname{rg}(E'')}{\operatorname{rg}(E)}\mu(E'').$$

2) Si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul, on a $\mu(E^\vee) = -\mu(E)$.

3) Si L est un $\mathcal{O}_C$-module inversible, on a $\mu(L) = \deg(L)$.

4) Si E et F sont deux $\mathcal{O}_C$-modules localement libres de rang fini et non-nuls, on a

$$\mu(E \otimes F) = \mu(E) + \mu(F).$$

1.3.2 Pente maximale, semi-stabilité, pente minimale

Proposition 1.3.9 *Soit E un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul.*

1) L'ensemble

$$H_E = \{\mu(F) \mid F \text{ est un sous-}\mathcal{O}_C\text{-module quasi-cohérent non-nul de } E\}$$

est borné supérieurement.

2) Il existe un sous-$\mathcal{O}_C$-module quasi-cohérent et non-nul F_{des} de E tel que $\mu(F_{\mathrm{des}}) = \sup H_E$ et tel que, pour tout sous-$\mathcal{O}_C$-module quasi-cohérent et non-nul F de E avec $\mu(F) = \sup H_E$, on ait $F \subset F_{\mathrm{des}}$.

Démonstration. 1) D'après la proposition 1.3.6, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout sous-$\mathcal{O}_C$-module quasi-cohérent F de E, on ait $\deg(F) \leq \alpha$. Par conséquent, si F est non-nul, on a $\mu(F) \leq \alpha$.

2) Les nombres dans H_E sont des nombres rationnels de la forme d/r, où $1 \leq r \leq \operatorname{rg} E$. Par conséquent, H_E est un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$. Donc $\sup H_E \in H_E$. Autrement dit, l'ensemble $U_E = \{F \subset E \mid F \neq 0, \quad \mu(F) = \sup H_E\}$ est non-vide. Si F_1 et F_2 sont deux éléments dans U_E, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F_1 \cap F_2 \longrightarrow F_1 \oplus F_2 \longrightarrow F_1 + F_2 \longrightarrow 0\ .$$

On note $\sigma = \sup H_E$. Si $F_1 \cap F_2 = 0$, on a $F_1 + F_2 \cong F_1 \oplus F_2$, et $\mu(F_1 + F_2) = \mu(F_1 \oplus F_2) = \sigma$, sinon on a

$$\begin{aligned}\mu(F_1 + F_2) &= \frac{\mu(F_1 \oplus F_2)\operatorname{rg}(F_1 \oplus F_2) - \mu(F_1 \cap F_2)\operatorname{rg}(F_1 \cap F_2)}{\operatorname{rg}(F_1 + F_2)}\\ &\geq \frac{\sigma\big(\operatorname{rg}(F_1 \oplus F_2) - \operatorname{rg}(F_1 \cap F_2)\big)}{\operatorname{rg}(F_1 + F_2)} = \sigma.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a toujours $F_1 + F_2 \in U_E$. Comme C est noethérien, l'ensemble U_E admet un élément maximal. □

Définition 1.3.10 Avec les notations de la proposition 1.3.9, le nombre $\sup H_E$ est appelé la *pente maximale* de E, noté $\mu_{\max}(E)$. Evidemment on a $\mu_{\max}(E) \geq \mu(E)$. Si $\mu_{\max}(E) = \mu(E)$, on dit que E est *semi-stable*. Par convention un $\mathcal{O}_C$-module nul est semi-stable. Si E n'est pas semi-stable, on a $E_{\mathrm{des}} \subsetneq E$, et on dit que E_{des} est le sous-$\mathcal{O}_C$-module de E qui *déstabilise* E.

Proposition 1.3.11 *Si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul, alors E_{des} est un sous-$\mathcal{O}_C$-module saturé de E. De plus, E_{des} est semi-stable de pente $\mu_{\max}(E)$.*

Démonstration. Soit E' la saturation de E_{des} dans E. Comme $\deg(E_{\mathrm{des}}) \leq \deg(E')$ et comme $\operatorname{rg}(E_{\mathrm{des}}) = \operatorname{rg}(E')$ (cf. la proposition 1.3.4), on a $\mu(E_{\mathrm{des}}) \leq \mu(E')$ et donc $\mu(E_{\mathrm{des}}) = \mu(E')$. Or E_{des} est maximale. Donc $E_{\mathrm{des}} = E'$, i.e., E_{des} est saturé.

Par définition $\mu(E_{\mathrm{des}}) = \mu_{\max}(E)$. D'autre part, tout sous-$\mathcal{O}_C$-module quasi-cohérent F de E_{des} est un sous-$\mathcal{O}_C$-module quasi-cohérent de E. Si F est non-nul, on a $\mu(F) \leq \mu_{\max}(E) = \mu(E_{\mathrm{des}})$. Donc E_{des} est semi-stable. □

Proposition 1.3.12 *Soient E un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul, L un $\mathcal{O}_C$-module inversible. On a $\mu_{\max}(E \otimes L) = \mu_{\max}(E) + \deg(L)$.*

Démonstration. Comme $E_{\mathrm{des}} \otimes L$ est un sous-$\mathcal{O}_C$-module quasi-cohérent de $E \otimes L$, on a

$$\mu(E_{\mathrm{des}} \otimes L) = \mu(E_{\mathrm{des}}) + \deg(L) = \mu_{\max}(E) + \deg L \leq \mu_{\max}(E \otimes L). \tag{1.3}$$

Si on applique l'inégalité (1.3) à $E \otimes L$ et à $L^\vee$, on obtient

$$\mu_{\max}(E \otimes L) + \deg(L^\vee) \leq \mu_{\max}(E \otimes L \otimes L^\vee) = \mu_{\max}(E).$$

Par conséquent, on a $\mu_{\max}(E \otimes L) = \mu_{\max}(E) + \deg L$. □

Lemme 1.3.13 *Soit E un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul. Si $H^0(C,E)$ est nul, alors $\mu_{\max}(E) \leq g-1$.*

Démonstration. Comme $H^0(C,E)=0$, pour tout sous-$\mathcal{O}_C$-module quasi-cohérent F de E on a $H^0(C,F)=0$. D'après le théorème de Riemann-Roch, on a

$$\dim_k H^0(C,F) - \dim_k H^1(C,F) = \deg(F) + \mathrm{rg}(F)(g-1).$$

Si $H^0(C,F)=0$, alors $\deg(F)+\mathrm{rg}(F)(1-g)\leq 0$, i.e. $\mu(F)\leq g-1$. □

Définition 1.3.14 Soit

$$b(C) = \min\{\deg(H) \mid H \in \mathrm{Pic}(C),\ H \text{ est ample}\}.$$

C'est un entier strictement positif, et l'ensemble des valeurs de $\deg(H)$ lorsque H décrit $\mathrm{Pic}(C)$ est exactement $b(C)\mathbb{Z}$. Soit en outre $a(C)=b(C)+g-1$.

Proposition 1.3.15 *Pour tout $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul E, il existe un sous-$\mathcal{O}_C$-module inversible L tel que $\deg(L) \geq \mu_{\max}(E) - a(C)$.*

Démonstration. Soit M un $\mathcal{O}_C$-module inversible de degré $b(C)$. On note $r=\lceil (g-\mu_{\max}(E))/b(C)\rceil$. Ainsi

$$\frac{g-\mu_{\max}(E)}{b(C)} \leq r \leq \frac{g-\mu_{\max}(E)+b(C)-1}{b(C)}.$$

Alors

$$\mu_{\max}(E\otimes M^{\otimes r}) = \mu_{\max}(E) + rb(C) \geq g.$$

D'après le lemme 1.3.13 on obtient $H^0(C,E\otimes M^{\otimes r})\neq 0$. Donc il existe un homomorphisme injectif de $\mathcal{O}_C$ vers $E\otimes M^{\otimes r}$. Soit $L=M^{\vee\otimes r}$. Il existe alors un homomorphisme injectif de L vers E. En outre, on a

$$\deg(L) = -r\deg(M) = -rb(C) \geq \mu_{\max}(E) - g - b(C) + 1.$$

Comme $a(C)=b(C)+g-1$, on obtient $\deg(L)\geq \mu_{\max}(E)-a(C)$. □

Remarque 1.3.16 Si la courbe C admet un k-point rationnel ou si k est un corps fini, $b(C)=1$. On a alors $a(C)=g$.

Proposition 1.3.17 *Soit E un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul. Alors l'ensemble*

$$B_E = \{\mu(G) \mid G \neq 0 \textit{ est un quotient sans torsion de } E\}$$

est borné inférieurement, et il existe un quotient localement libre G_0 de E tel que $\mu(G_0) = \inf B_E$.

Démonstration. Soit $\pi : E \to G$ un homomorphisme surjectif, où G est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre et non-nul. Soit F le noyau de π. Si $F=0$, alors $G\cong E$, et $\mu(G)=\mu(E)$, sinon on a

$$\mu(G) = \frac{\deg(E)-\mu(F)\,\mathrm{rg}(F)}{\mathrm{rg}(G)} \geq \frac{\deg(E)-\mu_{\max}(E)\,\mathrm{rg}(F)}{\mathrm{rg}(G)}.$$

Comme $\mathrm{rg}(G)=\mathrm{rg}(E)-\mathrm{rg}(F)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs possibles, on obtient que B_E est borné inférieurement. Enfin, l'ensemble $B_E\subset\mathbb{R}$ est discret, donc $\inf B_E \in B_E$. □

Définition 1.3.18 Avec les notations de la proposition 1.3.17, la valeur $\inf B_E$ est appelée la *pente minimale* de E, notée $\mu_{\min}(E)$. Evidemment on a $\mu_{\min}(E) \le \mu(E)$.

Proposition 1.3.19 *Si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul, on a $\mu_{\min}(E) = -\mu_{\max}(E^\vee)$.*

Démonstration. On montre d'abord que pour tout $\mathcal{O}_C$-module localement libre et non-nul E, on a

$$\mu_{\min}(E) \ge -\mu_{\max}(E^\vee) \text{ et } \mu_{\max}(E) \le -\mu_{\min}(E^\vee).$$

En effet, si G est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul, et si $E \to G$ est un homomorphisme surjectif, on a par dualité un homomorphisme injectif de $G^\vee$ vers $E^\vee$. Par conséquent, $-\mu(G) = \mu(G^\vee) \le \mu_{\max}(E^\vee)$. Comme G est arbitraire on a $\mu_{\min}(E) \ge -\mu_{\max}(E^\vee)$.

On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_{\mathrm{des}} \longrightarrow E \longrightarrow E/E_{\mathrm{des}} \longrightarrow 0\,. \tag{1.4}$$

Comme E_{des} est saturé, E/E_{des} est sans torsion, donc localement libre. La suite exacte (1.4) est alors localement scindée. Par conséquent, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (E/E_{\mathrm{des}})^\vee \longrightarrow E^\vee \longrightarrow E_{\mathrm{des}}^\vee \longrightarrow 0\,.$$

Donc

$$-\mu_{\max}(E) = -\mu(E_{\mathrm{des}}) = \mu(E_{\mathrm{des}}^\vee) \ge \mu_{\min}(E^\vee).$$

Enfin, en utilisant les inégalités obtenues, on a

$$\mu_{\min}(E) \ge -\mu_{\max}(E^\vee) \ge -(-\mu_{\min}(E^{\vee\vee})) = \mu_{\min}(E),$$

d'où l'égalité. □

Proposition 1.3.20 *Soit E un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) E est semi-stable ;

2) $\mu_{\min}(E) = \mu(E)$;

3) $E^\vee$ est semi-stable.

Démonstration. "1)⟹2)" : On suppose que G soit un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini et non-nul et que $\pi : E \to G$ soit un homomorphisme surjectif. Si le noyau F de π est non-nul, on a

$$\mu(G) = \frac{\mathrm{rg}(E)\mu(E) - \mathrm{rg}(F)\mu(F)}{\mathrm{rg}(G)}.$$

Comme E est semi-stable, $\mu(F) \le \mu(E)$, donc

$$\mu(G) \ge \frac{(\mathrm{rg}(E) - \mathrm{rg}(F))\mu(E)}{\mathrm{rg}(G)} = \mu(E).$$

Par conséquent, on a $\mu_{\min}(E) = \mu(E)$.

"2)⟹3)" : D'après la proposition 1.3.19, on a

$$\mu_{\max}(E^\vee) = -\mu_{\min}(E) = -\mu(E) = \mu(E^\vee),$$

donc $E^\vee$ est semi-stable.

"3)$\Longrightarrow$1)" : Comme $E^\vee$ est semi-stable, on obtient $\mu_{\min}(E^\vee)=\mu(E^\vee)$. Par conséquent,

$$\mu_{\max}(E)=-\mu_{\min}(E^\vee)=\mu(E).$$

□

Proposition 1.3.21 *Soient E_1 et E_2 deux $\mathcal{O}_C$-modules localement libres de rang fini et non-nul. Si $\varphi : E_1 \to E_2$ est un homomorphisme non-nul, alors $\mu_{\min}(E_1)\le\mu_{\max}(E_2)$.*

Démonstration. On désigne par F l'image de φ. Comme φ est non-nul, F est un sous-$\mathcal{O}_C$-module non-nul de E_2. Par conséquent, $\mu_{\min}(E_1)\le\mu(F)\le\mu_{\max}(E_2)$. □

Proposition 1.3.22 *Si E_1 et E_2 sont deux $\mathcal{O}_C$-modules localement libres de rang fini et non-nuls. On a*

1) $\mu_{\max}(E_1\otimes E_2)<\mu_{\max}(E_1)+\mu_{\max}(E_2)+a(C)+1$;

2) $\mu_{\min}(E_1\otimes E_2)>\mu_{\min}(E_1)+\mu_{\min}(E_2)-a(C)-1$.

Démonstration. 1) Montrons d'abord que, si $\mu_{\max}(E_1)+\mu_{\max}(E_2)<0$, alors $\mu_{\max}(E_1\otimes E_2)<g$. En effet, si $\mu_{\max}(E_1\otimes E_2)\ge g$, alors $H^0(C,E_1\otimes E_2)\neq 0$ (cf. le lemme 1.3.13). Par conséquent, il existe un homomorphisme non-nul de $E_1^\vee$ vers E_2. D'après la proposition 1.3.21, cela implique que

$$\mu_{\max}(E_2)\ge\mu_{\min}(E_1^\vee)=-\mu_{\max}(E_1),$$

i.e., $\mu_{\max}(E_1)+\mu_{\max}(E_2)\ge 0$. Pour démontrer 1), on prend un $\mathcal{O}_C$-module inversible L tel que $-b(C)\le\mu_{\max}(E_1)+\mu_{\max}(E_2)+\deg(L)<0$. On a alors $\mu_{\max}(E_1\otimes L)+\mu_{\max}(E_2)<0$, et donc, d'après le résultat déjà établi, $\mu_{\max}(E_1\otimes L\otimes E_2)<g$. Par conséquent,

$$\mu_{\max}(E_1\otimes E_2)<g-\deg(L)\le\mu_{\max}(E_1)+\mu_{\max}(E_2)+g+b(C)=\mu_{\max}(E_1)+\mu_{\max}(E_2)+a(C)+1.$$

2) En effet,

$$\begin{aligned}&\mu_{\min}(E_1\otimes E_2)=-\mu_{\max}((E_1\otimes E_2)^\vee)=-\mu_{\max}(E_1^\vee\otimes E_2^\vee)\\ >&-\Big(\mu_{\max}(E_1^\vee)+\mu_{\max}(E_2^\vee)+a(C)+1\Big)=\mu_{\min}(E_1)+\mu_{\min}(E_2)-a(C)-1.\end{aligned}$$

□

Remarque 1.3.23 Une conséquence classique des travaux de Narasimhan-Seshadri [73] sur les fibrés vectoriels stables sur les courbes complexes est que, si la caractéristique de k est nulle, alors

$$\mu_{\max}(E_1\otimes E_2)=\mu_{\max}(E_1)+\mu_{\max}(E_2),\quad \mu_{\min}(E_1\otimes E_2)=\mu_{\min}(E_1)+\mu_{\min}(E_2)$$

(voir aussi [77] et [66] 6.4.B). En revanche, ces égalités ne sont pas vraies en général si k est de caractéristique >0 (cf. [35])

1.4 Schémas de drapeaux

1.4.1 Quelques foncteurs représentables sur la catégorie des schémas

Dans ce sous-paragraphe, on fixe S un schéma et on désigne par $\mathbf{Sch}_S$ la catégorie des S-schémas.

On rappelle qu'un foncteur $F : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ est représentable si et seulement s'il existe un S-schéma X et un isomorphisme naturel de F vers $\mathrm{Hom}(-, X)$. D'après le théorème de Yoneda, si $G : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ est un autre foncteur, alors il y a une bijection α_G de $\mathrm{Hom}(F, G)$ à $G(X)$, où $\mathrm{Hom}(F, G)$ est l'ensemble des transformations naturelles de F à G. En particulier $\mathrm{Hom}(F, F) = \mathrm{Hom}(X, X)$ est en bijection avec $F(X)$. L'élément dans $F(X)$ correspondant à Id_X est appelé l'*élément universel*. Si $G : \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ est un foncteur et si $f : F \to G$ est une transformation naturelle, alors α_G envoie f en l'image de l'élément universel dans $G(X)$ par f.

On rappelle les définitions de quelques foncteurs représentables dans la suite de ce sous-paragraphe (sans démonstration). La référence est [50] chap. I, §9.

Fibrés vectoriels sur un schéma

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent, le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ (\varphi : X \to S) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varphi^*\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \end{array}$$

est représentable par le S-schéma $\mathbb{V}(\mathcal{E}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}))$ qui est affine sur S, appelé le *fibré vectoriel* sur S défini par $\mathcal{E}$, où $\mathrm{Sym}(\mathcal{E})$ est la $\mathcal{O}_S$-algèbre symétrique engendrée par $\mathcal{E}$. Si $\pi : \mathbb{V}(\mathcal{E}) \to S$ est le morphisme canonique, on désigne par $s_{\mathrm{univ}} : \pi^*\mathcal{E} \to \mathcal{O}_{\mathbb{V}(\mathcal{E})}$ l'élément universel. On pourrait le considérer comme une section de $(\pi^*\mathcal{E})^\vee$ sur $\mathbb{V}(\mathcal{E})$, et on l'appelle aussi la *section universelle*.

On suppose que E soit un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang fini. Si $f : X \to S$ est un schéma sur S, tout S-morphisme de schémas $\varphi : X \to \mathbb{V}(E)$ correspond à une section de $f^*(E^\vee)$ sur X qui n'est rien d'autre que $\varphi^*(s_{\mathrm{univ}})$.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent et si E est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang fini, on définit $\mathbb{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, E)$ comme le schéma $\mathbb{V}(E^\vee \otimes \mathcal{F})$. Il représente le foncteur

$$(\varphi : X \to S) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varphi^*\mathcal{F}, \varphi^*E).$$

En particulier, $\mathbb{H}\mathrm{om}(E, E)$ est noté $\mathbb{E}\mathrm{nd}(E)$. On désigne par $\mathbb{GL}(E)$ le sous-schéma ouvert de $\mathbb{E}\mathrm{nd}(E)$ qui représente le sous-foncteur

$$(\varphi : X \to S) \longmapsto \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_X}(\varphi^*E).$$

Ce foncteur se relève, par définition même, en un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes. En conséquence, $\mathbb{GL}(E)$ est un S-schéma en groupes, appelé le *groupe linéaire général* relativement à E. On a une action de $\mathbb{GL}(E)$ à gauche sur $\mathbb{V}(E^\vee)$ qui associe pour tout morphisme $\varphi : X \to S$ à chaque couple

$$(f, u) \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_X}(\varphi^*E) \times \Gamma(X, \varphi^*E)$$

l'élément $f(u) \in \Gamma(X, \varphi^*E)$.

Si G est un S-schéma en groupes, on appelle une *représentation* de G dans E tout homomorphisme de S-schéma en groupes de G vers $\mathbb{GL}(E)$. On a alors une action de G sur $\mathbb{V}(E^\vee)$ induit par celle de $\mathbb{GL}(E)$.

Grassmanniennes

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent, le foncteur

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{grass}_n(\mathcal{E}) : & \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ & (\varphi : X \to S) & \longmapsto & \{\text{quotients localement libres de rang } n \text{ de } \varphi^*\mathcal{E}\} \end{array}$$

est représenté par un S-schéma $\mathbb{G}\mathrm{rass}_n(\mathcal{E})$, appelé la *grassmannienne d'indice* n de $\mathcal{E}$. En particulier si $n = 1$, $\mathbb{G}\mathrm{rass}_1(\mathcal{E})$ est appelé le *fibré projectif* de $\mathcal{E}$, noté $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Le schéma $\mathbb{G}\mathrm{rass}_n(\mathcal{E})$ est séparé sur S. Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_S$-module de type fini (resp. de présentation finie), $\mathbb{G}\mathrm{rass}_n(\mathcal{E})$ est un S-schéma de type fini (resp. de présentation finie). Tout homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérents $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ induit une immersion fermée

$$\mathbb{G}\mathrm{rass}_n(g) : \mathbb{G}\mathrm{rass}_n(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rass}_n(\mathcal{E}).$$

Soit $\pi : \mathbb{G}\mathrm{rass}_n(\mathcal{E}) \to S$ le morphisme canonique. L'élément universel du foncteur $\mathrm{grass}_n(\mathcal{E})$ est un quotient de rang n de $\pi^*\mathcal{E}$, appelé le *module universel*. Soit $\varphi : X \to S$ un morphisme de schéma. Tout S-morphisme f de X vers $\mathbb{G}\mathrm{rass}_n(\mathcal{E})$ correspond par le théorème de Yoneda à un épimorphisme de $\varphi^*\mathcal{E}$ vers f^*F_{univ}, où F_{univ} est un module universel sur $\mathbb{G}\mathrm{rass}_n(\mathcal{E})$.

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent et si $f : \mathcal{E} \to F$ est un épimorphisme, où F est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang n, on a un épimorphisme

$$\Lambda^n f : \Lambda^n\mathcal{E} \longrightarrow \Lambda^n F$$

de $\mathcal{O}_S$-modules. Cette construction est fonctorielle au sens suivant : si $\varphi : T \to S$ est un morphisme de schémas, alors $\Lambda^n\varphi^*\mathcal{E} = \varphi^*(\Lambda^n\mathcal{E})$, $\Lambda^n\varphi^*F = \varphi^*(\Lambda^n F)$, et $\Lambda^n(\varphi^*f) = \varphi^*(\Lambda^n f)$. On obtient ainsi une transformation naturelle de $\mathrm{grass}_n(\mathcal{E})$ vers $\mathrm{grass}_1(\Lambda^n\mathcal{E})$ qui induit un morphisme de schémas $\varpi_{\mathcal{E}} : \mathbb{G}\mathrm{rass}_n(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(\Lambda^n\mathcal{E})$, appelé le *morphisme de Plücker*. En fait, le morphisme de Plücker est une immersion fermée. Par conséquent, si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_S$-module de type fini, $\mathbb{G}\mathrm{rass}_n(\mathcal{E})$ est un S-schéma projectif sur S (cf. [45] II.5.5.2).

Schémas de drapeaux

Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent et $\mathbf{m} = (m_i)_{1\le i\le p}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs ou nuls. On appelle *drapeau de type* $\mathbf{m}$ de $\mathcal{E}$ toute suite $(E_i)_{1\le i\le p}$ telle que

1) pour tout entier $1 \le i \le p$, E_i soit un quotient localement libre de rang m_i de $\mathcal{E}$;
2) pour tout entier $1 \le i < p$, la projection canonique de $\mathcal{E}$ vers E_i se factorise par E_{i+1} (de façon unique puisque l'homomorphisme canonique $\mathcal{E} \to E_{i+1}$ est un épimorphisme).

Si $\varphi : X \to S$ est un morphisme de schéma et si $D = (E_i)_{1\le i\le p}$ est un drapeau de type $\mathbf{m}$ de $\mathcal{E}$, alors $\varphi^*D \overset{\mathrm{def}}{=} (\varphi^*E_i)_{1\le i\le p}$ est un drapeau de type $\mathbf{m}$ de $\varphi^*\mathcal{E}$, appelé l'*image réciproque* de D par φ.

On désigne par $\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$ l'ensemble des drapeaux de type $\mathbf{m}$ du $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent $\mathcal{E}$. Le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{drap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E}) : & \mathbf{Sch}_S^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ & (\varphi : X \to S) & \longmapsto & \mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\varphi^*\mathcal{E}) \end{array}$$

est représenté par un S-schéma, noté $\mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$, appelé le *schéma de drapeaux* de type $\mathbf{m}$ de $\mathcal{E}$. On a une transformation naturelle canonique de $\mathrm{drap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$ vers $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}\mathrm{grass}_{m_i}(\mathcal{E})$ qui induit une immersion fermée

$$i_{\mathcal{E}}^{\mathbf{m}} : \mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \prod_{m\in\mathbf{m}}{}_S\, \mathbb{G}\mathrm{rass}_m(\mathcal{E}). \tag{1.5}$$

Par conséquent, si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent et de type fini, alors $\mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$ est un S-schéma projectif (cf. [45] II.5.5.5).

Si $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un épimorphisme de $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérents, alors on a une transformation naturelle canonique de $\mathrm{drap}_{\mathrm{m}}(\mathcal{E}')$ vers $\mathrm{drap}_{\mathrm{m}}(\mathcal{E})$ qui induit une immersion fermée

$$\mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m}}(\pi) : \mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E}).$$

Si $\mathbf{m'}$ est une sous-suite de $\mathbf{m}$, on a une transformation naturelle de $\mathrm{drap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$ vers $\mathrm{drap}_{\mathbf{m'}}(\mathcal{E})$ qui associe pour tout morphisme de schémas $\varphi : X \to S$ à tout drapeau $(E_i)_{1\le i\le p}$ de $\varphi^*\mathcal{E}$ la sous-suite de $(E_i)_{1\le i\le p}$ des quotients correspondant aux indices dans $\mathbf{m}$. Cela induit un morphisme de schémas

$$p_{\mathcal{E}}^{\mathbf{m},\mathbf{m'}} : \mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m'}}(\mathcal{E}),$$

appelé le *morphisme de restriction*. Si on désigne par

$$\pi_{\mathcal{E}}^{\mathbf{m},\mathbf{m'}} : \prod_{m\in\mathbf{m}}{}_S \, \mathbb{G}\mathrm{rass}_m(\mathcal{E}) \longrightarrow \prod_{m'\in\mathbf{m'}}{}_S \, \mathbb{G}\mathrm{rass}_{m'}(\mathcal{E})$$

la projection canonique, on a

$$\pi_{\mathcal{E}}^{\mathbf{m},\mathbf{m'}} \circ i_{\mathcal{E}}^{\mathbf{m}} = i_{\mathcal{E}}^{\mathbf{m'}} \circ p_{\mathcal{E}}^{\mathbf{m},\mathbf{m'}}.$$

Si on désigne par π le morphisme canonique de $\mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$ vers S. L'élément universel du foncteur représentable $\mathrm{drap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$ est alors un drapeau de type $\mathbf{m}$ de $\pi^*\mathcal{E}$, noté D_{univ}. Si $\varphi : X \to S$ est un morphisme de schémas, alors tout S-morphisme f de X vers $\mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$ correspond par le théorème de Yoneda au drapeau f^*D_{univ}.

Si $\varphi : X \to S$ est un morphisme de schémas et si σ est un automorphisme de $\varphi^*\mathcal{E}$, alors σ induit une application de l'ensemble $\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\varphi^*\mathcal{E})$ vers lui-même. On obtient ainsi une action de $\mathrm{Aut}(\varphi^*\mathcal{E})$ sur $\mathrm{Drap}_{\mathbf{m}}(\varphi^*\mathcal{E})$. Cette action est fonctorielle par rapport à φ. On a donc une action du schéma en groupes $\mathbb{GL}(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{D}\mathrm{rap}_{\mathbf{m}}(\mathcal{E})$.

1.4.2 Faisceaux inversibles sur les schémas de drapeaux

Soient S un schéma, E est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang fini. Si on désigne par $\pi : \mathbb{P}(E) \to S$ le morphisme canonique, alors $\bigoplus_{n\ge 0} \pi_*\mathcal{O}(n)$ s'identifie à l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(E)$ de E. De plus, $E \longmapsto \mathrm{Sym}(E)$ est un foncteur de la catégorie des $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérents vers la catégorie des $\mathcal{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes. Le S-schéma $\mathbb{P}(E)$ peut être considéré comme le schéma des drapeaux de type (1) de E. Il est donc naturel de proposer les autres liens entre des foncteurs de la catégorie des $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérents vers la catégorie des $\mathcal{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes et des images directes de certaines algèbres sur des schémas de drapeaux. En effet, dans [87] et [88], Towber a défini l'*algèbre des formes* d'un R-module E, où R est un anneau commutatif unifère. Il a expliqué que c'est un foncteur de la catégorie des R-modules vers celle des R-algèbres. D'autre part, ce foncteur commute aux localisations, donc induit un foncteur de $\mathcal{O}_S$-modules vers $\mathcal{O}_S$-algèbres. Enfin, si R est un corps et si E est de type fini, alors cette "algèbre des formes" est en fait l'algèbre des coordonnées de la variété des drapeaux complets de E. On résumera dans ce sous-paragraphe les résultats de Towber. Le livre de Fulton et de Harris [33] (Lecture 6) est aussi une bonne référence.

Symétrie de Young et algèbre des formes

Soient R un anneau et E un R-module. On désigne par $\underset{+R}{\Lambda} E$ l'algèbre commutative unifère (dont l'opérateur de la multiplication est notée $*$) sur R librement engendrée par $\Lambda_R^+ E = \bigoplus_{n\ge 1} \Lambda_R^n E$, modulo la relation suivante (appelée la symétrie de Young) :

pour tous entiers $p \geq q \geq r > 0$, si $(x_1, \cdots, x_p)$ et $(y_1, \cdots, y_q)$ sont deux collections d'éléments dans E, alors

$$\begin{aligned} & (x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) * (y_1 \wedge \cdots \wedge y_q) \\ = & \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq q} (x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i_1-1} \wedge y_1 \wedge x_{i_1+1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r-1} \wedge \cdots \wedge y_r \wedge x_{i_r+1} \wedge \cdots \wedge x_p) \\ & \quad * (x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r} \wedge y_{r+1} \wedge \cdots \wedge y_q). \end{aligned}$$

L'algèbre $\underset{+R}{\Lambda} E$ est appelée l'*algèbre des formes* de E. Le module $\Lambda_R^+ E$ est la somme directe des R-modules $\Lambda_R^n E$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$, on a naturellement une $\mathbb{N}^{\oplus \mathbb{Z}_{>0}}$-graduation sur l'algèbre $R[\Lambda_R^+ E]$, où $\mathbb{N}^{\oplus \mathbb{Z}_{>0}}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ des suites nulles presque partout. Comme la symétrie de Young dans $R[\Lambda_R^+ E]$ est homogènes pour cette graduation, l'algèbre des formes $\underset{+R}{\Lambda} E$ est canoniquement munie d'une $\mathbb{N}^{\oplus \mathbb{Z}_{>0}}$-graduation[1]. Si α est un élément dans $\mathbb{N}^{\oplus \mathbb{N}}$, on désigne par $\mathbb{S}_R^\alpha E$ la composante d'indice α de $\underset{+R}{\Lambda} E$. En particulier, si E est projectif de rang r, alors $\Lambda^n E = 0$ pour tout $n > r$, on obtient donc une $\mathbb{N}^r$ graduation sur $\underset{+R}{\Lambda} E$. On a par exemple $\mathbb{S}_R^{(n,0,\cdots,0)} E = S^n E$ et $\mathbb{S}_R^{(1,\cdots,1)} E = \text{dét}\, E$.

Comme les foncteurs de localisation sont exacts, et commutent aux produits symétriques et produits extérieurs, on obtient que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{\oplus \mathbb{Z}_{>0}}$, le foncteur $\mathbb{S}^\alpha$ commute aux localisations. Par conséquent, si X est un schéma et si $\alpha \in \mathbb{N}^{\oplus \mathbb{Z}_{>0}}$, alors on peut définir un foncteur $\mathbb{S}^\alpha$ de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents dans elle-même.

Faisceaux inversibles sur les schémas de drapeaux

Soient S un schéma et E un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang r. Soit $\mathbf{m} = (m_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. Dans ce sous-paragraphe on désigne par $\mathbb{D}$ le schéma des drapeaux de type $\mathbf{m}$ de E. On désigne par $\pi : \mathbb{D} \to S$ le morphisme canonique. Sur le schéma $\mathbb{D}$ on a un drapeau universel de $\pi^* E$:

$$\pi^* E = E_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} E_n \xrightarrow{f_n} E_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_3} E_2 \xrightarrow{f_2} E_1 \xrightarrow{f_1} 0\,.$$

Pour tout entier $1 \leq i \leq n+1$, on désigne par L_i le faisceau inversible $L_i = \text{dét}\,(\text{Ker}\, f_i)$. En combinant les S-morphismes (1.5) et le produit fibré des morphismes de Plücker, on obtient une immersion fermée f de $\mathbb{D}$ dans $P := \mathbb{P}(\Lambda^{m_1} E) \times \cdots \times \mathbb{P}(\Lambda^{m_n} E)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$ on note $P_i = \mathbb{P}(\Lambda^{m_i} E)$ et $g_i : P \to P_i$ la $i^{\text{ème}}$ projection. Si $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de nombres strictement positifs, alors le faisceau inversible $(g_1 f)^* \mathcal{O}_{P_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes (g_n f)^* \mathcal{O}_{P_n}(a_n)$ est ample relativement à π. D'autre part, on a $L_1 = (g_1 f)^* \mathcal{O}_{P_1}(1)$ et pour tout entier $2 \leq i \leq n$ on a la relation $L_i = (g_i f)^* \mathcal{O}_{P_i}(1) \otimes (g_{i-1} f)^* \mathcal{O}_{P_{i-1}}(-1)$. Enfin, on a $L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_{n+1} = \pi^*(\text{dét}\,(E))$. Par conséquent, si pour toute suite d'entiers $\mathbf{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ on désigne par $L^{\mathbf{a}}$ le faisceau $(L_1^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes L_{n+1}^{\otimes a_{n+1}})^\vee$, alors $L^{\mathbf{a}}$ est ample relativement à π lorsque $\mathbf{a}$ est une suite strictement croissante.

D'après [27] III §4 n°7, lorsque S est le spectre d'un corps, alors le groupe $\text{Pic}(\mathbb{D})$ est librement engendré par $L_1, \cdots, L_n$.

Images directes de faisceaux inversibles sur les schémas de drapeaux complets

Soient X un schéma et E un $\mathcal{O}_X$-module de rang fini. On désigne par r le rang de E. Soit $\pi : \mathbb{D} \to X$ le schéma des drapeaux complets (à savoir, les drapeaux de type $(1, \cdots, r)$). Pour

[1]La graduation que l'on considère ici est la même chose que celle dans [87] ou celle dans [33], mais le choix de l'ensemble des indices est différent.

tout entier $1 \leq i \leq r$ on désigne par P_i le X-schéma $\mathbb{P}(\Lambda^i E)$. Soit $f : \mathbb{D} \to P := P_1 \times_X \cdots \times_X P_r$ l'immersion fermée canonique. Pour tout entier $1 \leq i \leq r$ soit $g_i : P \to P_i$ la projection canonique et soit H_i le faisceau inversible $f^* g_i^* \mathcal{O}_{P_i}(1)$. Attention : le schéma P_r est isomorphe à X et $\mathcal{O}_{P_r}(1) = \Lambda^r E$. On a donc une $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$-algèbre quasi-cohérente définie par

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{\mathbf{n}=(n_i)_{1\leq i\leq r}\in\mathbb{N}^r} H_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots H_r^{\otimes n_r}$$

qui est munie d'une $\mathbb{N}^r$-graduation. L'image directe de $\mathscr{A}$ par π s'identifie à l'algèbre des formes de E.

1.5 Suites presque sous-additives

On rappel dans ce paragraphe quelques généralisations du lemme de Fekete (voir [31] page 233 pour un cas particulier) affirmant que pour toute suite sous-additive $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels (à savoir, $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$), la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/n$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Proposition 1.5.1 *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}$ une application telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = 0.$$

S'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour toute suite finie $n_1, \cdots, n_l$ d'entiers supérieurs ou égaux à n_0, on ait

$$a_{n_1+\cdots+n_l} \leq a_{n_1} + \cdots + a_{n_l} - f(n_1) - \cdots - f(n_l),$$

alors la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Démonstration. Si n, p et $n \leq l < 2n$ sont trois entiers supérieurs ou égaux à n_0, on a

$$\begin{aligned}\frac{a_{pn+l}}{pn+l} &\leq \frac{pa_n + a_l}{pn+l} - \frac{pf(n)+f(l)}{pn+l} \leq \frac{a_n}{n} + \frac{a_l}{pn} - \frac{pf(n)+f(l)}{pn+l} \\ &\leq \frac{a_n}{n} + \frac{a_l}{pn} + \frac{|f(n)|}{n} + \frac{|f(l)|}{pn}\end{aligned}.$$

Comme

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\max\limits_{n\leq i<2n} a_i}{pn} + \frac{\max\limits_{n\leq i<2n} |f(i)|}{pn} = 0,$$

on obtient que, pour tout entier $n > 0$,

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} \leq \frac{a_n}{n} + \frac{|f(n)|}{n}, \tag{1.6}$$

d'où

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{n} + \frac{|f(n)|}{n}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} + \limsup_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Par conséquent, la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ a une limite, qui est clairement ≥ 0, et finie d'après (1.6). □

Corollaire 1.5.2 *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels et $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}$ une application telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = 0$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1) il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour toute suite $n_1, \cdots, n_l$ d'entiers supérieurs ou égaux à n_0, on ait

$$a_{n_1+\cdots+n_l} \geq a_{n_1} + \cdots + a_{n_l} + f(n_1) + \cdots + f(n_l),$$

2) il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait $a_n \leq \alpha n$,

alors la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Considérons la suite $b_n = \alpha n - a_n$. C'est une suite de nombres positifs. Si $n_1, \cdots, n_l$ sont des entiers supérieurs ou égaux à n_0, $n = n_1 + \cdots + n_l$, alors

$$\begin{aligned} b_n = \alpha n - a_n = \alpha \sum_{i=1}^{k} n_i - a_n \leq \alpha \sum_{i=1}^{l} n_i - \sum_{i=1}^{l} \Big(a_{n_i} + f(n_i) \Big) \\ = \sum_{i=1}^{l} \Big(\alpha n_i - a_{n_i} - f(n_i) \Big) = b_{n_1} + \cdots + b_{n_l} - f(n_1) - \cdots - f(n_l). \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.5.1, la suite $(b_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$. Comme

$$\frac{b_n}{n} = \alpha - \frac{a_n}{n},$$

la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ a aussi une limite dans $\mathbb{R}$. □

Corollaire 1.5.3 *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels et c_1, c_2 deux constantes positives telles que :*

1) pour tout couple (m, n) d'entiers suffisamment grands, on ait $a_m + a_n \leq a_{m+n} + c_1$,

2) pour tout entier $n \geq 1$, $a_n \leq c_2 n$,

alors la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire 1.5.2 à la fonction constante $f \equiv -c_1$. □

Lemme 1.5.4 *Si $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une application croissante telle que $\sum_{\alpha\geq 1} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$, alors*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} 2^{-\alpha} \sum_{i=0}^{\alpha} f(2^i) = 0.$$

Démonstration. Pour tout entier $\alpha \geq 0$ soit $S_\alpha = \sum_{i\geq\alpha} f(2^i)/2^i$. Par la sommation d'Abel, on a

$$\sum_{i=0}^{\alpha} f(2^i) = \sum_{i=0}^{\alpha} (S_i - S_{i+1}) 2^i = S_0 - S_{\alpha+1} 2^\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha} S_i 2^{i-1}.$$

Comme $\lim_{\alpha\to+\infty} S_\alpha = 0$, $2^{-\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} S_i 2^{i-1}$ converge vers 0 lorsque $\alpha \to +\infty$. Cela montre que $\lim_{\alpha\to+\infty} 2^{-\alpha} \sum_{i=0}^{\alpha} f(2^i) = 0$. □

Proposition 1.5.5 *Soient $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres positifs et $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application croissante telle que $\sum_{\alpha\geq 1} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$. S'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout couple (m,n) d'entiers $\geq n_0$, on ait $b_{n+m} \leq b_m + b_n + f(m) + f(n)$, alors la suite $(b_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas où $n_0 = 1$. Comme f est une fonction croissante on obtient que pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$,

$$b_{m+n} \leq b_n + b_m + 2f(m+n). \tag{1.7}$$

Pour tout entier $\alpha \geq 0$ soit $S_\alpha = \sum_{i\geq\alpha} f(2^i)/2^i$. D'après l'hypothèse on a $\lim_{\alpha\to+\infty} S_\alpha = 0$. Si $2^\beta \leq n < 2^{\beta+1}$ est un entier, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} b_{2^\alpha n} &\leq 2^\alpha b_n + \sum_{i=1}^{\alpha} 2^{\alpha+1-i} f(2^{i-1}n) \\ &\leq 2^\alpha b_n + \sum_{i=1}^{\alpha} 2^{\alpha+1-i} f(2^{\beta+i}). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Si $p = \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i 2^i$, où $\epsilon_i \in \{0,1\}$ pour $0 \leq i < k$ et $\epsilon_k = 1$, et si $0 \leq r < n$ est un autre entier, on a d'après (1.7) l'inégalité suivante :

$$b_{np+r} \leq b_{np} + b_r + 2f(np+r) \leq \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i b_{2^i n} + b_r + 2\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i f\Big(\sum_{j=0}^{i} \epsilon_j 2^j n\Big) + 2f(np+r) \tag{1.9}$$

Compte tenu de l'inégalité (1.8), on a

$$b_{np+r} \leq \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i 2^i b_n + b_r + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i \sum_{j=1}^{i} 2^{i+1-j} f(2^{\beta+j}) + 2\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i f(2^{i+\beta+2}) + 2f(2^{k+\beta+2}). \tag{1.10}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \frac{b_{np+r}}{np+r} \leq \frac{pb_n}{np+r} + \frac{b_r}{np+r} + 2^{-k-\beta} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} 2^{i+1-j} f(2^{\beta+j}) \\ + 2^{-k-\beta+1} \sum_{i=0}^{k} f(2^{i+\beta+2}) + 2^{-k-\beta+1} f(2^{k+\beta+2}). \end{aligned}$$

Comme

$$2^{-k-\beta} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} 2^{i+1-j} f(2^{\beta+j}) = 2^{-k-\beta} \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k} f(2^{\beta+j}) 2^{i+1-j} \leq \sum_{j=1}^{k} f(2^{\beta+j}) 2^{2-j-\beta} = 4S_{\beta+1},$$

on obtient que

$$\frac{b_{np+r}}{np+r} \leq \frac{pb_n}{np+r} + \frac{b_r}{np+r} + 4S_{\beta+1} + 2^{-k-\beta+1} \sum_{i=0}^{k+\beta+3} f(2^i).$$

D'après le lemme 1.5.4, on a

$$\limsup_{m\to+\infty}\frac{b_m}{m}\le\liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{b_n}{n}+4S_{\lfloor\log_2 n\rfloor+1}\right)=\liminf_{n\to+\infty}\frac{b_n}{n}.$$

Donc la suite $(b_n/n)_{n\ge1}$ est convergente.

Pour le cas général, en appliquant le résultat obtenu sur la sous-suite $(b_{n_0k})_{k\ge1}$ et la fonction $g(k)=f(n_0k)$, on obtient que la suite $(b_{n_0k}/k)_{k\ge1}$ a une limite dans $\mathbb{R}_{\ge0}$. D'autre part, si $n_0\le l<2n_0$ est un entier, alors pour tout entier $k\ge1$, on a l'encadrement

$$b_{n_0(k+2)}-b_{2n_0-l}-f(n_0k+l)-f(2n_0-l)\le b_{n_0k+l}\le b_{n_0k}+b_l+f(n_0k)+f(l).\qquad(1.11)$$

Si on divise (1.11) par n_0k+l, par passage à la limite $k\to+\infty$, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{b_{n_0k+l}}{n_0k+l}=\lim_{k\to+\infty}\frac{b_{n_0k}}{n_0k}.$$

Comme l est arbitraire, on en déduit la proposition. □

Corollaire 1.5.6 *Soient $(a_n)_{n\ge1}$ une suite de nombres réels, $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ une application croissante et $c>0$ une constante. On suppose que*

1) pour tous entiers n,m assez grands, on ait $a_{n+m}\ge a_n+a_m-f(n)-f(m)$,

2) $a_n\le cn$ pour tout entier $n\ge1$,

3) $\displaystyle\sum_{\alpha\ge0}\frac{f(2^\alpha)}{2^\alpha}<+\infty$.

Alors la suite $(a_n/n)_{n\ge1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. On considère la suite $b_n=cn-a_n$. C'est une suite de nombres réels positifs. Si n et m sont deux entiers assez grands, on a

$$b_{n+m}=c(n+m)-a_{n+m}\le cn+cm-a_n-a_m+f(n)+f(m)=b_n+b_m+f(n)+f(m).$$

D'après la proposition 1.5.5, la suite $(b_n/n)_{n\ge1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ Comme $a_n/n=c-b_n/n$, la suite $(a_n/n)_{n\ge1}$ admet aussi une limite dans $\mathbb{R}$. □

1.6 Fibrés vectoriels hermitiens sur les variétés analytiques complexes

1.6.1 Structure complexe, orientation

Soit E un espace vectoriel de rang fini sur $\mathbb{R}$. On appelle *structure complexe* tout endomorphisme $J:E\to E$ de E tel que $J^2=-\mathrm{Id}$.

Si J est une structure complexe sur E, alors J induit une représentation ϕ de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{C}$ dans E en associant à i l'endomorphisme J. L'ensemble E admet donc une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Cela implique que le rang de E sur $\mathbb{R}$ est pair. Inversement si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et si $\phi:\mathbb{C}\to\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres, alors l'action de $\phi(i)$ est une structure complexe sur E. En particulier, si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une structure complexe, l'isomorphisme naturel $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E^\vee)$ induit une structure complexe sur $E^\vee$.

Si E est un espace vectoriel muni d'une structure complexe J, alors $-J$ est aussi une structure complexe sur E. On désigne par E^c l'espace vectoriel E muni de la structure complexe $-J$, appelé le *conjugé complexe* de E.

On suppose que E soit un espace vectoriel de rang $2d$ sur $\mathbb{R}$ muni d'une structure complexe J. L'endomorphisme J n'est pas diagonalisable sur E, mais si on tensorise E par $\mathbb{C}$, l'endomorphisme de $E_{\mathbb{C}}$ induit par J (noté encore J) est diagonalisable. On désigne par $E^{1,0}$ (resp. $E^{0,1}$) l'espace propre de J associé à la valeur propre i (resp. $-i$). Les sous-espaces $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ de $E_{\mathbb{C}}$ sont tous les deux de rang d sur $\mathbb{C}$. D'autre part, les deux projections $\pi^{1,0} : E \to E^{1,0}$ et $\pi^{0,1} : E \to E^{0,1}$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. La conjugaison complexe sur $\mathbb{C}$ se prolonge en une application $\mathbb{R}$-linéaire C sur $E_{\mathbb{C}}$, appelé la *conjugaison complexe*. Si (p,q) est un élément dans $\mathbb{N}^2$, on désigne par $E^{p,q}$ l'espace $\Lambda^p_{\mathbb{C}} E^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q_{\mathbb{C}} E^{0,1}$. Les vecteurs dans $E^{p,q}$ sont appelés des (p,q)-formes de E. Pour tout entier $r \geq 0$ on a la relation

$$\Lambda^r_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} E^{p,q}.$$

L'application $\mathbb{R}$-linéaire C induit naturellement une application $\mathbb{R}$-linéaire sur $\Lambda^r_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}}$, noté encore C. L'application C envoie $E^{p,q}$ en $E^{q,p}$. Dans toute la suite, si ω est une r-forme, on désigne par $\overline{\omega}$ la r-forme $C(\omega)$. On dit qu'une r-forme ω dans $\Lambda^r_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}}$ est *réelle* si $\omega = \overline{\omega}$. L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des r-formes réelles s'identifie canoniquement à $\Lambda^r_{\mathbb{R}} E$.

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une structure complexe, on a $(E^\vee)^{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E^{p,q}, \mathbb{C})$. D'autre part, si on munit $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ des structures complexes qui proviennent de l'unité imaginaire i dans $\mathbb{C}$, alors on a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ qui commutent aux structures complexes

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\pi^{1,0}"'] \arrow[dr, "\pi^{0,1}"] & \\ E^{1,0} \arrow[rr, "C"'] & & (E^{0,1})^c \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

Proposition 1.6.1 *Si α est une d-forme dans $E^{d,0}$, alors $\omega_\alpha = i^{d^2} \alpha \wedge \overline{\alpha}$ est une forme réelle non-nulle. De plus, le demi-espace $\mathbb{R}_+ \omega_\alpha$ dans $\Lambda^{2d}_{\mathbb{R}} E$ ne dépend pas du choix de α.*

Démonstration. En effet,

$$\overline{\omega}_\alpha = (-1)^{d^2} i^{d^2} \overline{\alpha} \wedge \alpha = (-1)^d i^{d^2} \overline{\alpha} \wedge \alpha = i^d \alpha \wedge \overline{\alpha} = \omega_\alpha,$$

donc ω est une forme réelle. D'autre part, si u est un nombre complexe non-nul, alors

$$\omega_{u\alpha} = u\overline{u}\omega_\alpha = |u|^2 \omega_\alpha.$$

Donc $\mathbb{R}_+ \omega_{u\alpha} = \mathbb{R}_+ \omega_\alpha$. □

D'après la proposition précédente, la structure complexe J sur E détermine une orientation de E qui est le demi-espace ouvert $\mathbb{R}_{>0}(\omega_\alpha)$ dans $\Lambda^{2d}_{\mathbb{R}} E$, où α est une forme non-nulle quelconque dans $E^{d,0}$. Les (d,d)-formes dans ce demi-espace sont dites *fortement positives*.

Plus généralement, si $0 \leq p \leq d$ est un entier et si α est une p-forme dans $E^{p,0}$, alors $i^{p^2} \alpha \wedge \overline{\alpha}$ est une (p,p)-forme réelle. On dit qu'une (p,p)-forme est *fortement positive* si elle est combinaison linéaire à coefficients positifs des formes de type $i^{p^2}\alpha\wedge\overline{\alpha}$, où α est une $(p,0)$-forme qui peut s'écrire comme produit extérieur de p $(1,0)$-formes (une telle forme est dite *décomposable*). On dit qu'une (p,p)-forme est *strictement positive* si elle est fortement positive et non-nulle. On dit qu'une (p,p)-forme β est *positive* si pour toute $(d-p,d-p)$-forme fortement positive γ, $\beta\wedge\gamma$ est dans l'orientation définie par J (ou également, fortement positive). On remarque qu'une (p,p)-forme fortement positive est toujours positive. En effet, si α est une $(p,0)$-forme décomposable et si β est un $(q,0)$-forme décomposable, on a

$$\Big(i^{p^2}\alpha\wedge\overline{\alpha}\Big)\wedge\Big(i^{q^2}\beta\wedge\overline{\beta}\Big)=i^{(p+q)^2}\Big(\alpha\wedge\beta\Big)\wedge\Big(\overline{\alpha\wedge\beta}\Big).$$

Définition 1.6.2 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une structure complexe. On appelle *forme hermitienne* sur E toute application $\mathbb{C}$-linéaire de[2] $E\otimes_{\mathbb{C}}E^c$ vers $\mathbb{C}$ telle que $H(x\otimes y)=\overline{H(y\otimes x)}$ (ceci est équivalent au fait que $H(x,x)\in\mathbb{R}$ pour tout $x\in E$). On dit qu'une forme hermitienne H sur E est *semi-positive* (resp. *définie positive*) si pour tout élément non-nul x de E, on a $H(x\otimes x)\geq 0$ (resp. $H(x\otimes x)>0$).

Remarque 1.6.3 Grâce à (1.12), il y a une bijection naturelle entre l'ensemble des formes hermitiennes sur E et celui des $(1,1)$-formes réelles sur $E^\vee$.

1.6.2 Espaces vectoriels hermitiens

On rappelle (sans démonstration) dans ce sous-paragraphe la notion d'espace vectoriel hermitien et les constructions dont on se servira dans les sous-paragraphes suivants. La référence est [17].

Espaces vectoriels hermitiens, sous-espaces, espaces quotients et espaces duals

Définition 1.6.4 Soit E un espace vectoriel de rang fini sur $\mathbb{C}$. On appelle *produit hermitien* sur E toute application $\langle\,,\,\rangle : E\times E\to\mathbb{C}$ telle que pour tous les x_1, x_2, x, y dans E et tout $\lambda\in\mathbb{C}$, on ait

1) $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$,
2) $\langle x_1+x_2,y\rangle=\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle$,
3) $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$,
4) $\langle x,x\rangle\geq 0$, et l'inégalité est stricte lorsque x est non-nul.

On appelle *espace vectoriel hermitien* tout espace vectoriel E de rang fini sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit hermitien.

On remarque qu'un produit hermitien sur E n'est rien d'autre qu'une forme hermitienne définie positive sur E.

Si $(E,\langle\,,\,\rangle_E)$ est un espace vectoriel hermitien, $\varphi: F\to E$ est un homomorphisme injectif de $\mathbb{C}$-modules, alors l'application $\langle\,,\,\rangle_F : F\times F\to\mathbb{C}$, $\langle x,y\rangle_F:=\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle_E$ est un produit hermitien sur F, appelée le *produit hermitien induit*.

Soient $(E,\langle\,,\,\rangle_E)$ un espace vectoriel hermitien et $\pi: E\to G$ est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{C}$-modules. Si on désigne par F le noyau de π, alors on a un isomomorphisme canonique de $F^\perp$ vers G. On obtient donc un produit hermitien sur G qui provient du produit hermitien induit sur $F^\perp$, appelé le *produit hermitien quotient* sur G.

Si $(E,\langle\,,\,\rangle_E)$ est un espace vectoriel hermitien, alors on a un isomorphisme canonique de E vers son dual $E^\vee$ qui envoie $x\in E$ en forme linéaire $x^\vee=\langle x,\cdot\rangle$. Evidemment $\langle x^\vee,y^\vee\rangle_{E^\vee}:=\langle x,y\rangle_E$ est un produit hermitien sur $E^\vee$, appelé le *produit hermitien dual* sur $E^\vee$.

[2]On confond ici un espace vectoriel muni d'une structure complexe et la représentation de $\mathbb{C}$ associée.

Somme directe orthogonale, produits tensoriel, produit symétrique et produit extérieur

Si $(E_1, \langle\, ,\, \rangle_1)$ et $(E_2, \langle\, ,\, \rangle_2)$ sont deux espaces vectoriels hermitiens, alors

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_{E_1 \oplus E_2} := \langle x_1, y_1 \rangle_1 + \langle x_2, y_2 \rangle_2$$

est un produit hermitien sur $E_1 \oplus E_2$, appelé la *somme directe orthogonale* de $\langle\, ,\, \rangle_1$ et $\langle\, ,\, \rangle_2$.

Si $(E_1, \langle\, ,\, \rangle_1)$ et $(E_2, \langle\, ,\, \rangle_2)$ sont deux espaces vectoriels hermitiens, alors il existe un unique produit hermitien $\langle\, ,\, \rangle_{E_1 \otimes E_2}$ sur $E_1 \otimes E_2$ tel que pour tous les $x_1, y_1 \in E_1$ et tous les $x_2, y_2 \in E_2$ on ait $\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle_{E_1 \otimes E_2} = \langle x_1, y_1 \rangle_1 \langle x_2, y_2 \rangle_2$, appelé le *produit tensoriel* de $\langle\, ,\, \rangle_1$ et de $\langle\, ,\, \rangle_2$.

Si $(E, \langle\, ,\, \rangle_E)$ est un espace vectoriel hermitien et si $n \geq 1$ est un entier, alors $S^n E$ (resp. $\Lambda^n E$) est canoniquement muni d'un produit vectoriel hermitien $\langle\, ,\, \rangle_{S^n E}$ (resp. $\langle\, ,\, \rangle_{\Lambda^n E}$) tel que pour tout $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots y_n \in E$,

$$\langle x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n \rangle_{S^n E} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \left\langle x_i, y_{\sigma(i)} \right\rangle_E ,$$

$$\Big(\text{resp. } \langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \rangle_{\Lambda^n E} = \text{dét}\left(\langle x_i, y_j \rangle_E\right)\Big),$$

appelé la $n^{\text{ième}}$*puissance symétrique* (resp. *puissance extérieure*) de $\langle\, ,\, \rangle_E$.

Si E est un espace vectoriel de rang $0 < r < +\infty$ sur $\mathbb{C}$, alors pour tout entier $0 < n \leq r$,

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n(E^\vee) \times \Lambda^n E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f_1 \wedge \cdots \wedge f_n, x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) & \longmapsto & \text{dét}\,(f_i(x_j)) \end{array}$$

est un accouplement parfait. Cela induit un isomorphisme I de $\Lambda^n(E^\vee)$ vers $\Lambda^n(E)^\vee$. Si de plus E est muni d'un produit hermitien, alors l'isomorphisme I est une isométrie pour les produits hermitiens canoniques.

Remarque 1.6.5 Si E est un espace vectoriel de rang fini et non-nul sur $\mathbb{C}$, alors pour tout entier $n \geq 1$, on a aussi un accouplement parfait

$$\begin{array}{ccc} S^n(E^\vee) \times S^n E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f_1 \cdots f_n, x_1 \cdots x_n) & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_i(x_{\sigma(i)}) \end{array}$$

qui induit un isomorphisme de $S^n(E^\vee)$ vers $(S^n E)^\vee$. Mais si E est muni d'un produit hermitien, cet isomorphisme *n'est pas* une isométrie pour les produits hermitiens canoniques dès que $n > 1$.

Applications linéaires

Soient E et F deux espaces linéaires de rang fini sur $\mathbb{C}$. L'espace $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)$ est canoniquement isomorphe à $E^\vee \otimes F$. Si E et F sont munis de produits hermitiens, il en est de même de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)$. On remarque que pour toutes les applications linéaires φ et de ψ dans $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)$, le produit hermitien de φ et ψ est donné par la formule $\langle \varphi, \psi \rangle = \text{Tr}(\psi^\vee \varphi)$. On désigne par $\|\cdot\|_h$ la norme associée au produit hermitien. D'autre part, sur $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)$ on a la norme de l'application linéaire $\|\cdot\|$ définie par

$$\|\varphi\| = \max_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

(lorsque $E = 0$, $\|0\| = 0$ par convention). On a l'encadrement suivant : pour tout homomorphisme $\varphi \in \text{Hom}(E, F)$,

$$\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_h \leq \sqrt{\text{rg}(E)} \|\varphi\|.$$

1.6.3 Structure hermitienne sur un fibré vectoriel holomorphe

Les références sont [26] et [89].

On appelle *fibré vectoriel holomorphe* sur $(X, \mathcal{O}_X^{\mathrm{an}})$ tout $\mathcal{O}_X^{\mathrm{an}}$-module localement libre de rang fini. On appelle *fibré inversible holomorphe* sur $(X, \mathcal{O}_X^{\mathrm{an}})$ tout $\mathcal{O}_X^{\mathrm{an}}$-module localement libre de rang 1.

Soient X une variété analytique compacte et E un fibré vectoriel holomorphe sur X. On appelle *structure hermitienne* (ou *métrique hermitienne*) sur E tout homomorphisme ponctuel[3] de faisceaux d'ensembles sous-jacents $h : (\mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}} \otimes E) \times (\mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}} \otimes E) \to \mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}}$ de telle sorte que pour tout $x \in X$, l'homomorphisme induit $h_x : E_x \times E_x \to \mathbb{C}$ soit un produit hermitien. Lorsque h en est ainsi, on dit que le couple $\overline{E} = (E, h)$ est un *fibré vectoriel hermitien* sur X. Les constructions algébriques sur les produits hermitiens introduits dans le sous-paragraphe précédent se généralisent naturellement aux structures hermitiennes. On peut donc construire par exemple la somme directe ou le produit tensoriel de fibrés vectoriels hermitiens etc.

On appelle *mesure de Lebesgue* toute mesure borélienne λ sur X telle que, pour toute carte locale V de X, la mesure induite sur V soit équivalente à la mesure de Lebesgue, et sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue soit une fonction lisse. Grâce à la décomposition de l'unité en somme localement finie de fonctions lisses on sait qu'il existe toujours une mesure de Lebesgue sur X. De plus, si X est compacte, toute mesure de Lebesgue est de masse totale finie. On appelle *mesure de probabililté de Lebesgue* sur X toute mesure de Lebesgue sur X qui a pour masse totale 1.

Soient X une variété analytique compacte et E un fibré vectoriel holomorphe sur X. L'ensemble $\Gamma(X, E)$ des sections holomorphes de E au-dessus de X est un espace de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Si on choisit une structure hermitienne h sur E et une probabilité de Lebesgue sur X, on obtient une famille de normes sur $\Gamma(X, E)$, notamment :

1) pour tout $1 \leq p < +\infty$ et toute section $s \in \Gamma(X, E)$,

$$\|s\|_{h,\lambda,L^p} = \left(\int_X \langle s_x, s_x \rangle_h^{\frac{p}{2}} \, d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}} ;$$

2) pour toute section $s \in \Gamma(X, E)$,

$$\|s\|_{h,\sup} = \sup_{x \in X} \langle s_x, s_x \rangle_h^{\frac{1}{2}} .$$

Cette dernière ne dépend pas du choix de la probabilité de Lebesgue λ. D'autre part, $\|\cdot\|_{h,\lambda,L^2}$ correspond à un produit hermitien sur $\Gamma(X, E)$. Par conséquent, l'espace $\Gamma(X, E)$, muni de ce produit hermitien, est un espace hermitien. Comme λ est une mesure de probabilité, l'inégalité de Hölder montre que pour tous les $1 \leq p < p' < +\infty$ et toute section $s \in \Gamma(X, E)$,

$$\|s\|_{h,\lambda,L^p} \leq \|s\|_{h,\lambda,L^{p'}} \leq \|s\|_{h,\sup}.$$

Si aucune ambiguïté ne se produit sur la structure hermitienne et sur la probabilité de Lebesgue, on note $\|\cdot\|_{L^p}$ (resp. $\|\cdot\|_{\sup}$) au lieu de $\|\cdot\|_{h,\lambda,L^p}$ (resp. $\|\cdot\|_{h,\sup}$) pour simplifier les notations.

On rappelle ici une inégalité due à Gromov qui compare la norme $\|\cdot\|_{\sup}$ et la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ (cf. [38] lemma 30 ou [84] VIII.2.5 lemma 2)

[3] à savoir, si (s, t) et (s', t') sont deux sections de $(\mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}} \otimes E) \times (\mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}} \otimes E)$ dont les restrictions sur la fibre au-dessus de x se coïncident, alors $h(s,t)_x = h(s',t')_x$ sur la fibre $(\mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}})_x \cong \mathbb{C}$. Attention : ici le mot "fibre sur x" représente l'image réciproque par l'application d'inclusion $(\{x\}, \mathbb{C}) \to (X, \mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}})$.

Théorème 1.6.6 (Gromov) *Soient X une variété analytique complexe compacte, $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur X, $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur X, et λ une probabilité de Lebesgue sur X. Alors il existe une constante postive $C > 0$ qui dépend de X, λ, $\overline{E}$ et $\overline{L}$ telle que, pour tout entier $D > 0$ et toute section $s \in \Gamma(X, E \otimes L^{\otimes D})$, on ait*

$$\|s\|_{\sup} \leq CD^d \|s\|_{L^2},$$

où d est la dimension complexe de X.

Démonstration. Comme X est compacte, elle n'a qu'un nombre fini de composantes connexes $(X_i)_{1 \leq i \leq r}$. De plus, on a

$$\Gamma(X, E \otimes L^{\otimes D}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \Gamma(X_i, E \otimes L^{\otimes D}),$$

et c'est une somme directe orthogonale par rapport à la norme L^2. On est ramené donc au cas où X est connexe. Toutes les cartes de X ont donc pour dimension complexe d.

Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement fini[4] de X par les ouverts non-vides satisfaisant aux conditions suivantes :

1) pour tout $\alpha \in I$ il existe une application biholomorphe φ_α de U_α vers la boule

$$B_3 = \{z \in \mathbb{C}^d \mid |z| < 3\}$$

de $\mathbb{C}^d$,

2) pour tout $\alpha \in I$ les restrictions de E et de L sur U_α sont libres.

3) si on désigne par

$$B_1 = \{z \in B \mid |z| < 1\} \subset B_3$$

la boule unité ouverte, les ouverts $\varphi_\alpha^{-1}(B_1)$ recouvrent X.

Pour tout $\alpha \in I$ on désigne par g_α la dérivée de Radon-Nikodym

$$g_\alpha = \frac{d\varphi_{\alpha *}(\lambda|_{U_\alpha})}{d\eta},$$

où η est la mesure de Lebesgue sur B_3. C'est une fonction lisse sur B_3. D'autre part, si on désigne par E_α (resp. L_α) le fibré vectoriel sur B_3 l'image direct de $E|_{U_\alpha}$ (resp. $L|_{U_\alpha}$) par φ_α, alors la structure hermitienne de E (resp. L) induit (par φ_α) une structure hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$ sur E_α (resp. L_α). Si s est une section de $E \otimes L^{\otimes D}$ au-dessus X, alors

$$\|s\|_{L^2}^2 = \int_X \|s_x\|^2 d\lambda(x) \geq \int_{U_\alpha} \|s_x\| d\lambda(x) = \int_{B_3} \|(\varphi_{\alpha *} s|_{U_\alpha})_z\| g_\alpha(z) d\eta(z).$$

Comme E_α est libre sur B_3, en identifiant E_α à $(\mathcal{O}_{B_3}^{\mathrm{an}})^{\oplus \operatorname{rg} E}$ par une trivialisation choisie on obtient une autre structure hermitienne $\langle\ ,\ \rangle_\alpha$ sur E_α. Comme toutes les normes sur un espace vectoriel de rang fini sont équivalentes, il existe deux nombres positifs $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout $z \in B_2 = \{z \in B \mid |z| < 2\}$ et toute section lisse u de $\mathcal{O}_{B_3,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}} \otimes E_\alpha$ au-dessus de B_3, on ait

$$C_1 \|u_z\|_\alpha \leq \|u_z\| \leq C_2 \|u_z\|_\alpha.$$

[4] Cela est toujours possible car X est compacte.

D'autre part, en choisissant une trivialisation, L_α s'identifie à $\mathcal{O}_{B_3}^{\mathrm{an}}$. On obtient donc une structure hermitienne $\langle\ ,\ \rangle_\alpha$ sur L_α via la trivialisation. Il existe alors une fonction lisse strictement positive p sur B_3 telle que pour toute section v de L_α au-dessus de B_3 et tout $z \in B_3$

$$\|v_z\| = p(z)\|v_z\|_\alpha.$$

Si $D \geq 0$ est un entier, alors $E_\alpha \otimes L_\alpha^{\otimes D} = \varphi_{\alpha*}(E|_{U_\alpha} \otimes L|_{U_\alpha}^{\otimes D})$ est isomorphe à $(\mathcal{O}_{B_3}^{\mathrm{an}})^{\oplus \operatorname{rg} E}$ via le produit tensoriel des trivialisations de E et de L comme ci-dessus. On obtient donc une structure hermitienne $\langle\ ,\ \rangle_\alpha$ au-dessus qui provient de cette trivialisation produit tensoriel. En fait, pour toute section lisse t de $E_\alpha \otimes L_\alpha^{\otimes D}$ au-dessus de B_3 et tout point $z \in B_2$, on a la comparaison suivante :

$$C_1\|t_z\|_\alpha p(z)^D \leq \|t_z\| \leq C_2\|t_z\|_\alpha p(z)^D.$$

Soit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base de $\Gamma(B_3, E_\alpha \otimes L_\alpha^{\otimes D})$ correspondant à la trivialisation. Si s est une section dans $\Gamma(X, E \otimes L^{\otimes D})$, alors $\varphi_{\alpha*}(s|_{U_\alpha})$ s'écrit sous la forme

$$\varphi_{\alpha*}(s|_{U_\alpha}) = f_1 e_1 + \cdots + f_r e_r,$$

où $f_1, \cdots, f_r$ sont des fonctions holomorphes sur B_3. D'autre part, on a

$$\|(\varphi_{\alpha*}s|_{U_\alpha})_z\|_\alpha^2 = |f_1(z)|^2 + \cdots + |f_r(z)|^2.$$

Comme g_α est une fonction continue et strictement positive sur B_3, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que $g_\alpha(z) \geq C_3$ pour tout $z \in B_2$. Comme p est une fonction continue sur B_3, la fonction

$$Tp : (z, w) \longmapsto \frac{p(w)^2 - p(z)^2}{|w - z|}$$

est alors définie et continue sur $B_3 \times B_3$ privé le diagonale. De plus, comme p est de type $\mathcal{C}^1$, Tp admet un unique prolongement continu sur $B_3 \times B_3$. Donc il existe une constante $C_4 > 0$ telle que pour tout $(z, w) \in B_2 \times B_2$ on ait

$$Tp(z, w) \leq C_4.$$

D'autre part, p est strictement positive sur B_3, donc il existe $C_5 \in]0, C_4[$ tel que $p(w)^2 \geq C_5$ pour tout $w \in B_2$. On a donc pour tout $(z, w) \in B_2 \times B_2$,

$$p(z)^2 \geq p(w)^2 \left(1 - C_6|w - z|\right),$$

où $C_6 = C_4/C_5$. Par conséquent, on a pour tout $w \in B_1$,

$$\begin{aligned}
\|s\|_{L^2}^2 &\geq \int_{|z-w|\leq 1} \|(\varphi_{\alpha*}s|_{U_\alpha})_z\|^2 g_\alpha(z) d\eta(z) \\
&\geq \int_{|z-w|\leq 1/C_6} C_1^2 \|(\varphi_{\alpha*}s|_{U_\alpha})_z\|_\alpha^2 p(z)^{2D} g_\alpha(z) d\eta(z) \\
&\geq C_1 C_3 p(w)^{2D} \int_{|z-w|\leq 1/C_6} (1 - C_6|z - w|)^D \sum_{i=1}^{r} |f_i(z)|^2 d\eta(z).
\end{aligned}$$

Comme f_i est holomorphe sur B_3, $|f_i|^2$ est une fonction sous-harmonique. Par conséquent, pour tout $0 < a \leq 1$, si on désigne par σ la mesure de Lebesgue sur $\{z \in B_3 \mid |z - w| = a\}$, on a

$$\int_{|z-w|=a} |f_i(z)|^2 d\sigma(z) \geq \frac{2d\pi^d a^{2d-1}}{\Gamma(d+1)} |f_i(w)|^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|s\|_{L^2}^2 &\geq C_1^2 C_3 p(w)^{2D} \frac{2d\pi^d}{\Gamma(d+1)} \left(\sum_{i=1}^r |f_i(w)|^2\right) \int_0^{1/C_6} (1-C_6 a)^D a^{2d-1} da \\
&\geq \frac{C_1^2 C_3}{C_2^2} \frac{2d\pi^d}{\Gamma(d+1)} \|s_{\varphi_\alpha^{-1}(w)}\|^2 \int_0^{1/C_6} (1-C_6 a)^D a^{2d-1} da \\
&= \frac{C_1^2 C_3}{C_2^2 C_6^{2d}} \frac{2d\pi^d}{\Gamma(d+1)} \|s_{\varphi_\alpha^{-1}(w)}\|^2 \int_0^1 (1-a)^D a^{2d-1} da \\
&= \frac{C_1^2 C_3}{C_2^2 C_6^{2d}} \frac{2d\pi^d}{\Gamma(d+1)} \|s_{\varphi_\alpha^{-1}(w)}\|^2 (2d)^{-1} \binom{D+2d}{2d}^{-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que, pour tout $x \in \varphi_\alpha^{-1}(B_1)$ et toute section $s \in \Gamma(X, E \otimes L^{\otimes D})$,

$$\|s\|_{L^2}^2 \geq C_\alpha^{-2} D^{-2d} \|s_x\|.$$

Enfin on prend $C = \max_{\alpha \in I} C_\alpha$, comme X est recouvert par les $\varphi_\alpha^{-1}(B_1)$,

$$\|s\|_{L^2} \geq C^{-1} D^{-d} \|s\|_{\sup},$$

d'où

$$\|s\|_{\sup} \leq C D^d \|s\|_{L^2}.$$

□

1.6.4 Connexions et courbures de Chern

Dans ce sous-paragraphe on fixe une variété analytique complexe X. On suppose que X soit équidimensionnelle et de dimension complexe n.

Connexions et courbures des fibrés holomorphes

Définition 1.6.7 Si E est un fibré vectoriel holomorphe sur X, on appelle *connexion* sur E tout homomorphisme de $\underline{\mathbb{C}}$-modules $D : \mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}} \otimes E \to \Omega_X^1 \otimes E$ tel que

$$D(fs) = df \otimes s + f Ds \tag{1.13}$$

pour tout $f \in A^0(U)$ et tout $s \in A^0(U, E)$. Comme $\Omega_X^1 = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}$, on désigne par $D^{1,0}$: $\mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}} \otimes E \to \Omega_X^{1,0} \otimes E$ et $D^{0,1} : \mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}^{\mathrm{diff}} \otimes E \to \Omega_X^{0,1} \otimes E$ les deux projections de D.

Remarque 1.6.8 L'égalité (1.13) implique deux "formules de Leibniz" pour $D^{1,0}$ et $D^{1,0}$, respectivement : pour tout $f \in A^0(U)$ et tout $s \in A^0(U, E)$,

$$D^{1,0}(fs) = \partial f \otimes s + f D^{1,0}(s), \tag{1.14}$$

$$D^{0,1}(fs) = \overline{\partial} f \otimes s + f D^{0,1}(s). \tag{1.15}$$

Remarque 1.6.9 Soient E un fibré vectoriel holomorphe sur X, D une connexion sur E, alors D definit un opérateur $D : \Omega_{X,\mathbb{C}}^q \otimes E \longrightarrow \Omega_{X,\mathbb{C}}^{q+1} \otimes E$ tel que, pour tout $\alpha \in A^q(U)$ et tout $s \in A^0(U, E)$, on ait $D(\alpha \wedge s) = d\alpha \wedge s + (-1)^q \alpha \wedge Ds$. De même, les opérateurs $D^{1,0}$ et $D^{0,1}$ se prolongent en des opérateurs sur $\Lambda\Omega_{X,\mathbb{C}} \otimes E$ de bidegrés $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement. On a encore la relation $D = D^{1,0} + D^{0,1}$ pour les oprérateurs prolongés. Enfin, les opérateurs D^2, $(D^{1,0})^2$ et $(D^{0,1})^2$ sont $\Lambda\Omega_{X,\mathbb{C}}$-linéaires.

Définition 1.6.10 Soient E un fibré vectoriel holomorphe sur X, ∇ une connexion sur E, on définit sa *courbure* comme ∇^2, et l'on pose $\Theta(\nabla) = \frac{i}{2\pi}\nabla^2$. Comme ∇^2 est $\Lambda\Omega_{X,\mathbb{C}}$-linéaire, la courbure et $\Theta(\nabla)$ sont des éléments dans $A^2(\operatorname{End} E)$.

Connexion de Chern d'un fibré holomorphe hermitien

Si E est un fibré vectoriel holomorphe sur X, alors on a un opérateur de bidegré $(0,1)$

$$D'' = \overline{\partial} \otimes \mathrm{Id} : \Lambda\Omega_{X,\mathbb{C}} \otimes E \longrightarrow \Lambda\Omega_{X,\mathbb{C}} \otimes E.$$

Cet opérateur est bien défini car $\overline{\partial}$ est $\mathcal{O}_X^{\mathrm{an}}$-linéaire. On a aussi une "formule de Leibniz" pour D'' : si U est un ouvert de X et si $\alpha \in A^{p,q}(U)$ et $s \in A^0(U,E)$, on a

$$D''(\alpha \wedge s) = \overline{\partial}\alpha \wedge s + (-1)^{p+q}\alpha \wedge D''(s).$$

Par conséquent, D'' est un opérateur local, mais il **n'est pas** une connexion.

Si h est une structure hermitienne sur E, h se prolonge en un homomorphisme de faisceaux d'ensembles

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_h : (\Omega^p_{X,\mathbb{C}} \otimes E) \times (\Omega^q_{X,\mathbb{C}} \otimes E) \longrightarrow \Omega^{p+q}_{X,\mathbb{C}} \otimes E$$

tel que, pour tout $u \in A^p(U)$, tout $v \in A^q(U)$ et tous les $s,t \in A^0(U,E)$, on ait

$$\langle u \wedge s, v \wedge t \rangle_h = \langle s,t \rangle_h \, u \wedge \overline{v}.$$

Définition 1.6.11 Si (E,h) est un fibré vectoriel hermitien. On dit qu'une connexion ∇ sur E est *hermitienne* si pour tous $s, s' \in A^0(U,E)$ on a

$$d \langle s, s' \rangle_h = \langle \nabla s, s' \rangle_h + \langle s, \nabla s' \rangle_h .$$

Remarque 1.6.12 Si (E,h) est un fibré vectoriel hermitien, et si ∇ est une connexion hermitienne sur E, alors pour tout $x \in A^p(U,E)$ et tout $y \in A^q(U,E)$, on a

$$d \langle x, y \rangle_h = \langle \nabla x, y \rangle_h + (-1)^p \langle x, \nabla y \rangle_h .$$

Définition 1.6.13 Si (E,h) est un fibré vectoriel hermitien sur X, alors il existe une unique connexion hermitienne ∇ sur E telle que $\nabla^{0,1} = D''$. Cette connexion est appelée la *connexion de Chern* de (E,h), noté $\nabla(E,h)$. Sa courbure est appelée la *courbure de Chern* de (E,h). Enfin, on note $\Theta(E,h)$ la forme $\Theta(\nabla(E,h))$. On vérifie facilement que la courbure de Chern et $\Theta(E,h)$ sont des formes dans $A^{1,1}(\mathrm{End}(E))$.

On rappelle ci-dessous le théorème de Lelong-Poincaré, la démonstration se trouve dans [26] chap. V §13.

Théorème 1.6.14 (Lelong-Poincaré) *Soient X une variété analytique complexe, (L,h) un fibré inversible hermitien, s une section méromorphe de L au-dessus de X. Alors la fonction $\log \|s\|_h^2$ est localement intégrable et on a*[5]

$$dd^c[\log \|s\|_h^2] = [\mathrm{div}(s)] - [\Theta(L,h)].$$

Corollaire 1.6.15 *Si (L,h) est un fibré inversible hermitien sur X, alors pour tout $x \in X$, $\Theta(L,h)_x$ est une forme hermitienne sur TX_x (muni de la structure complexe J_x).*

[5] On définit $d^c = \frac{1}{4\pi i}(\partial - \overline{\partial})$, d'où $dd^c = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}$.

Démonstration. D'après la formule de Lelong-Poincaré, $\Theta(L,h)$ est une $(1,1)$-forme réelle, donc $\Theta(L,h)_x$ est une forme hermitienne sur TX_x, comme remarqué dans 1.6.3. □

Proposition 1.6.16 *On suppose que X soit une variété analytique complexe compacte. Soit (L,h) un fibré inversible hermitien sur X. Si L a une section holomorphe non identiquement nulle sur X, alors il existe un point $x \in X$ tel que la forme hermitienne $\Theta(L,h)_x$ est semi-positive.*

Démonstration. Soit e une section holomorphe non identiquement nulle sur X. Soit x_0 un point de X où $\|e\|$ atteint son maximum. Grâce à la compacité de X on obtient l'existence d'un tel point x_0. D'après le théorème de Lelong-Poincaré, sur un voisinage ouvert de x_0 on a $\Theta(L,h) = -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\|e\|^2$. On désigne par $j : U \to X$ une courbe complexe passant par x_0 telle que L se trivialise par e le long de $j(U)$. On a alors

$$j^*\Theta(L,h) = -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\|e \circ i\|^2 = -\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\log\|e \circ i\|^2 dx \wedge dy.$$

Comme j est arbitraire, $\Theta(L,h)_{x_0}$ est une forme hermitienne semi-positive. □

1.6.5 Métriques de Fubini-Study

Si E est un espace vectoriel de rang $0 < r < +\infty$ sur $\mathbb{C}$, alors l'ensemble des points de $P = \mathbb{P}(E)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (muni de la topologie analytique) est une variété analytique complexe. Si on désigne par $\pi : \mathbb{P}(E) \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ le morphisme canonique, on a l'homomorphisme universel $f : \pi^*E \to \mathcal{O}_E(1)$. On suppose maintenant que E soit muni d'une métrique hermitienne $\|\cdot\|$. Alors la métrique hermitienne sur π^*E induit naturellement une métrique quotient sur $\mathcal{O}_E(1)$, appelée la *métrique de Fubini-Study*, noté $\|\cdot\|_{\mathrm{FS}}$. Si s est un élément de norme 1 dans E et si $H = (\mathbb{C}s)^{\perp}$, alors P_s s'identifie à $\mathbb{A}(H)$, le faisceau $\mathcal{O}_E(1)$ se trivialise (par s) sur P_s. D'autre part, pour tout point complexe z de $P_s = \mathbb{A}(H)$ (autrement dit, pour tout point $z \in H$), la norme carrée de s_z est $(1+|z|^2)^{-1}$. Par conséquent, sur P_s, la courbure de la métrique de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_P(1)$ est $dd^c[\log(1+|z|^2)]$. Comme $\log(1+|z|^2)$ est une fonction strictement plurisousharmonique (cf. [26] I.5.12), on obtient que $\Theta(\overline{\mathcal{O}_P(1)})$ est fortement positive en tout point de P_s (cf. [26] III.1.18). Comme s est arbitraire, $\Theta(\overline{\mathcal{O}_P(1)})$ est fortement positive en tout point complexe de P. La forme $\lambda = \Lambda^r\Theta(\overline{\mathcal{O}_P(1)})$ est une (r,r)-forme fortement positive en tout point complexe de P qui détermine une mesure de Lebesgue sur $P(\mathbb{C})$. En fait, c'est même une mesure de probabilité (cf. [26] V.15.10[6]).

Soit $n \geq 1$ un entier. On sait que sur P_s, le faisceau inversible $\mathcal{O}_E(n)$ se trivialise par $s^{\otimes n}$. Par cette trivialisation, l'espace $\Gamma(P,\mathcal{O}_E(n)) \cong \mathbb{C}[E]_n$ s'identifie à $\mathbb{C}[H]_{\leq n}$. Si $u = fs^{\otimes n}$ est une section dans $\Gamma(P,\mathcal{O}_E(n))$, où $f \in \mathbb{C}[H]_{\leq n}$, on a pour tout $z \in H$,

$$|f(z)| = \frac{\|u_z\|}{\|s_z\|^n} = \frac{\|u_z\|}{(1+|z|^2)^{-\frac{n}{2}}}.$$

Par conséquent, si W est une partie compacte de H alors

$$\sup_{z\in W}|f(z)| \leq C_W \sup_{z\in W}\|u_z\| \leq C_W\|u\|_{\sup},$$

où $C_W = \sup\limits_{z\in W}(1+|z|)^{\frac{n}{2}}$.

[6] Attention : dans cette thèse, la définition du symbole Θ diffère de celle de [26] par une constante $i/2\pi$.

Si $n \geq 1$ est un entier, la métrique de Fubini-Study induit par produit tensoriel une métrique sur $\mathcal{O}_P(n)$, notée encore $\|\cdot\|_{\mathrm{FS}}$. On s'intéresse à comparer les métriques $\|\cdot\|_{\mathrm{FS},\lambda,L^2}$ et $\|\cdot\|$ sur S^nE. D'après [13] lemme 4.3.6, on a la relation suivante :

$$\|\cdot\|^2 = \binom{n+r-1}{n}\|\cdot\|^2_{\mathrm{FS},\lambda,L^2}. \tag{1.16}$$

1.7 Fibrés vectoriels hermitiens sur les variétés arithmétiques

On rappelle dans ce paragraphe les définitions et les résultats élémentaires de géométrie d'Arakelov que l'on utilisera dans la suite. Les références sont [8], [10], [21], [78], [11] et [14].

On fixe pour ce paragraphe un corps de nombre K de discriminant Δ_K et on désigne par $\mathcal{O}_K$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K. Soient Σ_f l'ensemble des places finies de K (il s'identifie canoniquement à l'ensemble des points fermés de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$), et Σ_∞ l'ensemble des plongements de K dans $\mathbb{C}$. L'ensemble Σ_∞ a pour cardinal $[K:\mathbb{Q}]$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \Sigma_f$ on désigne par $v_\mathfrak{p} : K^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation discrète sur K définie par $\mathfrak{p}$. On rappelle que $v_\mathfrak{p}$ envoie un élément non-nul a de $\mathcal{O}_K$ en la longueur de l'anneau local artinien $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}/a\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$. Soient $\mathbb{F}_\mathfrak{p} := \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ le corps résiduel en $\mathfrak{p}$, et $N_\mathfrak{p}$ son cardinal. On désine par $|\cdot|_\mathfrak{p} : K \to \mathbb{R}$ la valeur absolue telle que $|x|_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x)}$ pour tout $x \in K^\times$. Pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, on désigne par $|\cdot|_\sigma : K \to \mathbb{R}$ la valeur absolue archimédienne qui envoie $x \in K$ en $|\sigma(x)|$. La conjugaison complexe sur $\mathbb{C}$ induit une involution $\sigma \to \overline{\sigma}$ sur Σ_∞. On a la proposition suivante qui est connue comme la "formule du produit" :

Proposition 1.7.1 *Si x est un élément non-nul de K, alors pour toute sauf un nombre fini de places finies $\mathfrak{p}$, $|x|_\mathfrak{p} = 1$, de plus, on a*

$$\prod_{\mathfrak{p}\in\Sigma_f}|x|_\mathfrak{p}\prod_{\sigma\in\Sigma_\infty}|x|_\sigma = 1.$$

1.7.1 Fibré vectoriel hermitien, degré d'Arakelov et pente arithmétique

Définitions et préliminaires

Si $\mathscr{X}$ est un schéma propre et plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\mathscr{X}_K$ soit lisse, alors l'ensemble des points de $\mathscr{X}$, vu comme $\mathbb{Z}$-schéma, à valeurs dans $\mathbb{C}$, est une variété analytique complexe compacte. De plus, cette variété a une décomposition $\mathscr{X}(\mathbb{C}) = \coprod_{\sigma\in\Sigma_\infty}\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})$. La conjugaison complexe induit une involution $F_\infty : \mathscr{X}(\mathbb{C}) \to \mathscr{X}(\mathbb{C})$ qui envoie $\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})$ sur $\mathscr{X}_{\overline{\sigma}}(\mathbb{C})$.

Définition 1.7.2 Soit $\mathscr{X}$ un schéma propre et plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\mathscr{X}_K$ soit lisse. On appelle *fibré vectoriel hermitien* sur $\mathscr{X}$ tout couple $\overline{E} = (E, h)$ consistitué d'un $\mathcal{O}_\mathscr{X}$-module localement libre de rang fini et d'une structure hermitienne sur $E(\mathbb{C})$ qui est invariante par F_∞. On appelle *rang* de $\overline{E}$ le rang du $\mathcal{O}_\mathscr{X}$-module localement libre sous-jacent E. On appelle *fibré inversible hermitien* tout fibré vectoriel hermitien de rang 1.

Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien, la structure hermitienne sur $E(\mathbb{C})$ induit des structures hermitiennes sur $E(\mathbb{C})^\vee = E^\vee(\mathbb{C})$, $S^nE(\mathbb{C}) = (S^nE)(\mathbb{C})$ et $\Lambda^nE(\mathbb{C}) = (\Lambda^nE)(\mathbb{C})$ qui sont invariante par l'action de F_∞. On note $\overline{E}^\vee$, $S^n\overline{E}$ et $\Lambda^n\overline{E}$ les fibrés vectoriels hermitiens correspondants. Si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont deux fibrés vectoriels hermitiens, alors $(E\oplus F)(\mathbb{C}) = E(\mathbb{C})\oplus F(\mathbb{C})$ et $(E\otimes F)(\mathbb{C}) = E(\mathbb{C})\otimes F(\mathbb{C})$ sont canoniquement munis des structures hermitiennes induites de celles de $E(\mathbb{C})$ et $F(\mathbb{C})$. On note $\overline{E}\oplus\overline{F}$ et $\overline{E}\otimes\overline{F}$ les fibrés vectoriels hermitiens corrspondants.

Attention : $\Lambda^n(\overline{E}^\vee)$ est naturellement isomorphe à $(\Lambda^n\overline{E})^\vee$, mais $S^n(\overline{E}^\vee)$ et $(S^n\overline{E})^\vee$ ne sont en général pas isomorphes comme fibrés vectoriels hermitiens.

Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$ et $f : F \to E$ un homomorphisme injectif d'un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module localement libre de rang fini vers E. Si on munit $F(\mathbb{C})$ de la structure hermitienne induite (fibre par fibre) de celle de $E(\mathbb{C})$, on obtient un fibré vectoriel hermitien $\overline{F}$, appelé un *sous-fibré vectoriel hermitien* de $\overline{E}$. Si $p : E \to G$ est un homomorphisme surjectif de E vers un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module localement libre de rang fini, et si on munit le fibré vectoriel $G(\mathbb{C})$ de métrique quotient, $\overline{G}$ devient un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$, appelé un *fibré vectoriel hermitien quotient* de $\overline{E}$. Si F est le noyau de p, on note $\overline{G} = \overline{E}/\overline{F}$.

Exemple 1.7.3 Un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ n'est rien d'autre que la donnée d'un $\mathcal{O}_K$-module projectif de type fini E et, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, d'un produit scalaire hermitien $\langle\ ,\ \rangle_\sigma$ sur $E\otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma}\mathbb{C}$ telle que $\langle x\otimes z, y\otimes w\rangle_\sigma = \overline{\langle x\otimes\overline{z}, y\otimes\overline{w}\rangle_{\overline{\sigma}}}$.

Définition 1.7.4 Soit $\overline{L} = (L, (\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}})$ un fibré inversible hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. On appelle *degré d'Arakelov* (normalisé) de $\overline{L}$ la valeur

$$\widehat{\deg}_n(\overline{L}) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\log\#(L/\mathcal{O}_K s) - \sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|s\|_\sigma\right), \tag{1.17}$$

où s est un élément non-nul dans L. On remarque que la valeur (1.17) ne dépend pas du choix de s grâce à la formule du produit. Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on appelle *degré d'Arakelov normalisé* de $\overline{E}$ et on désigne par $\widehat{\deg}_n(\overline{E})$ la valeur $\widehat{\deg}_n(\Lambda^{\operatorname{rg}E}\overline{E})$.

Proposition 1.7.5 *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermtien de rang r sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$*. Si $(s_1,\cdots,s_r)\in E^r$ est une base de E_K sur K, alors*

$$\widehat{\deg}_n\overline{E} = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\log\#(E/\mathcal{O}_K s_1+\cdots+\mathcal{O}_K s_r) - \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\operatorname{dét}\left(\langle s_i,s_j\rangle_\sigma\right)\right).$$

Démonstration. Comme $(s_i)_{1\le i\le r}$ est une base de E_K sur K, $x = s_1\wedge\cdots\wedge s_r$ est non-nul dans $\Lambda^r E$. De plus, on a

$$\#(\mathcal{O}_K/\mathcal{O}_K x) = \#(E/\mathcal{O}_K s_1+\cdots+\mathcal{O}_K s_r),\quad \|x\|_\sigma^2 = \operatorname{dét}\left(\langle s_i,s_j\rangle_\sigma\right).$$

□

Proposition 1.7.6 *Soient $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$ et $\overline{E}$ trois fibrés vectoriels hermitiens sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ *et $\overline{F}$ un sous-fibré vectoriel hermitien de $\overline{E}$ tel que F soit saturé dans E. On a*

1) $\widehat{\deg}_n\overline{E}^\vee = -\widehat{\deg}_n\overline{E}$,

2) $\widehat{\deg}_n\overline{F} + \widehat{\deg}_n(\overline{E}/\overline{F}) = \widehat{\deg}_n\overline{E}$,

3) $\widehat{\deg}_n(\overline{E}_1\otimes\overline{E}_2) = \operatorname{rg}(E_1)\widehat{\deg}_n\overline{E}_2 + \operatorname{rg}(E_2)\widehat{\deg}_n\overline{E}_1$.

Définition 1.7.7 Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Si E est non-nul, on appelle *pente arithmétique* de $\overline{E}$ et on note $\widehat{\mu}(\overline{E})$ la valeur $\widehat{\deg}_n(\overline{E})/\operatorname{rg}E$, on appelle *pente maximale arithmétique* (resp. *pente minimale arithmétique*) la borne supérieure (resp. inférieure) des pentes des sous-fibrés vectoriels hermitiens non-nuls (resp. fibrés vectoriels hermitiens quotients non-nuls) de $\overline{E}$, noté $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ (resp. $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$).

Remarque 1.7.8 Soit $\overline{E} \neq 0$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. L'existence de maximale et du plus grand sous-fibré vectoriel hermitien ayant la pente maximale de $\overline{E}$ et même plus généralement celle du polygône canonique associé au fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ (cf. le sous-paragraphe 4.4.2 *infra*) ont été démontrées, comme mentioné dans l'appendice de l'exposé [8], par Stuhler et Grayson (cf. [85][42]).

Inégalités de pentes

Définition 1.7.9 Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Si $\varphi : E_K \to F_K$ est un homomorphisme non-nul et si $\sigma \in \Sigma_f \cup \Sigma_\infty$, on désigne par $\|\varphi\|_\sigma$ la norme de l'application K_σ-linéaire $\varphi_{K_\sigma} : E_{K_\sigma} \to F_{K_\sigma}$, où K_σ est le séparé complété de K par rapport à la norme $\|\cdot\|_\sigma$. On définit la *hauteur* de φ comme la valeur

$$h(\varphi) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\sum_{\mathfrak{p}\in\Sigma_f} \log\|\varphi\|_{\mathfrak{p}} + \sum_{\sigma\in\Sigma_\infty} \log\|\varphi\|_\sigma\right).$$

Lemme 1.7.10 *Soient A un anneau, M un A-module.*

1) si N est un sous-A-module de M tel que M/N soit engendré par q éléments, alors pour tout entier $n \geq q$, $\Lambda^n M = N^{n-q} \wedge (\Lambda^q M)$.

2) Si

$$M = M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_i \supset M_{i+1} \supset \cdots$$

est une une suite décroissante de sous-A-modules de M telle que, pour tout $i \geq 1$, M_i/M_{i+1} soit isomorphe à un idéal principal de A, alors pour tout entier $q \geq 1$

$$\Lambda^q M = M_1 \wedge M_2 \wedge \cdots \wedge M_q.$$

Démonstration. D'abord 2) est une conséquence de 1). Pour démontrer 1), en utilisant la méthode de récurrence en n, il suffit de le démontrer pour le cas où $n = q+1$. Comme M/N est engendré par q éléments, on a $\Lambda^{q+1}(M/N) = 0$ (cf. [16] chap. III, §7 n°3 proposition 3). Comme le noyau de l'homomorphisme canonique

$$\Lambda M \longrightarrow \Lambda(M/N)$$

est l'idéal engendré par N (*loc. cit.*), on obtient

$$\Lambda^{q+1}(M) \subset N \wedge (\Lambda^q M).$$

□

Proposition 1.7.11 *Soient k un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ qui est localement compact, E et F deux espace vectoriel de rang fini sur k et $\varphi : E \to F$ un homomorphisme. Pour tout entier $1 \leq i \leq \operatorname{rg}_k E$, soit*

$$\lambda_i = \inf_{\substack{V \subset E \\ \operatorname{codim} V = i-1}} \|\varphi|_V\|.$$

Soit $\lambda_i = 0$ pour tout $i > \dim_k E$. Alors pour tout entier $q > 0$, on a

$$\|\Lambda^q \varphi\| \leq \prod_{i=1}^q \lambda_i.$$

Démonstration. Soit m le rang de E sur k. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer qu'il existe une suite décroissante de sous-espaces de E :

$$E = E_1 \supsetneq E_2 \supsetneq \cdots \supsetneq E_m \tag{1.18}$$

telle que $\|\varphi|_{E_i}\| = \lambda_i$. Comme k est localement compact, la sphère unité de E est compacte, donc il existe un vecteur x_m de norme 1 tel que

$$\|\varphi(x_m)\| = \lambda_m.$$

Supposons que $E_{i+1} \supsetneq \cdots \supsetneq E_m$ aient été choisis de sorte que

$$\|\varphi|_{E_j}\| = \lambda_j$$

pour tout $i+1 \leq j \leq m$. Encore par la compacité locale de k, il existe un vecteur $x_i \in E$ de norme 1 tel que $\|\varphi(x_i)\| = \lambda_i$. Comme tous ces vecteurs ne sont pas contenus dans E_{i+1} (d'après la définition de λ_i), on obtient l'existence de E_i. Par récurrence on démontre l'existence de la suite (1.18) et donc la proposition. □

Corollaire 1.7.12 *Soient k un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ qui est localement compact, E et F deux espaces vectoriels de rang fini sur k, $\varphi : E \to F$ un homomorphisme, et*

$$E = E_0 \supset E_1 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots$$

une suite décroissante de sous-espaces de E. Pour tout entier $n \geq 0$, soit[7] $\lambda_n = \|\varphi|_{E_n}\|$. *Alors*[8]

$$\log \|\Lambda^{\mathrm{rg}\, E}\varphi\| \leq \sum_{n \geq 1} \mathrm{rg}(E_n/E_{n+1}) \log(\lambda_n).$$

En particulier,

$$\log \|\Lambda^{\mathrm{rg}\, E}\varphi\| \leq \mathrm{rg}\, E \log \|\varphi\|.$$

Proposition 1.7.13 *Avec les notations ci-dessus, si φ est injectif, alors*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi).$$

Démonstration. En remplaçant $\overline{E}$ par son plus grand sous-fibré vectoriel hermitien ayant la pente maximale, on peux supposer que $\widehat{\mu}(\overline{E}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. Soit G un sous-$\mathcal{O}_K$-module de F tel que G_K s'identifie à l'image de E_K dans F_K par φ. On désigne par r le rang de E. L'isomorhpisme $\varphi : E_K \to G_K$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de rang 1 sur K :

$$\Lambda^r \varphi : \Lambda^r E_K \longrightarrow \Lambda^r G_K.$$

Soit $\overline{L} = (\Lambda^r \overline{E})^\vee \otimes \Lambda^r \overline{G}$. L'application $\Lambda^r \varphi$ peut être considérée comme un élément dans L_K. D'après la définition de degrés d'Arakelov, on a l'égalité

$$\widehat{\deg}_n(\overline{G}) - \widehat{\deg}_n(\overline{E}) = \widehat{\deg}_n \overline{L} = -h(\Lambda^r \varphi) \geq -rh(\varphi),$$

où la dernière inégalité provient du corollaire 1.7.12. Par conséquent, on a

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}(\overline{G}) + h(\varphi) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi).$$

□

[7] Si $E_n = 0$, alors $\|\varphi|_{E_n}\| = 0$.
[8] Par convention $\log 0 = -\infty$ et $0 \cdot (-\infty) = 0$.

Plus petite norme d'une section non-nulle

Soient $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel hermitien, $W(\overline{E})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ somme directe orthogonale des E_σ. Le $\mathcal{O}_K$-module E peut être considéré comme un réseau dans $W(\overline{E})$ par l'inclusion

$$E \longrightarrow \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_\infty} E\otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma}\mathbb{C}.$$

Si on désigne par $\pi : \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ le morphisme structural, alors π_*E est le $\mathbb{Z}$-module associé au $\mathcal{O}_X$-module E. Il est canoniquement muni d'une structure hermitienne, compatible à la conjugaison complexe, en identifiant $E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ à $W(\overline{E})$. On note $\pi_*\overline{E}$ le $\mathbb{Z}$-fibré vectoriel hermitien le $\mathbb{Z}$-module π_*E muni de la structure hermitienne comme ci-dessus.

Définition 1.7.14 On note $\varepsilon(\overline{E}) = \min\{\|e\| \mid e\in\pi_*\overline{E}\setminus\{0\}\}$. Si E est nul, on définit $\varepsilon(\overline{E}) = +\infty$.

Proposition 1.7.15 (cf. [14]) *Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien non-nul sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$*, alors*

$$\widehat{\deg}\pi_*\overline{E} = \widehat{\deg}\overline{E} - \frac{\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}E}{2}\log|\Delta_K|.$$

Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, e un vecteur dans E tel que

$$\|e\| = \varepsilon(\overline{E}).$$

Soit F le sous-$\mathcal{O}_K$-module engendré par e, muni de la structure hermitienne induite. On a

$$\widehat{\deg}\overline{F} = \widehat{\deg}\pi_*\overline{F} + \frac{1}{2}\log|\Delta_K| = -\log\varepsilon(\overline{E}) + \frac{1}{2}\log|\Delta_K|.$$

Donc on a l'inégalité suivante :

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \geq \frac{1}{2}\log[K:\mathbb{Q}] - \log\varepsilon(\overline{E}). \tag{1.19}$$

Proposition 1.7.16 (cf. [14]) *On a l'inégalité suivante :*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq -\log\varepsilon(\overline{E}) + \frac{1}{2}\log(\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(E)) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}. \tag{1.20}$$

Métriques sur l'espace des sections globales, comparaison des métriques

Soit $\mathscr{X}$ un schéma propre et plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\mathscr{X}_K$ soit lisse sur $\operatorname{Spec}K$ et équidimensionnel de dimension d. Si $\overline{\mathscr{E}}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$, alors $E = H^0(\mathscr{X},\mathscr{E})$ est un $\mathcal{O}_K$-module projectif de rang fini (autrement dit, un fibré vectoriel sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$). Pour tout plongement $\sigma : K\to\mathbb{C}$ on choisit une forme volume de type C^∞, partout strictement positive, définissant une mesure de probabilité λ_σ sur $\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})$. On suppose que la donnée $(\lambda_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_\infty}$ soit invariante par l'action de F_∞. On peut donc définir une famille de normes $\|\cdot\|_{\sigma,L^p}$ $(1\leq p<+\infty)$ et $\|\cdot\|_{\sigma,\sup}$ sur $E_\sigma := E\otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma}\mathbb{C}$ telles que pour tout $e\in E_\sigma\cong H^0(\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C}),\mathscr{E}_\sigma)$,

$$\|e\|_{\sigma,L^p} = \left(\int_{\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})}\|e_x\|_\sigma^p\,d\lambda_\sigma(x)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1\leq p<+\infty,$$

$$\|e\|_{\sigma,\sup} = \sup_{x\in\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})}\|e_x\|_\sigma.$$

Pour abréger on note $\|\cdot\|_\sigma = \|\cdot\|_{\sigma,L^2}$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme hermitienne sur $W(\overline{E})$. Pour tout $s \in E_K$, on a

$$\|s\|^2 = \sum_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|s\|_\sigma^2.$$

La proposition suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.6.6.

Proposition 1.7.17 *Pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathscr{E}}$ et tout fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$, il existe une constante positive $C > 0$ (qui dépend de $\mathscr{X}$, $(\lambda_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_\infty}$, $\overline{\mathscr{E}}$ et $\overline{\mathscr{L}}$) telle que pour toute section $s \in H^0(\mathscr{X}, \mathscr{E}\otimes\mathscr{L}^{\otimes D})_K$ et tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$,*

$$\|s\|_{\sigma,\sup} \le CD^d\|s\|_\sigma,$$

où d est la dimension de $\mathscr{X}_K$.

Corollaire 1.7.18 *Soient $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ deux fibrés inversibles hermitiens sur $\mathscr{X}$ et $\overline{\mathscr{E}}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. Pour tous les entiers $D_1, D_2 \ge 1$, on note $E_{D_1} = H^0(\mathscr{X}, L_1^{\otimes D_1})$, $F_{D_2} = H^0(\mathscr{X}, L_2^{\otimes D_2}\otimes\mathscr{E})$ et $G_{D_1,D_2} = H^0(\mathscr{X}, L_1^{\otimes D_1}\otimes L_2^{\otimes D_2}\otimes\mathscr{E})$. Si on munit ces $\mathcal{O}_K$-modules de métriques L^2, alors il existe une constante C tel que, pour tout $(D_1, D_2) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$,*

$$\varepsilon(\overline{G}_{D_1,D_2}) \le C^2 D_1^d D_2^d \varepsilon(\overline{E}_{D_1})\varepsilon(\overline{F}_{D_2}).$$

Démonstration. D'après la proposition 1.7.17, il existe une constant C telle que pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$, tout entier $D \ge 1$ et tout élément $s \in E_D \cup F_D$ on ait $\|s\|_{\sigma,\sup} \le CD^d\|s\|_\sigma$. Par conséquent, pour tout $(s_1, s_2) \in E_{D_1} \times F_{D_2}$,

$$\|s_1\otimes s_2\|_\sigma \le \|s_1\otimes s_2\|_{\sigma,\sup} \le \|s_1\|_{\sigma,\sup}\|s_2\|_{\sigma,\sup} \le C^2 D_1^d D_2^d \|s_1\|_\sigma\|s_2\|_\sigma.$$

Donc on a

$$\|s_1\otimes s_2\|^2 = \sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\|s_1\otimes s_2\|_\sigma^2 \le \sum_{\sigma\in\Sigma_\infty} C^4 D_1^{2d} D_2^{2d}\|s_1\|_\sigma^2\|s_2\|_\sigma^2 \le C^4 D_1^{2d} D_2^{2d}\|s_1\|^2\|s_2\|^2,$$

i.e. $\|s_1\otimes s_2\| \le C^2 D_1^d D_2^d \|s_1\|\cdot\|s_2\|$. Ceci implique la proposition. □

Lemme 1.7.19 *Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ et soit $C > 0$ vérifiant la conclusion de la proposition 1.7.17 avec $\overline{\mathscr{E}} = \overline{\mathcal{O}}_{\mathscr{X}}$. Pour tout entier $D \ge 1$ soit $E_D = H^0(\mathscr{X}, \mathscr{L})$, muni de métrique L^2. Soient $D_1, \cdots, D_n$ des entiers strictement poisitifs. Si $D = D_1 + \cdots + D_n$, alors*

$$\varepsilon(\overline{E}_D) \le C^n (D_1\cdots D_n)^d \varepsilon(\overline{E}_{D_1})\cdots\varepsilon(\overline{E}_{D_n}). \tag{1.21}$$

Démonstration. Si pour tout $1 \le i \le n$, s_i est une section dans $H^0(\mathscr{X}, \mathscr{L}^{\otimes D_i})$, alors pour tout $\sigma \in \Sigma_\infty$,

$$\begin{aligned}&\|s_1\otimes\cdots\otimes s_n\|_\sigma \le \|s_1\otimes\cdots\otimes s_n\|_{\sigma,\sup}\\ &\le \|s_1\|_{\sigma,\sup}\cdots\|s_n\|_{\sigma,\sup} \le C^n(D_1\cdots D_n)^d\|s_1\|_\sigma\cdots\|s_n\|_\sigma.\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned}\|s_1\otimes\cdots\otimes s_n\|^2 &= \sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\|s_1\otimes\cdots\otimes s_n\|_\sigma^2\\ &\le \sum_{\sigma\in\Sigma_\infty} C^{2n}(D_1\cdots D_n)^{2d}\|s_1\|_\sigma^2\cdots\|s_n\|_\sigma^2\\ &\le C^{2n}(D_1\cdots D_n)^{2d}\prod_{i=1}^n\Big(\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\|s_i\|_\sigma^2\Big).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\varepsilon(\overline{E}_D) \leq C^n (D_1 \cdots D_n)^d \varepsilon(\overline{E}_{D_1}) \cdots \varepsilon(\overline{E}_{D_n}).$$

□

Corollaire 1.7.20 *Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$. Pour tout entier $D \geq 1$ soit $E_D = H^0(\mathscr{X}, \mathscr{L}^{\otimes D})$, muni de la métrique L^2. Soient $\mathbf{n} = (n_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille d'entiers positifs, $N = n_1 + \cdots + n_r$. On désigne par φ l'homomorphisme naturel de $E_{n_1} \otimes \cdots \otimes E_{n_r}$ vers E_N qui envoie $s_1 \otimes \cdots \otimes s_r$ en $s_1 \cdots s_r$. Alors on a l'inégalité*

$$h(\varphi_K) \leq r \log C + \sum_{i=1}^{r} \Big(d \log n_i + \frac{1}{2} \log(\operatorname{rg} E_{n_i}) \Big), \tag{1.23}$$

où C est la constante (qui ne dépend que de $\mathscr{X}$, $(\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_\infty}$ et $\overline{\mathscr{L}}$) dont l'existence est assurée par la proposition 1.7.17 en prenant $\overline{\mathscr{E}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathscr{X}}}$ trivial.

Démonstration. Comme φ_K provient d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_K$-modules, on a $\|\varphi_K\|_{\mathfrak{p}} \leq 1$ pour toute place finie $\mathfrak{p}$. Soit $\sigma : K \to \mathbb{C}$ un plongement. Si

$$(s_i)_{1 \leq i \leq r} \in E_{n_1,\sigma} \times \cdots \times E_{n_r,\sigma},$$

alors

$$\|s_1 \cdots s_r\|_{\sigma,L^2} \leq \|s_1 \cdots s_r\|_{\sigma,\sup} \leq \|s_1\|_{\sigma,\sup} \cdots \|s_r\|_{\sigma,\sup}.$$

D'après la proposition 1.7.17, on obtient que, pour tout $1 \leq i \leq r$, $\|s_i\|_{\sigma,\sup} \leq C n_i^d \|s_i\|_{\sigma,L^2}$. Donc

$$\|s_1 \cdots s_r\|_{\sigma,L^2} \leq C^r n_1^d \cdots n_r^d \|s_1\|_{\sigma,L^2} \cdots \|s_r\|_{\sigma,L^2} = C^r n_1^d \cdots n_r^d \|s_1 \otimes \cdots \otimes s_r\|_{\sigma,L^2}.$$

Comme $E_{n_1,\sigma} \otimes \cdots \otimes E_{n_r,\sigma}$ admet une base orthogonale constituée de $\operatorname{rg}(E_{n_1}) \cdot \cdots \cdot \operatorname{rg}(E_{n_r})$ éléments de la forme $s_1 \otimes \cdots \otimes s_r$, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\|\varphi_K\|_\sigma \leq C^r n_1^d \cdots n_r^d \sqrt{\operatorname{rg}(E_{n_1}) \cdots \operatorname{rg}(E_{n_r})}.$$

Par conséquent,

$$h(\varphi_K) \leq r \log C + \sum_{i=1}^{r} \Big(d \log n_i + \frac{1}{2} \log(\operatorname{rg} E_{n_i}) \Big).$$

□

1.7.2 Fibrés inversibles hermitiens arithmétiquement amples

Soit $\mathscr{X}$ un schéma propre et plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ tel que $\mathscr{X}_K$ soit lisse sur $\operatorname{Spec} K$. On suppose choisie pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ une probabilité de Lebesgue λ_σ de telle sorte que la donnée $(\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_\infty}$ soit invariante par l'action de F_∞.

Définition 1.7.21 Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. On dit qu'une section $s \in H^0(\mathscr{X}, E)$ est *effective* (resp. *strictement effective*) si $\max_{\sigma \in \Sigma_\infty} \|s\|_{\sigma,\sup} \leq 1$ (resp. $\max_{\sigma \in \Sigma_\infty} \|s\|_{\sigma,\sup} < 1$).

Remarque 1.7.22 Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$, s une section dans $H^0(\mathscr{X}, E)$ et $\varphi : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to E$ l'homomorphisme induit par s. Si on munit $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$ de la métrique hermitienne canonique, alors s est effective (resp. strictement effective) si et seulement si $\max\limits_{\sigma \in \Sigma_\infty} \|\varphi_K\|_{\sigma,\sup} \leq 1$ (resp. $\max\limits_{\sigma \in \Sigma_\infty} \|\varphi_K\|_{\sigma,\sup} < 1$).

Définition 1.7.23 (cf. [91], voir aussi [84]) Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$. On dit que $\overline{L}$ est (*arithmétiquement*) *ample* si pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $\mathscr{X}$ il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, il existe un entier $a(n) > 0$ et un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}^{\oplus a(n)}$ vers $E \otimes L^{\otimes n}$ qui est induit par des sections strictement effectives.

Remarque 1.7.24 Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$. Si $\overline{L}$ est arithmétiquement ample, alors L est un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible ample. D'après [13] proposition 3.2.4, si une puissance tensorielle de L est engendrée par ses sections globales effectives et si $c_1(\overline{L})$ est strictement positive, alors pour tout cycle effectif $Z \in Z_q(\mathscr{X})$, $h_{\overline{L}}(Z) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{L})^q Z) \geq 0$. Zhang [91] a démontré que pour que $\overline{L}$ soit arithmétiquement ample, il suffit que (en considérant $\mathscr{X}$ comme un schéma sur $\mathbb{Z}$)

1) $L_{\mathbb{Q}}$ est ample et $\overline{L}$ est relativement semipositif,
2) pour tout sous-schéma fermé irréductible $\mathscr{Y}$ de $\mathscr{X}$ qui est plat sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, la hauteur $\widehat{c}_1(\overline{L}|_{\mathscr{Y}})^{\dim \mathscr{Y}}$ est strictement positive.

En particulier, si L est ample, si $c_1(\overline{L})$ est strictement positive et s'il existe une puissance $L^{\otimes n}$ de L qui est engendrée par ses sections effectives sur $\mathscr{X}$, alors $\overline{L}$ est arithmétiquement ample.

1.8 Morphismes d'évaluation et algébricité des sous-schémas formels

Dans ce paragraphe, on étend les critères d'algébricité de sous-schémas formels des variétés projectives développée par J.-B. Bost dans [10] et [11], voir aussi [12].

1.8.1 Un critère numérique d'algébricité

Soient K un corps, $q : X \to \operatorname{Spec} K$ une variété algébrique projective sur K, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample, Y un sous-schéma fermé intègre de X et $\widehat{V}$ un sous-schéma formel fermé du complété formel $\widehat{X}_Y$ de X le long de Y dont Y est le schéma de définition. Si on désigne par V_i le $i^{\text{ième}}$ voisinage infinisémal de Y dans $\widehat{V}$, alors on a des immersions fermées successives :

$$Y = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots .$$

L'espace localement annelé sous-jacent à $\widehat{V}$ s'identifie à $\varinjlim V_i$. On désigne par $\varphi_i : V_i \to X$ l'immersion fermée canonique, et par $\varphi : \widehat{V} \to X$ le morphisme d'espaces localement annelés induit par les φ_i.

Pour tout entier $D > 0$, on définit un espace vectoriel sur K

$$E_D := q_* L^{\otimes D} = H^0(X, L^{\otimes D})$$

qui est de dimension finie puisque X est propre sur K. Observons que l'espace topologique sous-jacent à $\widehat{V}$ et aux V_i est $|Y|$, et l'application continue d'espaces topologiques sous-jacente à φ_i et à φ est l'inclusion canonique $|\varphi| : |Y| \to |X|$.

On a des homomorphismes canoniques

$$\eta_D^i : E_D = q_* L^{\otimes D} \longrightarrow q_* \varphi_{i*} \varphi_i^* L^{\otimes D} = H^0(|Y|, \varphi_i^* L^{\otimes D}),$$
$$\eta_D : E_D = q_* L^{\otimes D} \longrightarrow q_* \varphi_* \varphi^* L^{\otimes D} = H^0(|Y|, \varphi^* L^{\otimes D}).$$

Le faisceau d'anneaux sous-jacent à $\mathcal{O}_{\widehat{V}}$ est la limite projective des faisceaux $\mathcal{O}_{V_i}$. Comme le système projectif $(\mathcal{O}_{V_i})_{i\geq 0}$ de faisceaux d'anneaux satisfait à la condition de Mittag-Leffler (cf. [46] $0_{\mathrm{III}}.13$), on a $\varphi^* L^{\otimes D} \cong \varprojlim \varphi_i^* L^{\otimes D}$. En particulier, on a

$$H^0(|Y|, \varphi^* L^{\otimes D}) = \varprojlim H^0(|Y|, \varphi_i^* L^{\otimes D}),$$

et $\eta_D = \varprojlim \eta_D^i$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit I_{i+1} l'idéal de $\mathcal{O}_X$ définissant le sous-schéma V_i. Soit $\mathfrak{I}$ le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{\widehat{V}} \to \mathcal{O}_Y$. C'est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{\widehat{V}}$ qui s'identifie canoniquement à $\varphi^* I_1$. De plus, le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{\widehat{V}} \to \mathcal{O}_{V_i}$ est par définition $\mathfrak{I}^{i+1}$, qui s'identifie canoniquement à (cf. [28] théorème 7.1) $\varphi^* I^{i+1}$.

Lemme 1.8.1 *Soient W une variété algébrique projective sur* $\operatorname{Spec} K$ *et $(L_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de $\mathcal{O}_W$-modules inversibles. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $(D_1, \cdots, D_n) \in \mathbb{N}^n$, on ait*

$$\operatorname{rg}_K H^0(W, L_1^{\otimes D_1} \otimes \cdots \otimes L_n^{\otimes D_n}) \leq c(D_1 + \cdots + D_n)^{\dim W}.$$

Démonstration. Soit L un $\mathcal{O}_W$-module inversible ample. Il exists un entier strictement positif a tel que, pour tout entier $1 \leq i \leq n$, le $\mathcal{O}_W$-module L_i est isomorphe à un sous-$\mathcal{O}_W$-module de $L^{\otimes a}$. Par conséquent, pour tout $(D_1, \cdots, D_n) \in \mathbb{N}^n$, on a un homomorphisme injectif de $L_1^{\otimes D_1} \otimes \cdots \otimes L_n^{\otimes D_n}$ vers $L^{\otimes a(D_1+\cdots+D_n)}$. La proposition découle alors de la théorie des polynômes de Hilbert. □

Dans la suite du paragraphe, on suppose que Y soit régulièrement immergé dans $\widehat{V}$, c'est-à-dire que l'idéal cohérent $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{O}_{\widehat{V}}$ soit localement engendré par une suite régulière. Dans ce cas-là le fibré normal $N(= N_Y \widehat{V}) := (\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2)^\vee$ est un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang fini, et l'homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_Y$-algèbres

$$\bigoplus_{i\geq 0} S^i N^\vee \longrightarrow \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{I}^i/\mathfrak{I}^{i+1}$$

est un isomorphisme (cf. [47] $0_{\mathrm{IV}}.15.1.9$).

Si on désigne par E_D^i le noyau de η_D^{i-1}, alors on a une suite décroissante d'espaces vectoriels sur K (en posant $E_D^0 = E_D$)

$$E_D = E_D^0 \supset E_D^1 \supset E_D^2 \supset \cdots E_D^i \supset \cdots \supset E_D^{i+1} \supset \cdots.$$

Soit $p : \mathbb{P}(N^\vee) \to Y$ le morphisme canonique, alors

$$\begin{aligned} H^0(Y, L|_Y^{\otimes D} \otimes S^i N^\vee) &= H^0(Y, L|_Y^{\otimes D} \otimes p_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N^\vee)}(i)) \\ &= H^0(Y, p_*(p^* L|_Y^{\otimes D} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N^\vee)}(i))) \cong H^0(\mathbb{P}(N^\vee), p^* L|_Y^{\otimes D} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N^\vee)}(i)). \end{aligned}$$

Soit d la dimension de $\widehat{V}$. Appliqué à $W = \mathbb{P}(N^\vee)$, qui est de dimension $d-1$, le lemme précédent montre qu'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\operatorname{rg}_K H^0(\mathbb{P}(N^\vee), p^* L|_Y^{\otimes D} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N^\vee)}(i)) \leq c(i+D)^{d-1}, \tag{1.24}$$

Donc on a la majoration

$$\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1}) \leq c(i+D)^{d-1}.$$

Soit Z la fermeture Zariski de $\widehat{V}$ dans X, c'est-à-dire le plus petit sous-schéma fermé de X contenant tous les V_i. Le sous-schéma fermé Z de X est alors défini par l'idéal $J = \varprojlim I_n$. On a $\dim Z \geq \dim \widehat{V}$ car le complété formel $\widehat{Z}$ de Z le long de Y contient $\widehat{V}$. On dit que $\widehat{V}$ est *algébrique* si on a l'égalité des dimensions $\dim Z = \dim \widehat{V}$.

Le noyau de η_D est égal à

$$\bigcap_{i\geq 0} E_D^i = \bigcap_{i\geq 0} H^0(X, I_{i+1} \otimes L^{\otimes D}) = H^0(X, J \otimes L^{\otimes D}).$$

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X, J\otimes L^{\otimes D}) \longrightarrow H^0(X, L^{\otimes D}) \longrightarrow H^0(X, (\mathcal{O}_X/J)\otimes L^{\otimes D}) \longrightarrow H^1(X, J\otimes L^{\otimes D}) .$$

Comme L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample, $H^1(X, J\otimes L^{\otimes D}) = 0$ pour D suffisamment grand. Donc il existe $D_0 > 0$ tel que, pour tout $D \geq D_0$, on ait

$$E_D \Big/ \bigcap_{i\geq 0} E_D^i = H^0(X, (\mathcal{O}_X/J)\otimes L^{\otimes D}) = H^0(Z, \psi^* L^{\otimes D}),$$

où $\psi : Z \to X$ est l'immersion fermée canonique. Son rang est donc équivalent à

$$\frac{\deg_L Z}{\dim Z!} D^{\dim Z}$$

lorsque $D \to +\infty$.

Comme $\mathfrak{I}^{i+1}$ est le noyau de $\mathcal{O}_{\widehat{V}} \to \mathcal{O}_{V_i}$, on a un isomorphisme canonique

$$\varphi_i^* L^{\otimes D} \cong (\varphi^* L^{\otimes D}) \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{V}}} (\mathcal{O}_{\widehat{V}}/\mathfrak{I}^{i+1}).$$

Par conséquent, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \varphi^* L^{\otimes D} \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{V}}} (\mathfrak{I}^i/\mathfrak{I}^{i+1}) \longrightarrow \varphi_i^* L^{\otimes D} \longrightarrow \varphi_{i-1}^* L^{\otimes D} \longrightarrow 0$$

qui induit en identifiant $\varphi^* L^{\otimes D} \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{V}}} S^i N^\vee$ à $L|_Y^{\otimes D} \otimes_{\mathcal{O}_Y} S^i N^\vee$ un diagramme commutatif dont la première ligne est exacte :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(|Y|, L|_Y^{\otimes D} \otimes S^i N^\vee) \arrow[r] & H^0(|Y|, \varphi_i^* L^{\otimes D}) \arrow[r] & H^0(|Y|, \varphi_{i-1}^* L^{\otimes D}) \\
& & E_D \arrow[u, "\eta_D^i"] \arrow[ur, "\eta_D^{i-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Si s est une section de $L^{\otimes D}$ sur X, alors s appartient à $E_D^i = \mathrm{Ker}\, \eta_D^{i-1}$ si et seulement si η_D^i envoie s dans (l'image de) $H^0(|Y|, \varphi^* L^{\otimes D} \otimes S^i N^\vee)$. Donc η_D^i induit un homomorphisme

$$\eta_D^i|_{E_D^i} : E_D^i \longrightarrow H^0(|Y|, \varphi^* L^{\otimes D} \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{V}}} S^i N^\vee)$$

dont le noyau est E_D^{i+1}, puis un homomorphisme injectif d'espaces vectoriels sur K

$$\gamma_D^i : E_D^i/E_D^{i+1} \longrightarrow H^0(|Y|, L|_Y^{\otimes D} \otimes S^i N^\vee).$$

Le critère d'algébricité ci-dessous étend celui établi par J.-B. Bost (cf. [11] Lemma 2.4) lorsque $\dim Y = 0$.

Proposition 1.8.2 *Si*

$$\liminf_{D\to\infty} \frac{\sum_{i\geq 0}(i/D)\,\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})}{\sum_{i\geq 0}\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})} < +\infty, \tag{1.25}$$

alors $\widehat{V}$ est algébrique.

Démonstration. Soit $\lambda > 0$ un entier, On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\geq 0}\frac{i}{D}\,\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})\\
&\geq \sum_{i\geq \lambda D}\frac{i}{D}\,\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1}) \geq \lambda \sum_{i\geq\lambda D}\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})\\
&= \lambda\left[\sum_{i\geq 0}\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1}) - \sum_{0\leq i<\lambda D}\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})\right]\\
&\geq \lambda\sum_{i\geq 0}\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1}) - c\lambda\sum_{0\leq i<\lambda D}(i+D)^{d-1}\\
&\geq \lambda\sum_{i\geq 0}\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1}) - c\lambda^2(\lambda+1)^{d-1}D^d.
\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{i\geq 0}\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1}) = \mathrm{rg}_K\Big(E_D\Big/\bigcap_{i\geq 0}E_D^i\Big) \sim \frac{\deg_L Z}{\dim Z!}D^{\dim Z} \qquad (Z\to+\infty),$$

on obtient que

$$\liminf_{D\to\infty} \frac{\sum_{i\geq 0}(i/D)\,\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})}{\sum_{i\geq 0}\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})} \geq \lambda - \limsup_{D\to\infty}\frac{\dim Z!c\lambda^2(\lambda+1)^{d-1}D^d}{\deg_L ZD^{\dim Z}}.$$

Supposons que $\widehat{V}$ ne soit pas algébrique. Alors $\dim Z > d$, donc

$$\limsup_{D\to\infty}\frac{\dim Z!c\lambda^2(\lambda+1)^{d-1}D^d}{\deg_L ZD^{\dim Z}} = 0.$$

Par conséquent,

$$\liminf_{D\to\infty} \frac{\sum_{i\geq 0}(i/D)\,\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})}{\sum_{i\geq 0}\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})} \geq \lambda.$$

Comme λ est arbitraire, on en déduit que

$$\liminf_{D\to\infty} \frac{\sum_{i\geq 0}(i/D)\,\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})}{\sum_{i\geq 0}\mathrm{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})} = +\infty.$$

□

La condition (1.25) est non seulement suffisante, mais encore “quasiment necessaire” pour l'algébricité de $\widehat{V}$. En effet, on peut démontrer que, si $\widehat{V}$ peut s'écrire comme le complété formel le long de Y d'une sous-variété algébrique de X contenant Y, alors $E_D^i/E_D^{i+1} = 0$ lorsque i/D est suffisamment grand.

Lemme 1.8.3 *Soient X une variété algébrique projective sur un corps k, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample, Y une sous-variété de X, $\pi : \widetilde{X} \to X$ l'éclatement de X le long de Y et E le diviseur exceptionnel. Alors il existe un entier $N > 0$ tel que, pour tout entier $n > N$, le $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$-module inversible $\pi^* L^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}(-E)$ soit ample.*

Démonstration. Soit I l'idéal de Y dans X. Comme L est ample, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $L^{\otimes N} \otimes I$ soit engendré par ses sections au-dessus de X. Soit

$$\mathcal{O}_X^{\oplus a} \longrightarrow L^{\otimes N} \otimes I$$

un homomorphisme surjectif. Il induit pour tout $n > N$ un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_X$-modules

$$F_n := (L^{\otimes (n-N)})^{\oplus a} \to L^{\otimes n} \otimes I.$$

On obtient alors un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_X$-algèbres quasi-cohérentes graduées

$$\bigoplus_{m \geq 0} S^m(F_n) \longrightarrow \bigoplus_{m \geq 0} L^{\otimes nm} \otimes I^m.$$

Par la construction Proj_X, cela induit une immersion fermée i de $\widetilde{X}$ dans $\mathbb{P}(F_n)$ compatible avec projection sur X et telle que $i^*(\mathcal{O}_{F_n}(1)) = \pi^* L^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}(-E)$. Comme $n > N$, F_n est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample. Par conséquent, $\mathcal{O}_{F_n}(1)$ est aussi ample. Enfin, $\pi^* L^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}(-E)$ est ample car une immersion fermée est un morphisme affine. □

Proposition 1.8.4 *On suppose que Y soit régulièrement immergé dans $\widehat{V}$ et qu'il existe une sous-variété algébrique Z de X contenant Y telle que $\widehat{V} = \widehat{Z}_Y$ (la variété Z est donc égale à la fermeture Zariski de $\widehat{V}$ dans X). Alors il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $i > \lambda D$, on ait $E_D^i / E_D^{i+1} = 0$.*

Démonstration. Soient $\widetilde{Z}$ l'éclatement de Z le long de Y, $v : \widetilde{Z} \to Z$ le morphisme canonique, et E le diviseur exceptionnel. Soit d la dimension de Z. On note $\mathcal{L} = v^*(L|_Z)$. Soit $\varepsilon(\mathcal{L}, Y)$ la constante

$$\sup\{q \in \mathbb{Q} \mid \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-qE) \text{ est ample}\}.$$

Cette constante est strictement positive grâce au lemme 1.8.3. Pour toute section $s \in E_D^i$ non identiquement nulle sur Z, le diviseur de Cartier sur $\widetilde{Z}$

$$v^* \operatorname{div}(s|_Z) - iE$$

est effectif. Sa classe dans $\mathrm{CH}_{d-1}(\widetilde{Z})$ est

$$(Dc_1(\mathcal{L}) - ic_1(\mathcal{O}(E))) \cap [\widetilde{Z}].$$

Pour tout $q \in \mathbb{Q}$ tel que $v^* L|_Z \otimes \mathcal{O}(-qE)$ soit ample et tout entier $0 \leq a < d$, le degré de l'élément

$$v_*(c_1(\mathcal{L})^a c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-qE))^{d-a-1} \cap [v^* \operatorname{div}(s|_Z) - iE])$$

de $\mathrm{CH}_0(Z)$ est positif ou nul. Par ailleurs, on a

$$
\begin{aligned}
&v_*(c_1(\mathcal{L})^a c_1(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}(-qE))^{d-a-1}\cap[v^*\operatorname{div}(s|_Z)-iE]) \\
=&\sum_{j=0}^{d-a-1}(-q)^j\binom{d-a-1}{j}v_*(c_1(\mathcal{L})^{d-1-j}c_1(\mathcal{O}(E))^j(Dc_1(\mathcal{L})-ic_1(\mathcal{O}(E)))\cap[\widetilde{Z}]) \\
=&\sum_{j=0}^{d-a-1}(-q)^jD\binom{d-a-1}{j}v_*(c_1(\mathcal{L})^{d-j}c_1(\mathcal{O}(E))^j\cap[\widetilde{Z}]) \\
&\quad-\sum_{j=1}^{d-a}(-q)^{j-1}i\binom{d-a-1}{j-1}v_*(c_1(\mathcal{L})^{d-j}c_1(\mathcal{O}(E))^j\cap[\widetilde{Z}]) \\
=&\,D\deg_L(Z)-(-q)^{d-a-1}iv_*(c_1(\mathcal{L})^a c_1(\mathcal{O}(E))^{d-a}\cap[\widetilde{Z}])- \\
&\quad\sum_{j=1}^{d-a-1}(-q)^{j-1}\left[qD\binom{d-a-1}{j}+i\binom{d-a-1}{j-1}\right]v_*(c_1(\mathcal{L})^{d-j}c_1(\mathcal{O}(E))^j\cap[\widetilde{Z}]).
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

Notons que l'on a

$$
v_*(c_1(\mathcal{O}(E))^j\cap[\widetilde{Z}])=(-1)^{j-1}s_{j'}(N)\cap[Z]=\begin{cases}0, & \text{si } j<d-\dim Y,\\ (-1)^{j-1}[Y], & \text{si } j=d-\dim Y,\end{cases}
$$

où $j'=j-d+\dim Y$, $N=N_YZ$ et $s_{j'}(N)$ est la ${j'}^{\text{ième}}$ classe de Segre de N (cf. [32] Chap. 3 §1). La positivité de (1.26) devient

$$
\begin{aligned}
&D\deg_L(Z)-(-q)^{d-a-1}i\deg\Big(v_*(c_1(\mathcal{L})^a c_1(\mathcal{O}(E))^{d-a}\cap[\widetilde{Z}])\Big)- \\
&\sum_{j=d-\dim Y}^{d-a-1}(-q)^{j-1}\left[qD\binom{d-a-1}{j}+i\binom{d-a-1}{j-1}\right]\deg\Big(v_*(c_1(\mathcal{L})^{d-j}c_1(\mathcal{O}(E))^j\cap[\widetilde{Z}])\Big)\geq 0
\end{aligned}
$$

En particulier, si on prend $a=\dim Y$, alors on a

$$
D\deg_L(Z)-iq^{d-\dim Y-1}\deg_L(Y)\geq 0.
$$

On a montré que, si $E_D^i/E_D^{i+1}\neq 0$, alors

$$
i\leq\frac{D\deg_L Z}{\varepsilon(\mathcal{L},Y)^{d-\dim Y-1}\deg_L Y}.
$$

□

1.8.2 Modèles des applications d'évaluation sur une base régulière de dimension 1

On garde les notations du sous-paragraphe 1.8.1. Soient Λ un schéma intègre régulier de dimension 1, a le point générique de Λ. On suppose dans ce sous-paragraphe que K soit le corps des fonctions rationnelles sur Λ.

Soit $\pi:\mathscr{X}\to\Lambda$ un morphisme projectif et plat tel que $X\cong\mathscr{X}_a$. On désigne par $u:X\to\mathscr{X}$ le morphisme composé de cet isomorphisme et du morphisme "d'inclusion" $\mathscr{X}_a\to\mathscr{X}$. Soit $\mathscr{L}$

(resp. $\mathscr{Y}$, $\mathscr{V}_i$) l'adhérence schématique de Z (resp. Y, V_i) dans $\mathscr{X}$; c'est un sous-schéma fermé de $\mathscr{X}$ dont l'idéal est noté $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{I}$, $\mathscr{I}_{i+1}$). En fait, on a $\mathscr{V}_0 = \mathscr{Y}$, et les schémas $\mathscr{V}_i$ admettent le même espace topologique sous-jacent $|\mathscr{Y}|$. Observons que $\mathscr{Y}$ est plat sur Λ.

Par définition, $\mathscr{I}_{i+1}$ (resp,. $\mathscr{J}$) est le noyau de l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-modules

$$\mathcal{O}_{\mathscr{X}} \longrightarrow u_*u^*\mathcal{O}_{\mathscr{X}} \longrightarrow u_*(\mathcal{O}_X/I_{i+1})$$
$$(\text{resp.} \qquad \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \longrightarrow u_*u^*\mathcal{O}_{\mathscr{X}} \longrightarrow u_*(\mathcal{O}_X/J)\ ).$$

On a donc des inclusions d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$

$$\mathscr{J} \subset \cdots \subset \mathscr{I}_{i+1} \subset \mathscr{I}_i \subset \cdots \subset \mathscr{I}_2 \subset \mathscr{I}_1.$$

Par conséquent, on a les immersions fermées

$$\mathscr{Y} = \mathscr{V}_0 \longrightarrow \mathscr{V}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{V}_{i-1} \longrightarrow \mathscr{V}_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{Z} \longrightarrow \mathscr{X}\ .$$

D'autre part, on a $\mathscr{I}_i\mathscr{I}_j \subset \mathscr{I}_{i+j}$ puisque $I_iI_j \subset I_{i+j}$ Notamment on a $\mathscr{I}_1\mathscr{I}_{i-1} \subset \mathscr{I}_i$ pour tout entier $i > 1$. Donc $\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1}$ peut être considéré comme un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}/\mathscr{I}_1$-module et $(\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1})|_Y$ est canoniquement isomorphe à $I_i/I_{i+1} \cong S^i(N^\vee)$. On désigne par $\bar{\varphi}_i$ l'immersion fermée canonique de $\mathscr{V}_i$ dans $\mathscr{X}$. On a $\varphi_i = \bar{\varphi}_{i,K}$.

Supposons que $\mathscr{L}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible ample relativement à π tel que $\mathscr{L}_K \cong L$. Posons $\mathscr{E}_D = \pi_*\mathscr{L}^{\otimes D}$, d'où $E_D = \mathscr{E}_{D,K}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a un homomorphisme canonique

$$\bar{\eta}_D^i : \pi_*\mathscr{L}^{\otimes D} \longrightarrow \pi_*\bar{\varphi}_{i*}\bar{\varphi}_i^*\mathscr{L}^{\otimes D}.$$

On a $\eta_D^i = \bar{\eta}_{D,K}^i$. Soit $\mathcal{E}_D^i$ le noyau de l'homomorphisme $\bar{\eta}_D^{i-1}$. Comme

$$\bar{\varphi}_i^*\mathscr{L}^{\otimes D} = (\mathscr{L}^{\otimes D} \otimes (\mathcal{O}_{\mathscr{X}}/\mathscr{I}_{\mathcal{V}_i}))|_{\mathscr{Y}},$$

on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathscr{L}^{\otimes D} \otimes (\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1}))|_{\mathscr{Y}} \longrightarrow \bar{\varphi}_i^*\mathscr{L}^{\otimes D} \longrightarrow \bar{\varphi}_{i-1}^*\mathscr{L}^{\otimes D} \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_*\bar{\varphi}_{0*}(\mathscr{L}|_{\mathcal{Y}}^{\otimes D} \otimes (\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1})|_{\mathscr{Y}}) \arrow[r] & \pi_*\bar{\varphi}_{i*}\bar{\varphi}_i^*\mathscr{L}^{\otimes D} \arrow[r] & \pi_*\bar{\varphi}_{i-1,*}\bar{\varphi}_{i-1}^*\mathscr{L}^{\otimes D} \\
& & \mathscr{E}_D \arrow[u, "\bar{\eta}_D^i"] \arrow[ur, "\bar{\eta}_D^{i-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Donc on obtient un homomorphisme injectif

$$\bar{\gamma}_D^i : \mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1} \longrightarrow \pi_*\bar{\varphi}_{0*}(\mathscr{L}|_{\mathscr{Y}}^{\otimes D} \otimes (\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1})|_{\mathscr{Y}}). \tag{1.27}$$

On remarque que $\gamma_D^i = \bar{\gamma}_{D,K}^i$.

Pour tout entier $i \geq 1$, $(\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1})|_{\mathscr{Y}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathscr{Y}}$-module sans torsion. Donc $\pi_*\bar{\varphi}_{0*}(\mathscr{L}|_{\mathscr{Y}}^{\otimes D} \otimes (\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1})|_{\mathscr{Y}})$ est un $\mathcal{O}_\Lambda$-module localement libre de rang fini.

Si $\widehat{V}$ se prolonge en un sous-schéma formel $\widehat{\mathscr{V}}$ du complété formel $\widehat{\mathscr{X}_{\mathscr{Y}}}$ tel que $\mathscr{Y}$ soit régulièrement immergé dans $\widehat{\mathscr{V}}$, alors $(\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1})|_{\mathscr{Y}}$ est isomorphe à $S^i(\mathscr{N}^\vee)$, où $\mathscr{N} = N_{\mathscr{Y}}\widehat{\mathscr{V}} = (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)|_{\mathscr{Y}}^\vee$.

Chapitre 2

Positivité faible des fibrés vectoriels et algébrisation I : cas géométrique

2.1 Conditions de positivité géométriques

Dans ce paragraphe, on fixe un corps k.

2.1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 2.1.1 Soient X un schéma projectif de dimension ≥ 1 sur k et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul. On considère les propriétés suivantes du couple (X, E) :

$P_1(X, E)$: E est ample sur X.

$P_2(X, E)$: Il existe une variété projective Y de dimension ≥ 1 sur un corps K extension (éventuellement transcendante) de k, et un k-morphisme dominant $h : Y \to X$ tels que h^*E soit ample sur Y.

$P_3(X, E)$: Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait

$$H^0(X, S^n E^\vee \otimes L^{\otimes d}) = 0.$$

L'énoncé suivant regroupe des propriétés classiques de l'amplitude des fibrés vectoriels.

Proposition 2.1.2

1) Soient X un schéma projectif de dimension ≥ 1 sur un corps k et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul. On a

$$P_1(X, E) \Longleftrightarrow P_1(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(1)).$$

2) Si $f : Y \to X$ est un morphisme fini et surjectif de schémas projectifs de dimension ≥ 1 et si E est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul, alors

$$P_1(X, E) \Longleftrightarrow P_1(Y, f^*E).$$

3) Si X est un schéma projectif de dimension ≥ 1 sur un corps k et si E est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul, alors

$$P_1(X,E) \Longleftrightarrow P_1(X_{\mathrm{red}}, E_{\mathrm{red}}),$$

où E_{red} est la restriction de E à X_{red}.

Proposition 2.1.3 *Si $f : Y \to X$ est un morphisme surjectif de variétés algébriques projectives de dimension ≥ 1 sur k et si E est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul, alors*

$$P_2(Y, f^*E) \Longrightarrow P_2(X,E).$$

Si en outre f est fini, alors

$$P_2(X,E) \Longrightarrow P_2(Y, f^*E).$$

Démonstration. "$P_2(Y,f^*E) \Longrightarrow P_2(X,E)$" : Soient Z une variété projective de dimension ≥ 1 sur une extension K de k et $h : Z \to Y$ un k-morphisme dominant tels que $h^*(f^*(E))$ soit ample. Alors $fh : Z \to X$ est un k-morphisme dominant et $(fh)^*E = h^*(f^*E)$ est ample.

"$P_2(X,E) \Longrightarrow P_2(Y,f^*E)$" : Soient Z une variété projective de dimension ≥ 1 sur une extension de k et $h : Z \to X$ un k-morphisme dominant tel que h^*E soit ample. Soient $Z' = Z \times_X Y$ et $p : Z' \to Y$, $q : Z' \to Z$ les deux projections.

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Comme f est surjectif, il en est de même de q (cf. [50] I.3.6.1), donc $fp = hq$ est dominant puisque h est dominant. Si on désigne par x_0 (resp. y_0) le point générique de X (resp. Y), alors $f(y_0) = x_0$ car f est surjectif. D'autre part, on a $\dim X = \dim Y$ car f est fini et surjectif (cf. [48] IV.5.4.1). Si y est un point de Y tel que $f(y) = x_0$, alors la restriction f_1 de f à $Y_1 = \overline{\{y\}}$ est finie puisque l'inclusion de Y_1 dans Y est une immersion fermée, donc fini (cf. [45] II.6.1.5). Par conséquent, f_1 est un morphisme fermé (cf. [45] II.6.1.10), et donc f_1 est surjectif. On a alors $\dim Y_1 = \dim X = \dim Y$. Comme Y est irréductible, $Y_1 = Y$ et $y = y_0$. On a donc démontré que $f^{-1}(\{x_0\}) = \{y_0\}$. Comme fp est dominant, x_0 est dans l'image de fp. Par conséquent, y_0 est dans l'image de p, i.e., p est un morphisme dominant. Le fibré vectoriel $p^*(f^*E) = q^*(h^*E)$ est ample sur Z' car q est un morphisme fini. Si $z_0 \in p^{-1}(y_0)$, le sous-schéma réduit $\overline{\{y_0\}} =: \widetilde{Z}$ de Z est projectif sur K, $q|_{\widetilde{Z}} : \widetilde{Z} \to Y$ est dominant et $q|_{\widetilde{Z}}^*(h^*E)$ est ample. □

Soient n un entier strictement positif et M un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur k. Après avoir choisi une base dans M, le schéma $P = \mathbb{P}_k^n$ peut être considéré comme le fibré projectif $\mathbb{P}(M)$ de M sur $\operatorname{Spec} k$, ou bien comme $\mathbb{P}(M^\vee)$ de $M^\vee$ en considérant la base duale.

Lemme 2.1.4 *Soient $f : X \to Y$ un morphisme quasi-compact de schémas, $g : Y' \to Y$ un morphisme d'un schéma affine Y' vers Y, $X' = X \times_Y Y'$, $\pi : X' \to X$ la première projection et E un fibré vectoriel sur X. Si X est quasi-compact et quasi-séparé et si E est ample, alors $E' = \pi^*(E)$ est ample sur X'.*

Démonstration. Compte tenu de [52] 3.2, il suffit de vérifier que le faisceau tautologique sur $\mathbb{P}(E')$ est ample. D'après [45] II.4.1.3, on a le diagramme commutatif suivant dont les carrés sont cartésiens

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(E') \arrow[r] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[d, "g"] \\
\mathbb{P}(E) \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

où $p : \mathbb{P}(E') \to \mathbb{P}(E)$ est la projection canonique. De plus, on a $\mathcal{O}_{E'}(1) \cong p^*(\mathcal{O}_E(1))$. Comme E est ample sur X, $\mathcal{O}_E(1)$ est ample sur $\mathbb{P}(E)$, donc Y-ample. D'après [45] II.4.6.13, $\mathcal{O}_{E'}(1)$ est Y'-ample. Comme Y' est un schéma affine, $\mathcal{O}_{E'}(1)$ est ample compte tenu de [45] II.4.6.6. $\square$

Remarque 2.1.5 En particulier si X est une variété algébrique projective de dimension ≥ 1 sur un corps k, E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul, et K une extension de k, alors

$$P_1(X, E) \Longrightarrow P_1(X_K, E_K).$$

En outre, d'après le critère cohomologique de l'amplitude et la formule de changement de base pour les groupes de cohomologie, on a

$$P_1(X_K, E_K) \Longrightarrow P_1(X, E).$$

Lemme 2.1.6 *Soit X une variété algébrique projective de dimension $n \geq 1$ sur k. Pour tout entier $m < n$, il existe une extension purement transcendante K de k, une variété algébrique projective Y de dimension m sur K, et un K-morphisme $h : Y \to X_K$ qui ne se factorise pas par un sous-schéma de X_K de la forme F_K, où F est un sous-schéma fermé propre de X (autrement dit, le k-morphisme de Y vers X est dominant), tels que, pour tout fibré vectoriel ample E sur X, $h^*(E_K)$ soit ample sur Y.*

Démonstration. En raisonnant par récurrence sur la dimension de X, il suffit de démontrer le lemme pour $m = n - 1$. D'après la normalisation de Noether, il existe un morphisme g fini et surjectif de X vers $P = \mathbb{P}^n_k$. Soit Z la sous-variété d'incidence de $P \times_k P$, c'est-à-dire la sous-variété fermée de $P \times_k P$ vu comme $\mathbb{P}(M) \times_k \mathbb{P}(M^\vee)$ définie par la relation $f(x) = 0$ ($f \in M^\vee$, $x \in M$). C'est une sous-variété de codimension 1 de $P \times_k P$. Posons $T = X \times_P Z$ et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \times_k P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g_P"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "g"] \\
Z \arrow[r, hook, "i"'] & P \times_k P \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & P \arrow[d] \\
& P \arrow[r] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{pr}_1 : P \times_k P \to P$ est la première projection, pr_2 est la deuxième et $\pi : X \times_k P \to X$ est la première projection, $i : Z \to P \times_k P$ et $j : T \to X \times_k P$ sont les immersions fermées canoniques. Soit K le corps des fonctions rationnelles de P. C'est une extension purement transcendante de k, de degré de transcendance n. On note $P_K := P \times_k \operatorname{Spec} K$ et $X_K := X \times_k \operatorname{Spec} K$, et on définit T_K par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
T_K \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "\mathrm{pr}_2 \circ j"] \\
\operatorname{Spec} K \arrow[r] & P
\end{tikzcd}$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
T_K \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook, "j_K"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & T \arrow[d, hook, "j"] & \\
X_K \arrow[r] \arrow[d, "g_K"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \times_k P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g_P"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "g"] \\
P_K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & P \times_k P \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & P \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} K \arrow[r] & P \arrow[r] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

Les schémas X_K et T_K sont projectifs sur $\operatorname{Spec} K$. De plus, comme un corps est universellement caténaire (d'après [28] corollaire 13.5), on a

$$\dim T_K = \dim T - \dim P = \dim Z - \dim P = 2n - 1 - n = n - 1.$$

Comme $\mathrm{pr}_1 i : Z \to P$ est surjectif, il en est de même de $\pi j : T \to X$. D'autre part, $\mathrm{pr}_1 \circ i : Z \to P$ est localement pour la topologie de Zariski un fibré en $\mathbb{P}^{n-1}$, et par changement de base, il en va donc de même de $\mathrm{pr}_1 \circ j : T \to X$. Cela montre que T est un schéma intègre. La projection canonique u de T_K vers T est donc dominant. Par conséquent, le morphisme $\pi j u : T_K \to X$ est dominant. Si E est un fibré vectoriel ample sur X, alors E_K est ample sur X_K d'après le lemme 2.1.4. Comme j_K est une immersion fermée, $j_K^*(E_K)$ est ample sur T_K. Enfin, en prennant une composante irréductible de $(T_K)_{\mathrm{red}}$ on obtient une variété algébrique Y de dimension $n-1$ sur K ainsi qu'un morphisme $h : Y \to X_K$ qui est le composé de j_K avec l'immersion fermée canonique de Y dans T_K de telle sorte que le morphisme canonique de Y dans X soit dominant et que, pour tout fibré vectoriel ample E sur X, $h^*(E_K)$ soit ample sur Y. □

Remarque 2.1.7 La démonstration ci-dessus montre que l'on peut construire K de degré de transcendance sur k égal à

$$\sum_{m<i\leq n} i = \frac{1}{2}(n^2 + n - m^2 - m).$$

Remarque 2.1.8 Dans le lemme 2.1.6, si on suppose que X soit géométriquement réduit (c'est-à-dire que le corps des fonctions rationnelles sur X soit une extension séparable sur k, cf. [48] IV.4.6.1), alors on peut choisir Y géométriquement réduit. Cela repose sur une variante de la normalisation de Noether (cf. [28] Corollaire 16.18) qui nous permet de trouver un morphisme fini surjectif et séparable de X sur un espace projectif.

Remarque 2.1.9 Soient X une variété projective de dimension ≥ 1 et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul. D'après le lemme 2.1.6, la condition $P_2(X,E)$ est équivalente à la condition suivante :
$P_2'(X,E)$: Il existe une courbe projective C sur une extension de k et un k-morphisme dominant $h : C \to X$ tels que h^*E soit ample sur C.

Proposition 2.1.10 *Soient X un schéma projectif de dimension ≥ 1 et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini. La condition $P_3(X,E)$ est équivalente à chacune des conditions suivantes :*

1) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L et tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent sans torsion $\mathcal{F}$, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait

$$H^0(X, S^n E^\vee \otimes L^{\otimes d} \otimes \mathcal{F}) = 0.$$

2) Il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample L tel que, pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent sans torsion $\mathcal{F}$, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait

$$H^0(X, S^n E^\vee \otimes L^{\otimes d} \otimes \mathcal{F}) = 0.$$

3) Il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample L et un nombre $\lambda > 0$ tels que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait

$$H^0(X, S^n E^\vee \otimes L^{\otimes d}) = 0.$$

Démonstration. "1)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$3)" est trivial.

"$P_3(X,E) \Longrightarrow$1)" : Soit L_1 un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample tel que $L_2 = L_1 \otimes L^\vee$ soit très ample. D'après le lemme 1.3.5 il existe deux entiers m et a ainsi qu'un homomorphisme injectif de $\mathcal{F}$ dans $(L_1^{\otimes m})^{\oplus a}$. Il induit un homomorphisme injectif

$$S^n E^\vee \otimes L^{\otimes d} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow S^n E^\vee \otimes (L_1^{\otimes(d+m)})^{\oplus a} \otimes L_2^{\vee \otimes d}.$$

Comme $L_2^{\otimes d}$ est très ample, il est effectif, donc il existe un homomorphisme injectif de $L_2^{\vee\otimes d}$ dans $\mathcal{O}_X$. Par conséquent, on obtient un homomorphisme injectif

$$S^n E^\vee \otimes (L_1^{\otimes(d+m)})^{\oplus a} \otimes L_2^{\vee\otimes d} \longrightarrow (S^n E^\vee \otimes L_1^{\otimes(d+m)})^{\oplus a}$$

Si (X,E) vérifie la condition P_3, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, $H^0(X, S^n E^\vee \otimes L_1^{\otimes(d+m)}) = 0$. Sous ces hypothèses, $H^0(X, S^n E^\vee \otimes L^{\otimes d} \otimes \mathcal{F}) = 0$ car c'est un sous-groupe du groupe $H^0(X, S^n E^\vee \otimes L_1^{\otimes(d+m)})^{\oplus a} = 0$.

"3)$\Longrightarrow$ $P_3(X,E)$" : Soit L' un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Alors il existe un entier m tel que $L^{\otimes m} \otimes L'^\vee$ soit très ample. Par conséquent, il existe un homomorphisme injectif $\mathcal{O}_X \to L^{\otimes m} \otimes L'^\vee$ qui induit un homomorphisme injectif $L' \to L^{\otimes m}$. Par conséquent, pour tout entier $n > 0$ et tout entier $d > 0$ on a un homomorphisme injectif $S^n E^\vee \otimes L'^{\otimes d} \longrightarrow S^n E^\vee \otimes L^{\otimes md}$. On a donc un homomorphisme injectif des groupes de sections globales :

$$H^0(X, S^n E^\vee \otimes L'^{\otimes d}) \longrightarrow H^0(X, S^n E^\vee \otimes L^{\otimes md}).$$

□

Lemme 2.1.11 *Soit $h : X \to Y$ un morphisme dominant de schémas intègres. Si F est un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang fini tel que $H^0(X, h^*(F)) = 0$, alors $H^0(Y,F) = 0$.*

Démonstration. Soit x (resp. y) le point générique de X (resp. Y). Comme h est dominant on a $h(x) = y$. Si $s \in H^0(Y, F) \neq 0$, alors $s(y) \neq 0$, donc son image canonique dans $H^0(X, h^*(F))$ est non-nulle puisque l'homomorphisme canonique $F_y \longrightarrow h^*(F)_x$ est injectif. □

Proposition 2.1.12 *Soit $h : X \to Y$ un morphisme dominant de variétés algébriques et E un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang fini et non-nul. Alors*

$$P_3(X, h^*E) \Longrightarrow P_3(Y, E)$$

Démonstration. Si L est un $\mathcal{O}_Y$-module inversible, alors h^*L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Donc il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $d > \lambda$ et tout $n > \lambda d$, on ait

$$H^0(X, S^n(h^*E)^\vee \otimes (h^*L)^{\otimes d}) = H^0(X, h^*(S^n(E^\vee) \otimes L^{\otimes d})) = 0.$$

Par conséquent, on a $H^0(X, S^n(E^\vee) \otimes L^{\otimes d}) = 0$ compte tenu du lemme 2.1.11. □

Remarque 2.1.13 Dans la proposition 2.1.12, il suffit de supposer que X soit un schéma projectif sur k qui est réduit. En effet, dans ce cas-là, toute composante irréductible de X est intègre. En appliquant la proposition 2.1.12 sur une des composantes irréductibles de X qui domine Y on obtient le résultat.

Remarque 2.1.14 Soient X un schéma projectif sur k et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul. Si K est une extension de k, alors

$$P_3(X_K, E_K) \Longleftrightarrow P_3(X, E).$$

En effet, pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, on a

$$H^0(X_K, \mathcal{F}_K) \cong H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_k K$$

compte tenu du [46] III.1.4.15 (voir [47] IV.1.7.21), et si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample sur X, alors L_K est ample sur X_K.

Lemme 2.1.15 *Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme surjectif de schémas projectifs sur k. Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample relativement à π, alors il existe un $\mathcal{O}_Y$-module inversible ample M tel que $L \otimes \pi^*M$ soit ample.*

Démonstration. Comme L est ample relativement à π, il existe un entier $n > 0$, un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang fini et non-nul E et une immersion $f : X \to \mathbb{P}(E)$ compatible à π tels que $L^{\otimes n} \cong f^*(\mathcal{O}_E(1))$. On désigne par $p : \mathbb{P}(E) \to X$ la projection canonique. On a ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}(E) \arrow[dl, "p"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Comme π est propre, le morphisme f est une immersion fermée. Comme Y est projective, il existe un $\mathcal{O}_Y$-module inversible ample M tel que $E \otimes M^{\otimes n}$ soit encore ample. On a alors $\mathbb{P}(E) \cong \mathbb{P}(E \otimes M^{\otimes n})$, et

$$\mathcal{O}_{E \otimes M^{\otimes n}}(1) \cong \mathcal{O}_E(1) \otimes p^*M^{\otimes n}.$$

Comme f est une immersion fermée,

$$(L \otimes \pi^* M)^{\otimes n} = f^*(\mathcal{O}_E(1)) \otimes f^*(p^*M)^{\otimes n} = f^*(\mathcal{O}_E(1) \otimes p^*M^{\otimes n}) \cong f^*(\mathcal{O}_{E\otimes M^{\otimes n}}(1))$$

est ample puisque $E \otimes M^{\otimes n}$ est ample. □

Proposition 2.1.16 *Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme surjectif de schémas projectifs sur k. Si F est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul, ample relativement à π, alors il existe un $\mathcal{O}_Y$-module inversible ample M tel que $F \otimes \pi^* M$ soit ample.*

Démonstration. Soient $q : \mathbb{P}(F) \to X$ le morphisme canonique et $L = \mathcal{O}_F(1)$. Comme F est ample relativement à π, L est ample relativement à $f = \pi q$. Si on applique le lemme 2.1.15 à f et à L, on obtient qu'il existe un $\mathcal{O}_Y$-module inversible ample M tel que $L \otimes f^*M$ soit ample. Comme $L \otimes f^*M = L \otimes q^*(\pi^*M)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{F\otimes\pi^*M}(1)$, le faisceau $F \otimes \pi^*M$ est ample. □

Proposition 2.1.17 *Soient X un schéma projectif de dimension ≥ 1 sur k et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul. Alors on a*

$$P_3(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(-1)) \Longleftrightarrow P_3(X, E).$$

Démonstration. Dans la démonstration, on désigne par $\pi : \mathbb{P}(E^\vee) \to X$ le morphisme canonique.

"$\Longrightarrow$" : Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Comme $(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(-1))$ vérifie la condition P_3, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait

$$H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(n) \otimes \pi^* L^{\otimes d}) = 0.$$

Comme on a un isomorphisme canonique

$$\pi_*(\mathcal{O}_{E^\vee}(n) \otimes \pi^* L^{\otimes d}) \cong \pi_*(\mathcal{O}_{E^\vee}(n)) \otimes L^{\otimes d} \cong S^n E^\vee \otimes L^{\otimes d},$$

on en déduit que, si $n > \lambda d$,

$$H^0(X, S^n E^\vee \otimes L^{\otimes d}) = H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}(n) \otimes \pi^* L^{\otimes d}) = 0.$$

"$\Longleftarrow$" : D'après le lemme 2.1.15, il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample M tel que $L = \pi^*M \otimes \mathcal{O}_{E^\vee}(1)$ soit ample sur $\mathbb{P}(E^\vee)$. Comme la condition $P_3(X, E)$ est satisfaite, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait $H^0(X, S^n E^\vee \otimes M^{\otimes d}) = 0$. On en déduit que

$$H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(n) \otimes L^{\otimes d}) \cong H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(n+d) \otimes \pi^* M^{\otimes d}) \cong H^0(X, S^{n+d} E^\vee \otimes M^{\otimes d})$$

est nul si $n > (\lambda - 1)d$. Comme L est ample sur $\mathbb{P}(E^\vee)$, cela montre que $(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(-1))$ satisfait à la condition P_3. □

2.1.2 Un théorème de Hartshorne

Cette section est une “relecture” dans notre cadre des résultats établis par Hartshorne dans [53].

Définition 2.1.18 Si X est un schéma et si E est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent localement libre, on définit

$$\Gamma^n(E) = S^n(E^\vee)^\vee.$$

Si $n!$ est inversible sur X, alors $\Gamma^n(E)$ est (canoniquement) isomorphe à $S^n E$. Il n'en va pas ainsi en général.

Proposition 2.1.19 *Soient X un schéma et $\varphi : E \to F$ un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini. Alors pour tout entier $n \geq 1$, φ induit un homomorphisme injectif*

$$S^n(\varphi^\vee) : S^n(F^\vee) \longrightarrow S^n(E^\vee)$$

et un homomorphisme surjectif

$$\Gamma^n(\varphi) : \Gamma^n(E) \longrightarrow \Gamma^n(F).$$

Démonstration. On note $H = \operatorname{Ker}\varphi$. Comme F est localement libre, la suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow E \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow 0$$

est localement scindable. Donc H est aussi localement libre, et on a une suite exacte localement scindable de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow F^\vee \xrightarrow{\varphi^\vee} E^\vee \longrightarrow H^\vee \longrightarrow 0\,.$$

Par conséquent, on a pour tout $x \in X$

$$S^n(E^\vee)_x \cong \bigoplus_{k=0}^{n} S^k(F^\vee)_x \otimes S^{n-k}(H^\vee)_x. \tag{2.1}$$

Cela signifie que $S^n(F^\vee)$ est localement une composante directe de $S^n(E^\vee)$, i.e., l'homomophisme

$$S^n(\varphi^\vee) : S^n(F^\vee) \longrightarrow S^n(E^\vee)$$

est injectif. Par passage au dual, (2.1) donne

$$S^n(E^\vee)^\vee_x \cong \bigoplus_{k=0}^{n} S^k(F^\vee)^\vee_x \otimes S^{n-k}(H^\vee)^\vee_x.$$

Donc $\Gamma^n(F)$ est localement une composante directe de $\Gamma^n(E)$. Par conséquent, l'homomorphisme canonique $\Gamma^n(\varphi) : \Gamma^n(E) \to \Gamma^n(F)$ est surjectif. □

Lemme 2.1.20 *Soient X un schéma projectif sur k et E et F deux $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini. Si E est ample, alors il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $S^n(E) \otimes F$ soit ample.*

Démonstration. En effet, il existe un entier $m_0 > 0$ tel que $S^{m_0}(E) \otimes F$ soit engendré par ses sections au-dessus de X. On suppose que $\varphi : \mathcal{O}_X^{\oplus a} \to S^{m_0}(E) \otimes F$ soit un homomorphisme surjectif. D'autre part, il existe un entier $d_0 > 0$ tel que, pour tout $d \geq d_0$, $S^d(E)$ soit un faisceau localement libre de rang fini ample (cf. [52] et [6]). Enfin, pour tout entier $d \geq d_0$, on a un homorphisme surjectif

$$S^d(E)^{\oplus a} \longrightarrow S^d(E) \otimes S^{m_0}(E) \otimes F.$$

Mais comme il existe un homomorphisme surjectif canonique de $S^d(E) \otimes S^{m_0}(E)$ vers $S^{d+m_0}(E)$, on voit que $S^{d+m_0}(E) \otimes F$ est un quotient d'un fibré vectoriel ample, donc est aussi ample. □

Lemme 2.1.21 *Soit X une courbe algébrique sur k. Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents, alors φ induit un homomorphisme surjectif de cohomologies de faisceaux*

$$H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}).$$

Démonstration. La suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte de cohomologies

$$\cdots \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^2(X, \operatorname{Ker} \varphi) \longrightarrow 0 .$$

Comme X est une courbe, $H^2(X, \operatorname{Ker} \varphi) = 0$. Donc l'homomorphisme $H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G})$ est surjectif. □

Remarque 2.1.22 Le lemme 2.1.21 reste vrai lorsque φ est supposé surjectif seulement au point générique. En effet, si on désinge par $\mathcal{H}$ l'image de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ et par $\mathcal{K}$ le conoyau de φ, alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0 .$$

Comme φ est surjectif au point générique, le support de $\mathcal{K}$ ne contient qu'un nombre fini de point, donc on a $H^1(X, \mathcal{K}) = 0$. Par conséquent, on a un homomorphisme surjectif de $H^1(X, \mathcal{H})$ dans $H^1(X, \mathcal{G})$. Enfin, comme on a un homomorphisme canonique surjectif de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{H}$, l'annulation de $H^1(X, \mathcal{F})$ implique celle de $H^1(X, \mathcal{H})$ compte tenu du lemme 2.1.21. Cela conduit à l'annulation de $H^1(X, \mathcal{G})$ d'après la surjectivité de $H^1(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{G})$.

Lemme 2.1.23 *Soient X une courbe projective sur k, E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul sur X et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample. Si E est ample, alors il existe un entier λ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait*

$$H^1(X, S^n(E) \otimes L^{\otimes -d}) = 0.$$

Démonstration. Comme E est ample, il existe $n_0 > 0$ tel que $L^\vee \otimes S^{n_0}(E)$ soit ample. Par conséquent, $E \oplus S^{n_0}(E) \otimes L^\vee$ est aussi ample. Donc il existe $m_0 > 0$ tel que, pour tout $m \geq m_0$, on ait

$$H^1(X, S^m(E \oplus S^{n_0}(E) \otimes L^\vee)) = 0.$$

Notons que

$$S^m(E \oplus S^{n_0}(E) \otimes L^\vee) = \bigoplus_{p+q=m} S^p(E) \otimes S^q(S^{n_0}(E) \otimes L^\vee)$$

et que $S^{p+qn_0}(E) \otimes L^{\otimes -q}$ est un quotient de $S^p(E) \otimes S^q(S^{n_0}(E) \otimes L^\vee)$, donc, d'après le lemme 2.1.21, on a

$$H^1(X, S^{p+qn_0}(E) \otimes L^{\otimes -q}) = 0$$

pour tout $p, q \geq 0$ et $p + q \geq m_0$. □

Lemme 2.1.24 *Soient X un schéma projectif de dimension ≤ 1 sur k, E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul sur X, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample, et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. S'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait*

$$H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d}) = 0,$$

alors il existe un $\lambda' > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda'$ et tout entier $n > \lambda' d$, on ait

$$H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d} \otimes \mathcal{F}) = 0.$$

Démonstration. Comme L est ample, il existe un entier $d_0 > 0$ tel que $L^{\otimes d_0} \otimes \mathcal{F}$ soit engendré par ses sections au-dessus de X, i.e., il existe un homomorphisme surjectif $(\mathcal{O}_X)^{\oplus a} \to L^{\otimes d_0} \otimes \mathcal{F}$ qui induit un homomorphisme surjectif $(L^{\otimes -d_0})^{\oplus a} \to \mathcal{F}$. Pour tout $(n, d) \in \mathbb{N}^2$ on obtient donc un homomorphisme surjectif de faisceaux

$$\varphi : (\Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -(d+d_0)})^{\oplus a} \longrightarrow \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d} \otimes \mathcal{F}.$$

Comme X est de dimension ≤ 1, φ induit un homomorphisme surjectif

$$H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -(d+d_0)})^{\oplus a} \longrightarrow H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d} \otimes \mathcal{F})$$

compte tenu du lemme 2.1.21. Notons qu'il existe un entier $\lambda > d_0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda - d_0$ et tout entier $n > \lambda(d + d_0)$, on ait

$$H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -(d+d_0)}) = 0.$$

Par conséquent, pour tout tel (n, d), on a $H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d} \otimes \mathcal{F}) = 0$. Enfin, si on prend $\lambda' > 2\lambda$, alors pour tout entier $d > \lambda'$ et tout entier $n > \lambda' d$ on a $d > 2\lambda > \lambda - d_0$ et $n > \lambda' d > 2\lambda d > \lambda d + d_0 \lambda$. Donc on a $H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d} \otimes F) = 0$. □

Lemme 2.1.25 *Soit $f : X' \to X$ un morphisme fini et surjectif de schéma noethériens intègres. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, alors il existe un $\mathcal{O}_{X'}$-module cohérent $\mathcal{G}$ ainsi qu'un homomorphisme $\alpha : f_*\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ qui est surjectif au point générique.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G}' = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f_*\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{F})$. Comme $\mathcal{G}'$ est un $f_*\mathcal{O}_{X'}$-module, il existe un $\mathcal{O}_{X'}$-module cohérent $\mathcal{G}$ tel que $f_*\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ (cf. [50] I.9.2.1 et I.9.2.6). Soit $\alpha : \mathcal{G}' \to \mathcal{F}$ l'homomorphisme d'évaluation en la section unité. Comme f est surjectif, $f_*\mathcal{O}_{X'}$ est de rang > 0 au point générique. Par conséquent, α est surjectif au point générique. □

Lemme 2.1.26 *Soient X une courbe algébrique projective et lisse sur un corps k, E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample. Si E est ample, alors il existe un entier λ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait*

$$H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d}) = 0.$$

Démonstration. En remplaçant k par sa clôture algébrique, on peut supposer que k soit un corps parfait. Si la caractéristique de k est nulle, on a $S^n(E) \cong \Gamma^n(E)$. Le lemme résulte alors du lemme 2.1.23. Si la caractéristique de k est $p > 0$, comme E est ample et X est une courbe, E est p-ample (cf. [52] 7.3). Donc il existe un entier $b > 0$ tel que $(F_X^*)^b E \otimes L^\vee$ soit engendré par ses sections au-dessus de X, i.e., il existe un entier $a \geq 1$ et un homomorphisme surjectif

$$\mathcal{O}_X^{\oplus a} \longrightarrow (F_X^*)^b E \otimes L^\vee$$

qui induit un homomorphisme surjectif $L^{\oplus a} \longrightarrow (F_X^*)^b E$. Pour tout entier $n \geq 0$,

$$\Gamma^n(L^{\oplus a}) \cong (L^{\otimes n})^{\oplus \binom{n+a-1}{n}} \cong S^n(L^{\oplus a}).$$

D'après le lemme 2.1.23, il existe un entier λ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait

$$H^1(X, \Gamma^n(L^{\oplus a}) \otimes ((F_X^*)^b L)^{\otimes -d}) = 0.$$

D'après la proposition 2.1.19, l'homomorphisme surjectif $L^{\oplus a} \to (F_X^*)^b E$ induit pour tout $n \in \mathbb{N}$ un homomorphisme surjectif

$$\Gamma^n(L^{\oplus a}) \longrightarrow \Gamma^n((F_X^*)^b E),$$

et donc un homomorphisme surjectif

$$\Gamma^n(L^{\oplus a}) \otimes ((F_X^*)^b L)^{\otimes -d} \longrightarrow (F_X^*)^b(\Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d}).$$

Compte tenu du lemme 2.1.21, on a donc pour tout $d > \lambda$ et tout $n > \lambda d$

$$H^1(X, (F_X^*)^b(\Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d})) = 0.$$

D'après le lemme 2.1.25, il existe un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{G}$ ainsi qu'un homomorphisme $\alpha : (F_{X*})^b \mathcal{G} \to \mathcal{O}_X$ surjectif au point générique. D'après le lemme 2.1.24 appliqué au $\mathcal{O}_X$-module localement libre $(F_X^*)^b E$ et au fibré inversible ample $(F_X^*)^b L (\cong L^{\otimes pb})$, il existe $\lambda' > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda'$ et tout entier $n > \lambda' d$, on ait

$$H^1(X, \mathcal{G} \otimes (F_X^*)^b(\Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d})) = 0. \tag{2.2}$$

Comme $\Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d}$ est localement libre de rang fini, on a l'isomorphisme canonique

$$(F_{X*})^b \mathcal{G} \otimes \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d} \xrightarrow{\sim} (F_{X*})^b(\mathcal{G} \otimes (F_X^*)^b(\Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d})).$$

Le morphisme $F_X : X \to X$ étant fini, on a donc l'égalité de groupes de cohomologie :

$$H^1(X, (F_{X*})^b(\mathcal{G} \otimes (F_X^*)^b(\Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d}))) = H^1(X, \mathcal{G} \otimes (F_X^*)^b(\Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d})).$$

Par conséquent, l'annulation du groupe de cohomologie (2.2) montre que

$$H^1(X, (F_{X*})^b \mathcal{G} \otimes \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d}) = 0.$$

Comme on a une surjection au point générique $(F_{X*})^b \mathcal{G} \to \mathcal{O}_X$, on en déduit que

$$H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d}) = 0$$

compte tenu de la remarque 2.1.22. □

Théorème 2.1.27 (cf. [53] lemma 6.1) *Soient X une courbe algébrique non-singulière projective sur k, E un fibré vectoriel de rang $r > 0$ sur X, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample, et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Si E est ample, alors il existe un entier λ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait*

$$H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d} \otimes \mathcal{F}) = 0.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 2.1.24 et du lemme 2.1.26. □

2.1.3 Comparaison des conditions de positivité

Proposition 2.1.28 *Soient X une courbe projective géométriquement réduite sur k et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul. Alors*

$$P_1(X, E) \Longrightarrow P_3(X, E)$$

Démonstration. Soit $\bar{k}$ la clôture algébrique de k. D'après la proposition 2.1.2 3) et la remarque 2.1.5, on a

$$P_1(X, E) \Longleftrightarrow P_1(X_{\bar{k}}, E_{\bar{k}}).$$

D'autre part, on a $P_3(X_{\bar{k}}, E_{\bar{k}}) \Longleftrightarrow P_3(X, E)$ compte tenu de la remarque 2.1.14. Donc on est ramené à démontrer

$$P_1((X_{\bar{k}})_{\mathrm{red}}, (E_{\bar{k}})_{\mathrm{red}}) \Longrightarrow P_3((X_{\bar{k}})_{\mathrm{red}}, (E_{\bar{k}})_{\mathrm{red}}).$$

Comme X est géométriquement réduite, le schéma $X_{\bar{k}}$ est réduit, donc est la réunion d'un nombre fini de courbes algébriques. D'après le remaque 2.1.13, on se ramène au cas où X est une courbe algébrique projective sur un corps algébriquement clos k.

Soit $h : \widetilde{X} \to X$ la normalisation de X. C'est un morphisme fini et surjectif, et $\widetilde{X}$ est une courbe projective et lisse sur k. D'après la proposition 2.1.2 on a

$$P_1(X, E) \Longleftrightarrow P_1(\widetilde{X}, h^*E).$$

D'autre part, comme h est surjectif, on a

$$P_3(\widetilde{X}, h^*E) \Longrightarrow P_3(X, E)$$

compte tenu de la proposition 2.1.12. Par conséquent, il suffit de vérifier que

$$P_1(\widetilde{X}, h^*E) \Longrightarrow P_3(\widetilde{X}, h^*E),$$

i.e., on peut supposer X lisse car k est algébriquement clos.

Par la dualité de Serre, (X, E) satisfait à la condition P_3 si et seulement s'il existe un entier $\lambda > 0$ tel que, pour tout $d > \lambda$ et $n > \lambda d$, on ait

$$\dim H^1(X, \Gamma^n(E) \otimes L^{\otimes -d} \otimes \omega_X) = 0,$$

où ω_X est le fibré canonique de X. Donc le théorème 2.1.27 implique que, si E est ample, alors (X, E) satisfait à la condition P_3. □

Proposition 2.1.29 *Soient X un schéma projectif sur k, E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini, et F un quotient localement libre de E. Alors*

$$P_3(X, E) \Longrightarrow P_3(X, F).$$

Démonstration. Supposons que $\varphi : E \to F$ soit un homomorphisme surjectif de fibrés vectoriels, alors on a un homomorphisme injectif $\varphi^\vee : F^\vee \to E^\vee$ qui induit pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L et tous entiers n et D un homomorphisme injectif

$$S^n(F^\vee) \otimes L^d \longrightarrow S^n(E^\vee) \otimes L^d.$$

Par conséquent,

$$H^0(S^n(E^\vee) \otimes L^d) = 0 \Longrightarrow H^0(S^n(F^\vee) \otimes L^d) = 0.$$

□

Proposition 2.1.30 *Soient X une courbe projective lisse sur k et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Alors*

$$P_3(X, L) \Longrightarrow P_1(X, L).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\deg L > 0$. Supposons que L' soit un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample. Alors il existe un entier $n > 0$ tel que

$$\dim H^0(X, L^{\otimes -n} \otimes L') = 0.$$

On peut supposer que $\deg L' > g$, où g est le genre de X. D'après le théorème de Riemann-Roch, on obtient

$$\dim H^0(X, L^{\otimes -n} \otimes L') - \dim H^0(X, \omega_X \otimes L^{\otimes n} \otimes L'^\vee) = 1 - g - n \deg L + \deg L'.$$

Donc on a

$$n \deg L \geq 1 - g + \deg L' > 0.$$

□

Proposition 2.1.31 *Soient X une courbe projective lisse sur k et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini. On suppose que k soit de caractéristique 0. Alors*

$$P_3(X, E) \Longrightarrow P_1(X, E).$$

Démonstration. Pour montrer que E est ample il suffit de vérifier que, pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$,

$$H^1(X, S^n E \otimes \mathcal{F}) = 0$$

pour n suffisamment grand. Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample. Il existe un entier d tel que $L^{\otimes d} \otimes \mathcal{F} \otimes \omega_X^\vee$ soit engendré par ses sections au-dessus de X. Donc il existe un entier $a > 0$ et un homomorphisme surjectif $\varphi : (L^{\otimes -d} \otimes \omega_X)^{\oplus a} \to \mathcal{F}$. Comme (X, E) satisfait à la condition P_3, il existe $n_0 > 0$ tel que $H^0(X, S^n(E^\vee) \otimes L^{\otimes d}) = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Par la dualité de Serre, cela revient à dire que

$$H^1(X, S^n(E) \otimes L^{\otimes -d} \otimes \omega_X) = 0$$

puisque $S^n(E) \cong \Gamma^n(E)$. Comme $\dim X = 1$, l'homomorphisme de faisceaux φ induit un homomorphisme surjectif

$$H^1(X, (S^n(E) \otimes L^{\otimes -d} \otimes \omega_X)^{\oplus a}) \longrightarrow H^1(X, S^n(E) \otimes \mathcal{F}),$$

donc on a $H^1(X, S^n(E) \otimes \mathcal{F}) = 0$. □

Proposition 2.1.32 *Soient X une variété projective de dimension ≥ 1 sur k qui est géométriquement réduite et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini. Alors*

$$P_1(X,E) \Longrightarrow P_2(X,E) \Longrightarrow P_3(X,E)$$

Démonstration. "$P_1(X,E) \Longrightarrow P_2(X,E)$" est trivial.

"$P_2(X,E) \Longrightarrow P_3(X,E)$" : D'après la remarque 2.1.9, il existe une courbe projective C sur une extension de k et un morphisme dominant $h : C \to X$ tel que h^*E soit ample sur C. D'après le lemme 2.1.28, (C, h^*E) satisfait à la condition P_3. Enfin, comme h est dominant, on en déduit que (X,E) satisfait aussi à la condition P_3, compte tenu de la proposition 2.1.12. □

2.1.4 Remarques sur les conditions de positivité

Il existe un exemple d'un fibré vectoriel E sur une variété algébrique X qui satisfait à la condition P_2 mais pas à P_1. En effet, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.33 *Soient X et X' deux variétés algébriques de dimension au moins 1 sur k. Soit E (resp. E') un $\mathcal{O}_X$-module (resp. $\mathcal{O}_{X'}$-module) localement libre de rang fini et non-nul sur X (resp. X'). Posons $W = X \times_k X'$. Soient $\mathrm{pr}_1 : W \to X$ et $\mathrm{pr}_2 : W \to X'$ les deux projections. On note $F = \mathrm{pr}_1^* E \otimes \mathrm{pr}_2^* E'$. Si l'un des faisceaux E et E' est ample, alors (W,F) satisfait à la condition P_2.*

Démonstration. On peut supposer que E soit ample sur X. Soit K le corps des fonctions rationnelles sur X'. Alors on a $W_K = X_K$, et $F_K = E_K$. Par conséquent, F_K est ample sur W_K. □

Il est possible de comparer la condition P_3 aux autres conditions de positivité dans divers contextes. Par exemple, on a la comparaison suivante dans le cadre de la géométrie complexe :

Proposition 2.1.34 *Soient X une variété projective sur $\mathbb{C}$ et $\overline{L}$ un faisceau inversible hermitien sur $X(\mathbb{C})$. Si pour tout $x \in X$, sa 2-forme de courbure normalisée $\Theta(\overline{L})$ n'est pas semi-négative en x, alors (X,L) satisfait à la condition P_3.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose que $\overline{L}'$ soit un faisceau inversible hermitien sur X et $(n_i,d_i)_{i\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{N}^2_{>0}$ avec $\lim\limits_{i\to+\infty} n_i/d_i = +\infty$ tels que

$$H^0(X, L^{\vee\otimes n_i} \otimes L'^{\otimes d_i}) \neq 0$$

pour tout $i \geq 1$. D'après la proposition 1.6.16, pour tout entier $i \geq 1$, il existe un point $x_i \in X(\mathbb{C})$ tel que la forme hermitienne $-n_i\Theta(\overline{L})_{x_i} + d_i\Theta(\overline{L}')_{x_i}$ soit semi-positive. Autrement dit, la forme hermitienne $\Theta(\overline{L})_{x_i} - \dfrac{d_i}{n_i}\Theta(\overline{L}')_{x_i}$ est semi-négative. Comme $X(\mathbb{C})$ est compacte pour la topologie analytique, il existe une sous-suite de $(x_i)_{i\geq 1}$ qui converge vers un point $x_0 \in X(\mathbb{C})$. Comme $\lim\limits_{i\to+\infty} d_i/n_i = 0$, par passage à la limite, on obtient que $\Theta(\overline{L})_{x_0}$ est semi-négative. Cela est absurde. □

Remarque 2.1.35 Dans la proposition précédente, l'hypothèse de "non-semi-négativité" signifie encore que, pour tout $x \in X(\mathbb{C})$, il existe $v \in T_xX = T_x^{(1,0)}X(\mathbb{C})$ tel que $\Theta(\overline{L})(v,v) > 0$.

2.2 Pente maximale asymptotique relative et positivité

Dans ce sous-paragraphe, sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés algébriques sont supposées sur $\operatorname{Spec} k$, C désigne une courbe algébrique projective lisse sur k qui est de genre g et η le point générique de C.

Rappel sur le domaine de définition d'une application rationnelle

Soient S un schéma et X et Y deux S-schémas ; on rappelle qu'une *S-application rationnelle* de X vers Y est par définition une classe d'équivalence de S-morphismes de sous-schémas ouverts denses de X vers Y (cf. [50] chap. I §8). Si f est une S-application rationnelle de X vers Y, on note $f : X \dashrightarrow Y$. Si S est le spectre d'un corps k, si X est intègre et si Y est localement de type fini sur $\operatorname{Spec} k$, alors les k-morphismes rationnels de X vers Y s'indentifient aux k-points de Y à valeurs dans $k(X)$.

Soient S un schéma et $f : X \dashrightarrow Y$ une S-application rationnelle. On dit que f est *définie* au point $x \in X$ s'il existe un morphisme $g : U \to Y$ dans la classe f tel que $x \in U$. On appelle *domaine de définition* de f le sous-ensemble de X des points où f est définie. C'est un ouvert dense dans X qui peut donc être considéré comme un sous-schéma ouvert de X. Si X est réduit et si Y est séparé sur S, alors il existe un unique morphisme du domaine de définition de f vers Y qui est dans la classe f.

D'après [50] I.8.2.12, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) X est réduit et localement noethérien,
2) l'ensemble N des point $x \in X$ où X n'est pas régulier est de codimension ≥ 2 dans X,
3) le morphisme structural $Y \to S$ est séparé et universellement fermé,

alors l'ensemble des points de X où f n'est pas définie est de codimension au moins 2.

En particulier si S est le spectre d'un corps k, si X est une courbe régulière sur une extension K de k, et si Y est une variété propre sur $\operatorname{Spec} k$, alors tout k-point de Y à valeurs dans $K(X)$ se prolonge de façon unique en un morphisme de k-schémas de X vers Y.

Pente maximale asymptotique relative d'un module inversible

Lemme 2.2.1 *Soit $\pi : X \to C$ un morphisme propre et surjectif d'une variété algébrique X vers la courbe algébrique C. Alors il existe une extension de type fini et purement transcendante k' de k, une courbe algébrique non-singulière C' sur k', un morphisme fini $p : C' \to C_{k'}$, et un k-morphisme dominant $f : C' \to X$ tels que $\pi f = qp$, où $q : C_{k'} \to C$ est la projection canonique.*

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ C_{k'} \arrow[r, "q"'] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k' \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soient K (resp. K') le corps des fonctions méromorphes sur C (resp. X). Comme π est un morphisme de type fini, K' est une extension de type fini de K, donc est une extension finie d'une extension purement transcendante de K. Soit d de degré de transcendance de K' sur K, et soit k' une extension purement transcendante de degré d de k. On désigne par $(T_i)_{1\leq i\leq d}$ une base de transcendance de k' sur k. Le corps K'' des fonctions rationnelles sur

$C_{k'} = C \times_k \operatorname{Spec} k'$ est une extension purement transcendante de degré d de K. On désigne par $q : C_{k'} \to C$ la projection canonique. En choisissant une base de transcendance $(x_i)_{1 \le i \le d}$ de K' sur K on obtient un homomorphisme φ de K'' dans K' qui associe à T_i l'élément x_i. On peut donc considerer K' comme une extension finie de K'' (via φ). Le corps K' est une extension de degré de transcendance 1 sur k'. Soit C' une courbe projective normale sur k' de corps de fonctions méromorphe K' (C'est unique à un unique k-isomorphisme près). L'homomorphisme $\varphi : K'' \to K'$ définit un point géométrique de $C_{k'}$ à valeur dans K' au-dessus du point générique de $C_{k'}$ (pour la notation cf. [44] I.3.4.5), donc détermine une k'-application rationnelle de C' vers $C_{k'}$ (cf. [44] I.7.1.2 et I.7.1.16). Celle-ci prolonge de façon unique en un k'-morphisme $p : C' \to C_{k'}$. Le morphisme p est fini car K' est une extension finie de K''. D'autre part, comme X et C' ont le même corps des fonctions méromorphes K', l'automorphisme $\mathrm{Id} : K' \to K'$ définit une k-application rationnelle de C' vers X à valeur dans K' au-dessus du point générique du schéma X (cf. [44] I.7.1.16) qui se prolonge de façon unique en un k-morphisme f de C' vers X. Le morphisme f est dominant car son image contient le point générique de X. Enfin, on a $\pi f = qp$ puisqu'ils correspondent au même k-point de C à valeurs dans K'. □

Remarque 2.2.2 Dans le lemme précédent, Si $k(X)$ est une extension séparable de $k(C)$, on peut choisir K'' tel que $\varphi : K'' \to K'$ soit une extension séparable. La courbe C', de corps de fonction K', régulière, et finie sur $C_{k'}$, construite dans la démonstration ci-dessus, est alors génériquement étale sur $C_{k'}$. Si de plus la courbe C sur k est géométriquement réduite, la courbe C' sur k' est aussi géométriquement réduite.

Proposition 2.2.3 *Soient $\pi : X \to C$ un k-morphisme propre, surjectif et séparable d'une variété algébrique projective X sur k vers C, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Si $\pi_* L$ admet un sous-$\mathcal{O}_C$-module inversible ample M, alors (X, L) satisfait aux conditions P_2 et P_3.*

Démonstration. Avec les notations du lemme 2.2.1, on a un morphisme dominant f d'une courbe C' sur une extension purement transcendant de k, vers X, tel que $w = \pi f = qp$.

Comme M est un sous-$\mathcal{O}_C$-module inversible de $\pi_* L$, $\pi_* L \otimes M^\vee \cong \pi_*(L \otimes \pi^* M^\vee)$ a une section non-nulle au-dessus de C. Par conséquent, $L \otimes \pi^* M^\vee$ a une section non-nulle au-dessus de X. Comme f est dominant, on sait que $f^*(L \otimes \pi^* M^\vee) = f^* L \otimes w^* M^\vee$ admet une section non-nulle au-dessus de C'. Par conséquent, on a

$$\deg_{C'}(f^* L \otimes w^* M^\vee) = \deg_{C'}(f^* L) - \deg_{C'}(w^* M) \geq 0$$

puisque $f^* L$ est un $\mathcal{O}_{C'}$-module inversible. Comme M est ample sur C, $w^* M$ est ample sur C' car q est un changement de base par un morphisme de schémas affines et p est un morphisme fini. Par conséquent, $\deg_{C'}(w^* M) > 0$, et *a fortiori* $\deg_{C'}(f^* L) > 0$. Comme $f^* L$ est de rang 1, il est ample. Donc (X, L) satisfait à la condition P_2, et *a fortiori* la condition P_3 (cf. la proposition 2.1.32). □

Corollaire 2.2.4 *Soient $\pi : X \to C$ un morphisme propre, surjectif et séparable d'une variété algébrique X vers C et L un $\mathcal{O}_C$-module inversible ample. Alors $(X, \pi^* L)$ satisfait aux conditions P_2 et P_3.*

Démonstration. D'après l'adjonction des foncteurs π_* et π^*, on a $\pi_* \pi^* L = \pi_*(\mathcal{O}_X) \otimes L$. Comme $\Gamma(C, \pi_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$, L est un sous-fibré inversible de $\pi_* \pi^* L$. Cela montre que $(X, \pi^* L)$ satisfait aux conditions P_2 et P_3 puisque L est ample sur C. □

Proposition 2.2.5 *Soient $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique X vers C, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module sans torsion et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Alors il existe une constante $e_1(\mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout tel entier $n > 0$, on ait $\mu_{\max}(\pi_*(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n})) \leq e_1(\mathcal{F})n$.*

Démonstration. La variété X est projective sur k. On choisit un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample $\mathscr{L}$ sur X. En plongeant $\mathcal{F}$ dans une somme directe de faisceaux inversibles, on voit qu'il suffit d'établir la proposition lorsque $\mathcal{F}$ est lui-même inversible, ce que nous supposerons désormais.

Posons $d = \dim X$ et K le corps des fonctions rationnelles sur C. Oberservons que l'on a l'égalité dans le groupe de Chow $\mathrm{CH}_1(C)$:

$$\pi_*(c_1(\mathscr{L})^{d-1}) = (\deg_{\mathscr{L}_K} X_K)[C].$$

Supposons que M soit un $\mathcal{O}_C$-module inversible et que $\varphi : M \to \pi_*(\mathcal{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$ soit un homomorphisme injectif. On désigne par $\widetilde{\varphi} : \pi^* M \to \mathcal{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules qui correspond à φ par adjonction. Ce dernier s'identifie à une section non-identiquement nulle de $\pi^* M^\vee \otimes \mathcal{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$, dont le diviseur $\operatorname{div} \widetilde{\varphi}$ est effectif. On a donc

$$\deg_X \Big(c_1(\mathscr{L})^{d-1} [\operatorname{div}(\widetilde{\varphi})] \Big) \geq 0.$$

$$\text{Or } [\operatorname{div} \widetilde{\varphi}] = -\pi^* c_1(M) + c_1(\mathcal{F}) + n c_1(L) \text{ dans } \mathrm{CH}^1(X),$$

donc

$$\begin{aligned} & \deg_X \Big(c_1(\mathscr{L})^{d-1} [\operatorname{div}(\widetilde{\varphi})] \Big) \\ = & \deg_X \Big((-\pi^* c_1(M) + c_1(\mathcal{F}) + n c_1(L)) c_1(\mathscr{L})^{d-1} \Big) \\ = & - \deg_C \Big(c_1(M) \pi_*(c_1(\mathscr{L})^{d-1}) \Big) + \deg_X(c_1(\mathcal{F}) c_1(\mathscr{L})^{d-1}) + n \deg_X(c_1(L) c_1(\mathscr{L})^{d-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\deg_C(M) \leq \frac{\deg_X(c_1(L)c_1(\mathscr{L})^{d-1})}{\deg_{\mathscr{L}_K} X_K} + \frac{\deg_X(c_1(\mathcal{F})c_1(\mathscr{L})^{d-1})}{\deg_{\mathscr{L}_K} X_K}.$$

Enfin, d'après la comparaison que l'on a établi dans la proposition 1.3.15, on déduit la majoration linéaire en n de $\mu_{\max}(\pi_*(\mathcal{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}))$ annoncée. □

Proposition 2.2.6 *Soient $\pi : X \to C$ un morphisme surjectif d'une variété algébrique projective X vers C et E_1 et E_2 deux $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini et non-nuls. Si $\pi_*(E_1)$ et $\pi_*(E_2)$ sont non-nuls, alors on a*

$$\mu_{\max}(\pi_*(E_1 \otimes E_2)) \geq \mu_{\max}(\pi_* E_1) + \mu_{\max}(\pi_* E_2) - 2a(C),$$

où $a(C)$ est la constante dépendant de C dans la proposition 1.3.15.

Démonstration. Comme $\pi_*(E_1)$ et $\pi_*(E_2)$ sont non-nuls, il en est de même de $\pi_*(E_1 \otimes E_2)$. D'après la proposition 1.3.15, il existe deux $\mathcal{O}_C$-modules inversibles M_1 et M_2 ainsi que deux homomorphisme injectifs

$$M_1 \longrightarrow \pi_*(E_1), \quad M_2 \longrightarrow \pi_*(E_2)$$

tels que

$$\deg M_1 \geq \mu_{\max}(\pi_* E_1) - a(C), \quad \deg M_2 \geq \mu_{\max}(\pi_* E_2) - a(C).$$

Comme $M_1^\vee \otimes \pi_*(E_1)$ et $M_2^\vee \otimes \pi_*(E_2)$ ont des sections non partout nulles au-dessus de C, $\pi^*(M_1)^\vee \otimes E_1$ et $\pi^*(M_2)^\vee \otimes E_2$ ont des sections non partout nulles au-dessus de X. Par conséquent,

$$H^0(X, \pi^*(M_1 \otimes M_2)^\vee \otimes (E_1 \otimes E_2)) = H^0(C, (M_1 \otimes M_2)^\vee \otimes \pi_*(E_1 \otimes E_2)) \neq 0.$$

Donc

$$0 \leq \mu_{\max}((M_1 \otimes M_2)^\vee \otimes \pi_*(E_1 \otimes E_2)),$$

et donc

$$\mu_{\max}(\pi_*(E_1 \otimes E_2)) \geq \deg M_1 + \deg M_2 \geq \mu_{\max}(\pi_*(E_1)) + \mu_{\max}(\pi_*(E_2)) - 2a(C).$$

□

Proposition 2.2.7 *Soient $\pi : X \to C$ un morphisme surjectif d'une variété projective X vers C et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample relativement à π. Alors la suite $(\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}))/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. On note $a_n = \mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}))$ si $\pi_*(L^{\otimes n}) \neq 0$ ce qui a lieu dès que n est suffisamment grand. D'après la proposition 2.2.5, il existe une constante $c > 0$ tel que $a_n \leq cn$ pour n suffisamment grand. D'autre part, la proposition 2.2.6 montre que, pour tous entiers m, n suffisamment grands,

$$a_{m+n} \geq a_m + a_n - 2a(C).$$

D'après le corollaire 1.5.3, la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$. □

Remarque 2.2.8 La proposition précédente reste vraie si, au lieu de l'amplitude de L relativement à π, on suppose seulement que $\Gamma(X_K, L_K^{\otimes n})$ est non-réduit à 0 pour n suffisamment grand.

Définition 2.2.9 Soit $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique X vers C. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L ample relativement à π, on désigne par $\mu_{\max}^\pi(L)$ la limite

$$\mu_{\max}^\pi(L) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}))}{n},$$

appelée *la pente maximale asymptotique* de L *relativement à* π.

Proposition 2.2.10 *Soit $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique X vers C.*

1) Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample relativement à π, alors pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\mu_{\max}^\pi(L^{\otimes n}) = n\mu_{\max}^\pi(L).$$

2) Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample relativement à π et si M est un $\mathcal{O}_C$-module inversible, alors

$$\mu_{\max}^\pi(L \otimes \pi^* M) = \deg M + \mu_{\max}^\pi(L).$$

3) Si L_1 et L_2 sont deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles amples relativement à π, alors

$$\mu_{\max}^\pi(L_1 \otimes L_2) \geq \mu_{\max}^\pi(L_1) + \mu_{\max}^\pi(L_2).$$

4) Soient L_1 et L_2 deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles amples relativement à π. S'il existe un homomorphisme non-nul $\varphi : L_1 \to L_2$ de $\mathcal{O}_X$-modules, alors $\mu_{\max}^{\pi}(L_1) \leq \mu_{\max}^{\pi}(L_2)$.

Démonstration. 1) est immédiat d'après la définition de $\mu_{\max}^{\pi}$.

2) On a pour $n \gg 0$,

$$\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n} \otimes \pi^* M^{\otimes n})) = \mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}) \otimes M^{\otimes n}) = \mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n})) + n \deg M.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n} \otimes \pi^* M^{\otimes n})) = \deg M + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}))$$

3) Pour tout entier $n \gg 0$,

$$\mu_{\max}(\pi_*(L_1^{\otimes n} \otimes L_2^{\otimes n})) \geq \mu_{\max}(\pi_*(L_1^{\otimes n})) + \mu_{\max}(\pi_*(L_2^{\otimes n})) - 2a(C).$$

Donc

$$\frac{\mu_{\max}(\pi_*(L_1^{\otimes n} \otimes L_2^{\otimes n}))}{n} \geq \frac{\mu_{\max}(\pi_*(L_1^{\otimes n}))}{n} + \frac{\mu_{\max}(\pi_*(L_2^{\otimes n}))}{n} - \frac{2a(C)}{n}.$$

Par passage à la limite on obtient

$$\mu_{\max}^{\pi}(L_1 \otimes L_2) \geq \mu_{\max}^{\pi}(L_1) + \mu_{\max}^{\pi}(L_2).$$

4) Pour tout entier $n \geq 1$ on a un homomorphisme injectif $\varphi^{\otimes n} : L_1^{\otimes n} \to L_2^{\otimes n}$. En prenant l'image directe on obtient un homomorphisme injectif de $\pi_*(L_1^{\otimes n})$ vers $\pi_*(L_2^{\otimes n})$. Par conséquent, on a $\mu_{\max}(\pi_*(L_1^{\otimes n})) \leq \mu_{\max}(\pi_*(L_2^{\otimes n}))$. Par passage à la limite on sait que $\mu_{\max}^{\pi}(L_1) \leq \mu_{\max}^{\pi}(L_2)$. □

Définition 2.2.11 Soient $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique vers C, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible, $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample relativement à π. D'après [45] chap II, 4.6.13, il existe un entier $n_0(L, \mathscr{L}) > 0$ tel que $L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ soit ample relativement à π pour tout entier $n \geq n_0(L, \mathscr{L})$. On définit pour tout entier $n \geq n_0(L, \mathscr{L})$ $A_n(L, \mathscr{L}) = \mu_{\max}^{\pi}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu_{\max}^{\pi}(\mathscr{L})$.

Proposition 2.2.12 *Avec les notations de la définition 2.2.11.*

1) La suite $(A_n(L, \mathscr{L}))_{n \geq n_0(L,\mathscr{L})}$ est croissante et converge vers une limite dans $\mathbb{R}$.

2) Si M est un $\mathcal{O}_C$-module inversible, on a $A_n(L, \mathscr{L} \otimes \pi^* M) = A_n(L, \mathscr{L})$ pour tout $n \geq n_0(L, \mathscr{L})$.

3) Si on désigne par Ξ (resp. Ξ_π) l'ensemble des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles amples (resp. amples relativement à π), alors

$$\inf_{\mathscr{L} \in \Xi} \lim_{n \to +\infty} A_n(L, \mathscr{L}) = \inf_{\mathscr{L}' \in \Xi_\pi} \lim_{n \to +\infty} A_n(L, \mathscr{L}'). \tag{2.3}$$

4) Si L est un $\mathcal{O}_X$-module ample relativement à π, alors la valeur (2.3) est égale à $\mu_{\max}^{\pi}(L)$.

5) Si L est de la forme $\pi^* M$, où M est un $\mathcal{O}_C$-module inversible, alors la valeur (2.3) est égale à $\deg_C(M)$.

Démonstration. 1) D'après la proposition 2.2.10 3), pour tout entier $n \geq n_0(L, \mathscr{L})$,

$$\mu^{\pi}_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes(n+1)}) \geq \mu^{\pi}_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) + \mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L}).$$

Donc on a $A_{n+1}(L, \mathscr{L}) \geq A_n(L, \mathscr{L})$. D'autre part, comme $\mathscr{L}$ est ample relativement à π, il existe un $\mathcal{O}_C$-module inversible M tel que $\mathscr{L} \otimes \pi^* M$ soit ample (lemme 2.1.15). Donc il existe un entier $m > 0$ et un homomorphisme injectif de L vers $(\mathscr{L} \otimes \pi^* M)^{\otimes m}$. Par conséquent, on a

$$\mu^{\pi}_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) \leq \mu^{\pi}_{\max}((\mathscr{L} \otimes \pi^* M)^{\otimes m} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) = (m+n)\mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L}) + m \deg(M),$$

i.e., $A_n(L, \mathscr{L}) \leq m(\mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L}) + \deg(M))$. Par conséquent, la suite $A_n(L, \mathscr{L}))_{n \geq n_0(L,\mathscr{L})}$ est croissante et bornée supérieurement, donc converge dans $\mathbb{R}$.

2) Si $L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ est ample relativement à π, il en est de même de $L \otimes (\mathscr{L} \otimes \pi^* M)^{\otimes n} = L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \pi^* M^{\otimes n}$ ([45] chap II, 4.6.5), et

$$\mu^{\pi}_{\max}(L \otimes (\mathscr{L} \otimes \pi^* M)^{\otimes n}) = \mu^{\pi}_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) + n \deg M.$$

Par conséquent,

$$A_n(L, \mathscr{L} \otimes \pi^* M) = \mu^{\pi}_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) + n \deg(M) - n\mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L} \otimes \pi^* M) = A_n(L, \mathscr{L}).$$

3) L'égalité (2.3) est une conséquence immédiate de 2) et de la proposition 2.1.16.

4) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π, d'après la proposition 2.2.10, on a

$$\mu^{\pi}_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L}) \geq \mu^{\pi}_{\max}(L) + \mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L}) = \mu^{\pi}_{\max}(L).$$

Donc on a $\inf\limits_{\mathscr{L} \in \Xi} \lim\limits_{n \to +\infty} A_n(L, \mathscr{L}) \geq \mu^{\pi}_{\max}(L)$. D'autre part, comme L est ample relativement à π,

$$\inf_{\mathscr{L}} \lim_{n \to +\infty} A_n(L, \mathscr{L}) \leq \lim_{n \to +\infty} A_n(L, L) = \lim_{n \to +\infty} \Big(\mu^{\pi}_{\max}(L \otimes L^{\otimes n}) - n\mu^{\pi}_{\max}(L)\Big) = \mu^{\pi}_{\max}(L).$$

Donc on a l'égalité.

5) Si $L = \pi^* M$, où M est un $\mathcal{O}_C$-module inversible, alors pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible ample relativement à π, et tout entier $n > 0$,

$$A_n(L, \mathscr{L}) = \mu^{\pi}_{\max}(\pi^* M \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L}) = \deg(M) + \mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L}) = \deg(M).$$

□

Définition 2.2.13 Soit $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique X vers C. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L on définit

$$\mu^{\pi}_{\max}(L) = \inf_{\mathscr{L}} \lim_{n \to +\infty} \Big(\mu^{\pi}_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) - n\mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L})\Big), \tag{2.4}$$

où $\mathscr{L}$ parcourt tous les $\mathcal{O}_X$-modules inversibles amples relativement à π. C'est un élément de $[-\infty, +\infty[$. Il est fini et coïncide avec la définition 2.2.9 lorsque L est ample relativement à π (cf. la proposition 2.2.12 4)).

Proposition 2.2.14 *Soit $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique X vers C.*

1) Pour tous $\mathcal{O}_X$-modules inversibles L_1 et L_2, on a

$$\mu^{\pi}_{\max}(L_1 \otimes L_2) \geq \mu^{\pi}_{\max}(L_1) + \mu^{\pi}_{\max}(L_2).$$

2) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L et tout entier $n > 0$ on a

$$\mu^{\pi}_{\max}(L^{\otimes n}) = n\mu^{\pi}_{\max}(L).$$

3) Si L_1 et L_2 sont deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles et s'il existe un homomorphisme non-nul de L_1 vers L_2, alors $\mu^{\pi}_{\max}(L_1) \leq \mu^{\pi}_{\max}(L_2)$.

4) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L et tout $\mathcal{O}_C$-module inversible M on a

$$\mu^{\pi}_{\max}(L \otimes \pi^* M) = \mu^{\pi}_{\max}(L) + \deg(M).$$

Démonstration. 1) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π et tout entier n suffisamment grand,

$$\mu^{\pi}_{\max}(L_1 \otimes L_2 \otimes \mathscr{L}^{\otimes 2n}) \geq \mu^{\pi}_{\max}(L_1 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) + \mu^{\pi}_{\max}(L_2 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}),$$

d'où $A_{2n}(L_1 \otimes L_2, \mathscr{L}) \geq A_n(L_1, \mathscr{L}) + A_n(L_2, \mathscr{L})$. Par passage à la limite on sait que $\mu^{\pi}_{\max}(L_1 \otimes L_2) \geq \mu^{\pi}_{\max}(L_1) + \mu^{\pi}_{\max}(L_2)$.

2) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π et tout entier m assez grand, on a

$$\mu^{\pi}_{\max}(L^{\otimes n} \otimes \mathscr{L}^{\otimes mn}) = n\mu^{\pi}_{\max}(L \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}).$$

Par conséquent, on a $A_{mn}(L^{\otimes n}, \mathscr{L}) = nA_m(L, \mathscr{L})$. Par passage à la limite, on a $\mu^{\pi}_{\max}(L^{\otimes n}) = n\mu^{\pi}_{\max}(L)$.

3) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π et tout entier n suffisamment grand, on a un homomophisme injectif de $L_1 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ vers $L_2 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$. Par conséquent, on a $\mu^{\pi}_{\max}(L_1 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) \leq \mu^{\pi}_{\max}(L_2 \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$, i.e., $A_n(L_1, \mathscr{L}) \leq A_n(L_2, \mathscr{L})$. Par passage à la limite, on a $\mu^{\pi}_{\max}(L_1) \leq \mu^{\pi}_{\max}(L_2)$.

4) Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π et tout entier n suffisamment grand, on a

$$A_n(L \otimes \pi^* M, \mathscr{L}) = A_n(L, \mathscr{L}) + \deg(M).$$

Par passage à la limite on obtient $\mu^{\pi}_{\max}(L \otimes \pi^* M) = \mu^{\pi}_{\max}(L) + \deg(M)$. □

Corollaire 2.2.15 *Soient $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique X vers C, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible.*

1) Si $\mu^{\pi}_{\max}(L) > 0$, alors $\mu^{\pi}_{\max}(L^{\vee}) < 0$.

2) Si $\mu^{\pi}_{\max}(L) < 0$, alors $H^0(X, L) = 0$.

3) Si L est ample, alors $\mu^{\pi}_{\max}(L) > 0$.

Démonstration. 1) On a $\mu^{\pi}_{\max}(\mathcal{O}_X) = \mu^{\pi}_{\max}(\pi^*\mathcal{O}_C) = \deg(\mathcal{O}_C) = 0$, donc $\mu^{\pi}_{\max}(L) + \mu^{\pi}_{\max}(L^{\vee}) \leq 0$.

2) Si $H^0(X, L) \neq 0$, alors il existe un homomorphisme non-nul de $\mathcal{O}_X$ vers L, d'où $\mu^{\pi}_{\max}(L) \geq \mu^{\pi}_{\max}(\mathcal{O}_X) = 0$.

3) Soit M un $\mathcal{O}_C$-module inversible tel que $\deg(M) > 0$. Comme L est ample, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\pi^* M^{\vee} \otimes L^{\otimes n}$ ait une section non identiquement nulle au-dessus de X. D'après 2), on a

$$\mu^{\pi}_{\max}(\pi^* M^{\vee} \otimes L^{\otimes n}) = n\mu^{\pi}_{\max}(L) + \deg(M^{\vee}) \geq 0,$$

Donc $\mu^{\pi}_{\max}(L) \geq \deg(M)/n > 0$. □

Théorème 2.2.16 *Soient $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique vers C et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Si $\mu_{\max}^{\pi}(L^{\vee}) < 0$, alors (X, L) satisfait à la condition P_3. La réciproque est vraie lorsque $L^{\vee}$ est ample relativement à π.*

Démonstration. "$\Longrightarrow$" : Si $\mu_{\max}^{\pi}(L^{\vee}) < 0$, alors il existe une constante $\varepsilon > 0$ et un $\mathcal{O}_X$-module ample $\mathscr{L}$ tels que, pour tout entier m suffisamment grand, $A_m(L^{\vee}, \mathscr{L}) \leq -\varepsilon$. En prenant une puissance tensorielle de $\mathscr{L}$, on peut supposer que $\mu_{\max}^{\pi}(L^{\vee} \otimes \mathscr{L}) \leq \mu_{\max}^{\pi}(\mathscr{L}) - \varepsilon$. Soit $\lambda > \varepsilon^{-1}\mu_{\max}^{\pi}(\mathscr{L})$ une constante. Pour tout entier $d \geq 1$ et tout entier $n \geq \lambda d$, on a d'après la proposition 2.2.14

$$(n-d)\mu_{\max}^{\pi}(\mathscr{L}) + \mu_{\max}^{\pi}(L^{\vee \otimes n} \otimes \mathscr{L}^{\otimes d}) \leq \mu_{\max}^{\pi}((L^{\vee} \otimes \mathscr{L})^{\otimes n}) = n\mu_{\max}^{\pi}(L^{\vee} \otimes \mathscr{L}) \leq n(\mu_{\max}^{\pi}(\mathscr{L}) - \varepsilon).$$

Par conséquent, on a

$$\mu_{\max}^{\pi}(L^{\vee \otimes n} \otimes \mathscr{L}^{\otimes d}) \leq d\mu_{\max}^{\pi}(\mathscr{L}) - n\varepsilon < 0.$$

Donc $H^0(X, L^{\vee \otimes n} \otimes \mathscr{L}^{\otimes d}) = 0$. Ainsi (X, L) satisfait à la condition P_3.

"$\Longleftarrow$" : On suppse que $L^{\vee}$ soit ample relativement à π et que la condition $P_3(X, L)$ soit vérifiée. Soit M un $\mathcal{O}_C$-module inversible ample. Comme (X, L) satisfait à la condition P_3, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $d > \lambda$ et tout entier $n > \lambda d$, on ait

$$H^0(X, L^{\vee \otimes n} \otimes \pi^* M^{\otimes d}) = 0.$$

D'après le lemme 1.3.13, on a

$$\mu_{\max}(\pi_*(L^{\vee \otimes n} \otimes \pi^* M^{\otimes d})) = d \deg M + \mu_{\max}(\pi_*(L^{\vee \otimes n})) \leq g - 1.$$

On prend une suite $(d_n)_{n \geq 1}$ telle que

i) pour tout entier $n \geq 1$, $d_n > \lambda$,

ii) pour n suffisamment grand, $d_n < n/\lambda$,

iii) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n}{d_n} = \lambda$.

Alors pour n suffisamment grand, on a :

$$\deg(M) d_n + \mu_{\max}(\pi_*(L^{\vee \otimes n})) \leq g - 1,$$

c'est-à-dire :

$$\deg(M)\frac{d_n}{n} + \frac{\mu_{\max}(\pi_*(L^{\vee \otimes n}))}{n} \leq \frac{g-1}{n}.$$

Par passage à la limite, on obtient $\mu_{\max}^{\pi}(L^{\vee}) \leq -\lambda^{-1} \deg M < 0$. □

Corollaire 2.2.17 *Soient $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique vers C et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Si $\mu_{\max}^{\pi}(L) > 0$, alors (X, L) satisfait à la condition P_3.*

Démonstration. D'après le corollaire 2.2.15, $\mu_{\max}^{\pi}(L^{\vee}) < 0$. Le corollaire résulte donc du théorème 2.2.16. □

Pente maximale asymptotique relative d'un module localement libre

Définition 2.2.18 Soit $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique X vers C. Si E est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul et si $p : \mathbb{P}(E) \to X$ est le morphisme canonique, on définit

$$\mu^{\pi}_{\max}(E) = \mu^{\pi p}_{\max}(\mathcal{O}_E(1)).$$

Remarque 2.2.19 Si E est ample relativement à π, alors $\mathcal{O}_E(1)$ est ample relativement à πp. Dans ce cas-là on a

$$\mu^{\pi}_{\max}(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\max}(\pi_*(S^n E)).$$

Théorème 2.2.20 *Soient $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique X vers C, E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini et non-nul. Si $\mu^{\pi}_{\max}(E^{\vee}) < 0$, alors (X, E) satisfait à la condition P_3. La réciproque est vraie lorsque $E^{\vee}$ est ample relativement à π.*

Démonstration. "$\Longrightarrow$" : Soient $p : \mathbb{P}(E^{\vee}) \to X$ le morphisme canonique et $f = \pi p$. Comme $\mu^{f}_{\max}(\mathcal{O}_{E^{\vee}}(1)) = \mu^{\pi}_{\max}(E^{\vee})$ on a $\mu^{f}_{\max}(\mathcal{O}_{E^{\vee}}(1)) < 0$. Donc on a $P_3(\mathbb{P}(E^{\vee}), \mathcal{O}_{E^{\vee}}(-1))$ compte tenu du théorème 2.2.16. D'après la proposition 2.1.17, on a $P_3(X, E)$.

"$\Longleftarrow$" : Si on a $P_3(X, E)$, alors $P_3(\mathbb{P}(E^{\vee}), \mathcal{O}_{E^{\vee}}(-1))$ est vérifiée d'après la proposition 2.1.17. Si de plus $E^{\vee}$ est ample relativement à π, alors $\mathcal{O}_{E^{\vee}}(-1)$ est ample relativement à f. Le théorème 2.2.16 implique que $\mu^{f}_{\max}(\mathcal{O}_{E^{\vee}}(1)) < 0$, i.e., $\mu^{\pi}_{\max}(E^{\vee}) < 0$. □

Un exemple de calcul des pentes maximales asymptotiques

On désigne par K le corps des fonctions méromorphes sur C.

Soient $\pi : \mathscr{A} \to C$ un schéma abélien de dimension relative d, L un faisceau inversible sur $\mathscr{A}$. On désigne par $\varepsilon : C \to \mathscr{A}$ la section nulle et par T_π le fibré tangent relatif.

Proposition 2.2.21 *Si L est ample relativement à π, on a*

$$\mu(\pi_* L) = \frac{1}{d+1} \frac{\deg(\pi_*(c_1(L)^{d+1} \cap [\mathscr{A}]))}{\deg_{L_K}(\mathscr{A}_K)} + \frac{1}{2} \deg \varepsilon^* T_\pi;$$

si de plus L est symétrique, alors

$$\mu(\pi_* L) = \frac{1}{2} \deg \varepsilon^* T_\pi + \deg \varepsilon^* L.$$

Démonstration. 1) On a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathscr{A}}$-modules $\pi^*\varepsilon^* T_\pi \simeq T_\pi$ (autrement dit, le $\mathcal{O}_{\mathscr{A}}$-module T_π "provient de la base"). D'après le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck, on a $\mathrm{ch}(R\pi_* L) = \pi_*(\mathrm{ch}(L)\,\mathrm{Td}(T_\pi))$. Comme L est ample relativement à π, on a $\mathrm{ch}(\pi_* L) = \pi_*(\mathrm{ch}(L)\,\mathrm{Td}(T_\pi))$. Donc

$$\begin{aligned} &\deg(\pi_* L) = \deg \pi_*(\mathrm{Td}(\pi^*\varepsilon^* T_\pi)\,\mathrm{ch}(L)) \\ &= \deg \mathrm{Td}(\varepsilon^* T_\pi)\pi_*(\mathrm{ch}(L)) = \deg\left(\left(1 + \frac{1}{2} c_1(\varepsilon^* T_\pi)\right) \pi_*(\mathrm{ch}(L))\right) \\ &= \frac{1}{(d+1)!} \deg(\pi_*(c_1(L)^{d+1} \cap [\mathscr{A}])) + \frac{1}{2d!} \deg_{L_K}(\mathscr{A}_K) \deg(\varepsilon^* T_\pi). \end{aligned}$$

D'autre part, on a
$$\operatorname{rg}\pi_*L = \dim H^0(\mathscr{A}_K, L_K) = \frac{1}{d!}\deg_{L_K}\mathscr{A}_K.$$
Donc
$$\mu(\pi_*L) = \frac{1}{d+1}\frac{\deg(\pi_*(c_1(L)^{d+1}\cap[\mathscr{A}]))}{\deg_{L_K}(\mathscr{A}_K)} + \frac{1}{2}\deg\varepsilon^*T_\pi.$$

2) D'après la formule d'adjonction, on a
$$\mu(\pi_*(L\otimes\pi^*\varepsilon^*L^\vee)) = \mu(\pi_*(L)\otimes\varepsilon^*L^\vee) = \mu(\pi_*L) - \deg\varepsilon^*L.$$
D'autre part, on a
$$\varepsilon^*(L\otimes\pi^*\varepsilon^*L^\vee) = \varepsilon^*L\otimes\varepsilon^*L^\vee = \mathcal{O}_{\mathscr{A}}.$$
Donc on est ramené au cas où ε^*L est trivial. Comme L est symétrique et $\varepsilon^*L = \mathcal{O}_{\mathscr{A}}$, pour tout entier n, $[n]^*[L] = [L^{\otimes n^2}]$ dans $\operatorname{Pic}(\mathcal{A})$. Par conséquent,
$$\begin{aligned}[n]_*(n^{2d+2}c_1(L)^{d+1}\cap[\mathscr{A}]) &= [n]_*(c_1([n]^*L)^{d+1}\cap[\mathscr{A}])\\ = c_1(L)^{d+1}\cap n_*[\mathscr{A}] &= n^{2d}c_1(L)^{d+1}\cap[\mathscr{A}]\end{aligned}$$
car $[n]:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ est une isogénie de degré n^{2d}. Par conséquent, on a
$$n^2\deg(\pi_*(c_1(L)^{d+1}\cap[\mathscr{A}])) = \deg(\pi_*(c_1(L)^{d+1}\cap[\mathscr{A}])),$$
i.e., $\deg(\pi_*(c_1(L)^{d+1}\cap[\mathscr{A}])) = 0$ si on prend $n>1$. □

Par ailleurs, la "théorie algébrique des fonctions théta" de Mumford [71] — qui décrit l'espace $H^0(\mathscr{A}_{\overline{K}}, L_{\overline{K}})$ des sections de L sur la fibre générique géométrique de $\mathscr{A}\to C$ comme une représentation projective irréductible du sous-groupe $H(L_{\overline{K}})\subset\mathscr{A}(\overline{K})$ de Mumford — admet comme conséquence (cf. [8] pour l'analogue dans la situation arithmétique plus compliquée où l'on s'intéresse à un fibré inversible hermitien cubiste sur un schéma abélien sur le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres) :

Proposition 2.2.22 *Si L est ample relativement à π et si k est de caractéristique 0, alors π_*L est semi-stable, et donc $\mu_{\max}(\pi_*L) = \mu(\pi_*L)$.*

Corollaire 2.2.23 *Si L est ample relativement à π et si k est de caractérsitique 0, on a*
$$\mu^\pi_{\max}(L) = \frac{1}{d+1}\frac{\deg(\pi_*(c_1(L)^{d+1}\cap[\mathscr{A}]))}{\deg(c_1(L_K)^d\cap[\mathscr{A}_K])};$$
si de plus L est symétrique,
$$\mu^\pi_{\max}(L) = \deg(\varepsilon^*L).$$

Si L est un $\mathcal{O}_{\mathscr{A}}$-module inversible quelconque et si $\mathscr{L}$ est un $\mathcal{O}_{\mathscr{A}}$-module inversible ample relativement à π. On suppose que n est un entier positif tel que $\mathscr{L}^{\otimes n}\otimes L$ soit ample relativement à π. D'après le corollaire 2.2.23, on sait calculer $A_n(L,\mathscr{L})$ (cf. la définition 2.2.11). Plus précisément, on a
$$\begin{aligned}\mu^\pi_{\max}(L\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}) &= \frac{1}{d+1}\frac{\deg(\pi_*((c_1(L)+nc_1(\mathscr{L}))^{d+1})}{\deg((c_1(L_K)+nc_1(\mathscr{L}_K))^d)}\\ = \frac{1}{d+1}&\frac{\deg(\pi_*(c_1(\mathscr{L})^{d+1})n^{d+1} + (d+1)\deg(\pi_*(c_1(L)c_1(\mathscr{L})^d))n^d + o(n^d)}{\deg(c_1(\mathscr{L}_K)^d)n^d + d\deg(c_1(L_K)c_1(\mathscr{L}_K)^{d-1})n^{d-1} + o(n^{d-1})}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

D'autre part, on a

$$\mu^{\pi}_{\max}(\mathscr{L}) = \frac{1}{d+1}\frac{\deg(\pi_*(c_1(\mathscr{L})^{d+1}))}{\deg(c_1(\mathscr{L}_K)^d)}. \tag{2.6}$$

On déduit de (2.5) et (2.6) que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n(L,\mathscr{L}) = \frac{\deg(\pi_*(c_1(L)c_1(\mathscr{L})^d))}{\deg(c_1(\mathscr{L}_K)^d)} - \frac{d}{d+1}\frac{\deg(c_1(L_K)c_1(\mathscr{L}_K)^{d-1})\deg(\pi_*(c_1(\mathscr{L})^{d+1}))}{\deg(c_1(\mathscr{L}_K)^d)^2}. \tag{2.7}$$

Si L et $\mathscr{L}$ sont l'un et l'autre symétriques, on a pour tout entier n suffisamment grand

$$A_n(L,\mathscr{L}) = \deg(\varepsilon^* L).$$

En particulier, si L est symétrique, $\mu^{\pi}_{\max}(L) \leq \deg(\varepsilon^* L)$.

Proposition 2.2.24 *Pour tout $\mathcal{O}_{\mathscr{A}}$-module inversible L on a*

$$\mu^{\pi}_{\max}(L) = \inf_{\mathscr{L}}\left[\frac{\deg(\pi_*(c_1(L)c_1(\mathscr{L})^d))}{\deg(c_1(\mathscr{L}_K)^d)} - \frac{d}{d+1}\frac{\deg(c_1(L_K)c_1(\mathscr{L}_K)^{d-1})\deg(\pi_*(c_1(\mathscr{L})^{d+1}))}{\deg(c_1(\mathscr{L}_K)^d)^2}\right], \tag{2.8}$$

où $\mathscr{L}$ parcourt tous les $\mathcal{O}_{\mathscr{A}}$-module inversible ample relativement à π.

2.3 Condition P_3 et algébricité

2.3.1 Un critère d'algébricité

Soit k un corps. Soient X une variété algébrique projective sur k, Y un sous-schéma fermé intègre de X, $\widehat{V}$ un sous-schéma formel du complété formel de X le long de Y. On suppose que $\widehat{V}$ a pour schéma de définition Y et que le noyau $\mathfrak{J}$ de l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{\widehat{V}} \to \mathcal{O}_Y$ soit localement engendré par une suite régulière. On désigne par $N = (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)^\vee$ le fibré normal de Y dans $\widehat{V}$. C'est un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang fini.

Proposition 2.3.1 *Avec les notations ci-dessus, si* $\dim Y > 0$ *et si* (Y,N) *satisfait à la condition P_3, alors $\widehat{V}$ est algébrique.*

Démonstration. Reprenons les notations du paragraphe 1.8. D'après la définition de la condition P_3, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $i > \lambda D$, on ait

$$H^0(Y, L|_Y^{\otimes D} \otimes S^i N^\vee) = 0.$$

Comme chaque sous-quotient E_D^i/E_D^{i+1} s'injecte, par γ_D^i, dans $H^0(Y, L|_Y^{\otimes D} \otimes S^i N^\vee)$, on en déduit que pour tout $D > \lambda$

$$\sum_{i\geq 0}\frac{i}{D}\operatorname{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1}) = \sum_{0\leq i\leq \lambda D}\frac{i}{D}\operatorname{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1})$$
$$\leq \lambda \sum_{0\leq i\leq\lambda D}\operatorname{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1}) \leq \lambda\sum_{i\geq 0}\operatorname{rg}_K(E_D^i/E_D^{i+1}).$$

La proposition résulte donc de la proposition 1.8.2. □

Comme la condition $P_3(Y,N)$ est plus faible que l'amplitude de N (la proposition 2.1.32), on en déduit que si N est ample sur Y, alors $\widehat{V}$ est algébrique. On retrouve donc un résultat de Hartshorne (cf. [53] theórème 6.7), établi sous l'hypothèse supplémentaire de lissité formelle de $\widehat{V}$ sur k.

On déduit de la proposition 2.3.1 et du théorème 2.2.20 un critère numérique d'algébricité de $\widehat{V}$:

Corollaire 2.3.2 *S'il existe une courbe projective lisse C sur $\operatorname{Spec} k$ ainsi qu'un k-morphisme propre et surjectif π de Y vers C tels que $\mu_{\max}^{\pi}(N^\vee)<0$, alors $\widehat{V}$ est algébrique.*

Corollaire 2.3.3 *On suppose satisfaites les conditions suivantes :*

1) il existe une courbe algébrique C projective lisse sur k et un k-morphisme propre et surjectif π de Y vers C de telle sorte que Y soit un schéma abélien de dimension relative d sur C ;

2) N est un $\mathcal{O}_Y$-module inversible ;

3) si on désigne par η le point générique de C, il existe un $\mathcal{O}_Y$-module inversible $\mathscr{L}$ ample relativement à π tel que le nombre

$$\frac{d}{d+1}\frac{\deg(c_1(N_\eta)c_1(\mathscr{L}_\eta)^{d-1})\deg(\pi_*(c_1(\mathscr{L})^{d+1}))}{\deg(c_1(\mathscr{L}_\eta)^d)^2}-\frac{\deg(\pi_*(c_1(N)c_1(\mathscr{L})^d))}{\deg(c_1(\mathscr{L}_\eta)^d)}$$

soit négatif.

Alors $\widehat{V}$ est algébrique.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.3.2 et du calcul explicite (2.8). □

Remarque 2.3.4 Dans le corollaire 2.3.3, si on suppose que N soit symétrique sur le schéma abélien Y, on peut remplacer la condition 3) par :

3)' $\deg(\varepsilon^*N)>0$, *où $\varepsilon : C\to Y$ est la section nulle.*

On reprend maintenant les notations du paragraphe 1.8 en supposant que Λ soit une courbe projective lisse sur un corps k. Les résultats obtenus ci-dessus montre que, si $\widehat{V}$ se prolonge en un sous-schéma formel $\widehat{\mathscr{V}}$ du complété formel $\widehat{\mathscr{X}_{\mathscr{Y}}}$, alors la condition $P_3(\mathscr{Y},N_{\mathscr{Y}}\widehat{\mathscr{V}})$ implique l'algébricité de $\widehat{\mathscr{V}}$ et donc celle de $\widehat{V}$. Dans la suite du paragraphe, on étudiera le cas général. D'abord on a l'inégalité

$$\mu(\mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1})\le\mu_{\max}(\pi_*\bar{\varphi}_{0*}(\mathscr{L}|_{\mathscr{Y}}^{\otimes D}\otimes(\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1})|_{\mathscr{Y}}))$$

pour tout $(i,D)\in\mathbb{N}^2$.

Proposition 2.3.5 *On suppose qu'il existe trois nombres a,A,λ dans $\mathbb{R}_{>0}$ tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1) pour tout entier $D>\lambda$ et tout entier $i>\lambda D$, on a $\mu(\mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1})<-ai$ (ici on utilise la convention $\mu(0)=-\infty$) ;

2) pour tout entier $D\ge 0$ et tout entier $i\le\lambda D$ on a $\mu(\mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1})\le AD$.

Alors $\widehat{V}$ est algébrique.

Démonstration. Quitte à remplacer X par Z, on peut supposer que $\mathscr{E}_D^i = 0$ pour i suffisamment grand. On a

$$\begin{aligned} \deg(\mathscr{E}_D) &= \sum_{i\geq 0} \deg(\mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1}) \\ &\leq \sum_{0\leq i\leq \lambda D} \mathrm{rg}(E_D^i/E_D^{i+1})\Big(\mu(\mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1}) + ai\Big) - a\sum_{i\geq 0} i\,\mathrm{rg}(E_D^i/E_D^{i+1}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{rg}(E_D)}\sum_{i\geq 0}\frac{i}{D}\,\mathrm{rg}(E_D^i/E_D^{i+1}) &\leq -\frac{\mu(\mathscr{E}_D)}{aD} + \frac{1}{aD}\sum_{0\leq i\leq\lambda D}\mathrm{rg}(E_D^i/E_D^{i+1})(\mu(\mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1}) + ai) \\ &\leq -\frac{\mu(\mathscr{E}_D)}{aD} + \frac{1}{aD\,\mathrm{rg}(E_D)}\sum_{0\leq i\leq\lambda D}\mathrm{rg}(E_D^i/E_D^{i+1})(AD + ai) \\ &\leq -\frac{\mu(\mathscr{E}_D)}{aD} + \frac{1}{aD\,\mathrm{rg}(E_D)}\sum_{0\leq i\leq\lambda D}\mathrm{rg}(E_D^i/E_D^{i+1})(AD + a\lambda D) \\ &\leq -\frac{\mu(\mathscr{E}_D)}{aD} + \frac{A + a\lambda}{a}. \end{aligned}$$

Comme $\mathscr{L}$ est ample relativement à π, on connaît l'existence de la limite $\lim\limits_{D\to+\infty}\mu(\mathscr{E}_D)/D$. Donc $\mu(\mathscr{E}_D)/D$ est borné inférieurement (on aurait pu raisonner de façon plus élémentaire en choisissant $\mathscr{L}$ ample sur X et en observant que $\mathscr{E}_D$ est alors engendré par ses sections globales, et donc de pente ≥ 0, pour D suffisamment grand). D'après la proposition 1.8.2, on en déduit que $\widehat{V}$ est algébrique. $\square$

2.3.2 Une application : comparaison des voisinages formels et étales des variétés projectives

Définition 2.3.6 On appelle *couple de schémas* (noethériens) tout couple (X, Y) constitué d'un schéma noethérien X et d'un sous-schéma fermé et réduit Y de X. On applle *morphisme de couples de schémas* de (X, Y) vers (X', Y') un morphisme de type fini de X vers X' dont la restriction à Y donne un morphisme de Y vers Y'.

Définition 2.3.7 On appelle *voisinage étale* d'un couple de schémas (X, Y) la donnée d'un couple de schémas (W, Y) et d'un morphisme de couples de schémas $f : (W, Y) \to (X, Y)$ dont la restriction à Y est le morphisme identité et qui est étale en tout point $y \in Y$.

Définition 2.3.8 On dit que deux couples de schémas (X, Y) et (W, Y) sont équivalents dans un voisinage formel s'il existe un isomorphisme de schémas formels $\varphi : \widehat{X}_Y \to \widehat{W}_Y$ dont la restriction à Y est l'identité.

Définition 2.3.9 On dit que deux couples de schémas (X, Y) et (W, Y) sont équivalents dans un voisinage étale s'il existe un couple (U, Y) et deux morphismes $f : (U, Y) \to (X, Y)$ et $g : (U, Y) \to (W, Y)$ qui font de (U, Y) un voisinage étale de (X, Y) et un voisinage étale de (W, Y).

Lemme 2.3.10 ([37] 4.5) *Soient (X,Y) et (U,Y) deux couples de schémas noethériens et $f : (U,Y) \to (X,Y)$ un morphisme de couples de schémas dont la restrictions sur Y est le morphisme d'identité. Alors f définit un voisinage étale de (X,Y) si et seulement si f induit un isomorphisme de schémas formels $\widehat{f} : \widehat{U}_Y \to \widehat{X}_Y$.*

Démonstration. Le problème étant local, on est ramené au cas où X et U sont affines. Soient A (resp. B) l'anneau de X (resp. U) et I (resp. J) l'idéal de Y dans X (resp. U). Soit $\varphi : A \to B$ l'homomorphisme correspondant à f. Comme f est un morphisme de couples on sait que $I = \varphi^{-1}(J)$ et f induit un isomorphisme de A/I vers B/J. D'autre part, pour tout entier $n \geq 1$, l'homomorphisme φ induit un homomorphisme de A/I^n vers B/J^n. Par passage à la limite inductive, l'homomorphisme φ induit un homomorphisme continu $\widehat{\varphi} : \widehat{A}_I \to \widehat{B}_J$. Autrement dit, f induit un morphisme de schémas formels $\widehat{f} : \widehat{U}_Y \to \widehat{X}_Y$.

"$\Longrightarrow$" : On suppose que le morphisme f soit étale en tout point de Y. En diminuant éventuellement U et X on est ramené au cas où f est un morphisme étale. Pour tout entier $n \geq 1$ soit Y_n (resp. Y'_n) le $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de Y dans $\widehat{U}_Y$ (resp. $\widehat{X}_Y$). Comme remarqué ci-dessus, on a un morphisme $g_n : Y_n \to Y'_n$ induit par f qui prolonge Id_Y. Le sous-schéma fermé Y de Y_n est défini par un idéal nilpotent. Comme f est étale, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_X(Y'_n, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(Y, U)$$

est bijective. Soit $h_n : Y'_n \to U$ le morphisme qui prolonge l'immersion fermée de Y dans U. Alors $h_n g_n$ est l'immersion fermée de Y_n dans U puisque l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_X(Y_n, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(Y, U)$$

est bijective. Cela montre que h_n se factorise par Y_n, et $h_n g_n = \mathrm{Id}_{Y_n}$. Enfin, par construction $g_n h_n = f h_n = \mathrm{Id}_{Y'_n}$. Donc $g_n : Y_n \to Y'_n$ est un isomorphisme.

"$\Longleftarrow$" : Si on a $\widehat{U}_Y \cong \widehat{X}_Y$, alors pour tout point $y \in Y$, $\widehat{\mathcal{O}}_{U,y} \cong \widehat{\mathcal{O}}_{X,y}$. Donc $\mathcal{O}_{U,y}$ est une algèbre étale sur $\mathcal{O}_{X,y}$ (cf. [49] IV.17.6.3), i.e., le morphisme f est étale en y. □

Théorème 2.3.11 *Soient (X,Y) et (W,Y) deux couples de variétés algébriques projectives sur un corps k algébriquement clos. On suppose que X et W soient lisses sur k, que Y soit intègre, de dimension ≥ 1 et localement une intersection complète dans $\widehat{X}_Y$ et que le fibré normal de Y dans $\widehat{X}_Y$ satisfasse à la condition P_3. Alors (X,Y) et (W,Y) sont équivalents dans un voisinage formel si et seulement s'ils sont équivanlents dans un voisinage étale.*

Démonstration. "$\Longleftarrow$" est vrai d'après le lemme 2.3.10.

"$\Longrightarrow$" : Soit $\Delta : Y \xrightarrow{(\mathrm{Id},\mathrm{Id})} Y \times_k Y \longrightarrow X \times_k W$ la diagonale de Y dans $X \times_k W$. Supposons que $\varphi : \widehat{X}_Y \to \widehat{W}_Y$ soit un isomorphisme de schémas formels dont la restriction sur Y est l'identité. Considérons le "graphe formel" de φ

$$\Gamma_\varphi : \widehat{X}_Y \longrightarrow (\widehat{X \times_k W})_{\Delta(Y)}$$

qui fait de $\widehat{X}_Y$ un sous-schéma formel de $(\widehat{X \times_k W})_{\Delta(Y)}$. Comme $N_Y \widehat{X}_Y$ satisfait à la condition P_3, $\Gamma_\varphi(\widehat{X}_Y)$ est algébrique dans $(\widehat{X \times_k W})_{\Delta(Y)}$, i.e., il existe un sous-schéma fermé intègre Z de $X \times_k W$ contenant $\Delta(Y)$ tel que $\dim Z = \dim \widehat{X}_Y (= \dim X = \dim W)$ et que $\widehat{Z}_{\Delta(Y)} \supset \Gamma_\varphi(\widehat{X}_Y)$. Soit $v : \widetilde{Z} \to Z$ la normalisation de Z. Elle induit un morphisme $\widehat{\widetilde{Z}}_{v^{-1}(Y)} \to \widehat{Z}_Y$. Sa restriction au-dessus de $\Gamma_\varphi(\widehat{X}_Y)$, formellement lisse, est un isomorphisme. On en déduit l'existence d'un sous-schéma fermé intègre $\widetilde{Y}$ dans $\widetilde{Z}$ tel que $v|_{\widetilde{Y}} : \widetilde{Y} \to Y$ soit un isomorphisme et que $\widehat{v}$ induise un isomorphisme $\widehat{v} : \widehat{\widetilde{Z}}_{\widetilde{Y}} \to \Gamma_\varphi(\widehat{X}_Y)$. Par conséquent, les morphismes de schémas formels induits par les morphismes de couples $\mathrm{pr}_1 \circ v : (\widetilde{Z}, \widetilde{Y}) \to (X, Y)$ et $\mathrm{pr}_2 \circ v : (\widetilde{Z}, \widetilde{Y}) \to (W, Y)$ sont des isomorphismes. D'après le lemme 2.3.10, $(\widetilde{Z}, \widetilde{Y})$ définit un voisinage étale commun de (X, Y) et (W, Y). $\square$

La question de comprendre quand l'équivalence de deux couples dans un voisinage formel implique leur équivalence dans un voisinage étale, ainsi que sa version analytique (où on s'intéresse à l'équivalence analytique dans un voisinage analytiques de couples d'espaces analytiques formellement isomorphes) a donné lieu de nombreux travaux, depuis les premiers résultats en géométrie complexe établies par Nirenberg et Spencer [74] en 1960 et Griffiths [43]. Nous renvoyons aux commentaires de Grauert dans [41] Vol.I pour une discussion détaillée et des références. Signalons toutefois que le théorème a été établi par Gieseker [37] lorsque le fibré normal est ample (condition plus forte que P_3) en appuyant sur les travaux de Harshorne sur les conditions (G1)—(G3) (cf. [37][53]). Le théorème 2.3.11, joint au fait que (P_3) est satisfaite lorsque $k = \mathbb{C}$ si Y est lisse et si $N_X Y$ admet une métrique hermitienne dont la courbure satisfait une hypothèse de positivité faible (cf. proposition 2.1.34), fournit une variante algébrique, valable lorsque $k = \mathbb{C}$, d'un théorème établi par Commichau et Grauert [22] en géométrie analytique complexe. Enfin, à cause du fait que la 1-positivité implique la condition P_3, le théorème 2.3.11 devient un avatar algébrique, valable sur tout corps algébriquement clos k, d'un théorème de Hirschowitz [55] qu'il a démontré dans un cadre analytique complexe par des techniques de déformations.

Chapitre 3

Positivité faible des fibrés vectoriels et algébrisation II : cas arithmétique

Dans ce chapitre, on désigne par K un corps de nombre de discriminant Δ_K et par $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers algébriques. On fixe $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ un schéma projectif et plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\mathscr{X}_K$ soit lisse sur $\operatorname{Spec} K$ et équidimensionnel de dimension d. On choisit pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$ une forme volume de type C^∞ qui définit une mesure de probabilité λ_σ sur $\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})$ et on suppose que la collection $(\lambda_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}}$ soit invariante par l'action de F_∞. Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$, on désigne par $\pi_*\overline{E}$ le $\mathcal{O}_K$-module $H^0(\mathscr{X}, E)$, muni de la métrique L^2. C'est un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$.

3.1 Pente maximale asymptotique arithmétique

3.1.1 Pente maximale asymptotique arithmétique d'un fibré inversible hermitien ample sur la fibre générique

Lemme 3.1.1 *Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample. Il existe une constante C telle que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout élément $(D_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{Z}^n_{>0}$, si on note $D = D_1 + \cdots + D_n$, on a*

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) \geq \sum_{i=1}^n \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D_i})) - \frac{1}{2}\log(\operatorname{rg}_{\mathbb{Q}} H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{L}_K^{\otimes D_i}))\\ - d\sum_{i=1}^n \log(D_i) + \frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}] - n\left(\log C + \frac{\log|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]}\right).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Démonstration. D'après (1.19), on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) \geq \frac{1}{2}\log[K:\mathbb{Q}] - \log\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})). \tag{3.2}$$

D'autre part, compte tenu du lemme 1.7.19, on a

$$-\log\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) \geq -n\log C - d\sum_{i=1}^n \log D_i - \sum_{i=1}^n \log\varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D_i})). \tag{3.3}$$

Enfin, la proposition 1.7.16 montre que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$-\log \varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D_i})) \geq \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D_i})) - \frac{1}{2}\log(\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}} H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{L}_K^{\otimes D_i})) - \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}. \qquad (3.4)$$

En combinant (3.2), (3.3) et (3.4) on obtient (3.1). □

Lemme 3.1.2 *Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample. Il existe une constante C telle que, pour tout entier $D \geq 1$, on ait*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) \leq CD.$$

Démonstration. Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ qui est arithmétiquement ample avec $c_1(\overline{L}) > 0$. Si s est une section de $\mathscr{L}^{\otimes D}$ au-dessus de $\mathscr{X}$, alors $\operatorname{div} s$ est un diviseur effectif de $\mathscr{X}$. Par conséquent, on a

$$h_{\overline{L}}(\operatorname{div} s) = \widehat{c}_1(\overline{L})^d \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}) + \int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})} \log\|s\| c_1(\overline{L})^d \geq 0.$$

D'autre part, comme $c_1(\overline{L}) > 0$, on sait que

$$\int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})} \log\|s\| c_1(\overline{L})^d \leq \max_{\sigma\in\Sigma_\infty} \log\|s\|_{\sigma,\sup} \int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})} c_1(\overline{L})^d.$$

On en déduit donc

$$-\max_{\sigma} \log\|s\|_{\sigma,\sup} \leq D\widehat{c}_1(\overline{L})^d \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}) \left(\int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})} c_1(\overline{L})^d\right)^{-1}.$$

D'après la proposition 1.7.17, il existe une constante C_0 tel que $\|s\|_{\sigma,\sup} \leq C_0 D^d \|s\|_{\sigma,L^2}$ pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
-\log\|s\| &= -\frac{1}{2}\log\Big(\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|s\|_{\sigma,L^2}^2\Big) \leq -\frac{1}{2}\log\big(C_0^{-2}D^{-2d}\max_{\sigma\in\Sigma_\infty}\|s\|_{\sigma,\sup}^2\big) \\
&\leq \log C_0 + d\log D - \max_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|s\|_{\sigma,\sup} \leq \log C_0 + d\log D + C_1 D,
\end{aligned}$$

$$\text{où } C_1 = \widehat{c}_1(\overline{L})^d \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}) \left(\int_{\mathscr{X}(\mathbb{C})} c_1(\overline{L})^d\right)^{-1}.$$

Donc l'inégalité 1.20 montre que

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) \leq \log C_0 + d\log D + C_1 D + \frac{1}{2}\log(\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes D}))) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]} = O(D).$$

□

Proposition 3.1.3 *Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample. La suite $(\frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})))_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$ on note $a_n = \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}))$. D'après le théorème de Hilbert-Samuel, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}} H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{L}_K^{\otimes n}) \leq C_1 n^d$ pour tout entier $n \geq 1$. D'après le lemme 3.1.1, il existe deux constantes C_2 et C_3 telles que, pour tout $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ $(r \geq 1)$, si $n = n_1 + \cdots + n_r$, on ait

$$a_n \geq \sum_{i=1}^r a_{n_i} - C_2 \sum_{i=1}^r \log n_i - C_3 r.$$

La proposition résulte donc du corollaire 1.5.2 et du lemme 3.1.2. $\square$

Définition 3.1.4 Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample. On appelle *pente maximale asymptotique arithmétique* de $\overline{\mathscr{L}}$ relativement à π et on note $\widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}})$ la limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}))$.

Proposition 3.1.5 *Soient $\overline{\mathscr{L}}$, $\overline{\mathscr{L}}_1$ et $\overline{\mathscr{L}}_2$ trois fibrés inversibles hermitiens sur $\mathscr{X}$ dont les restrictions sur $\mathscr{X}_K$ sont amples, $\overline{M}$ un fibré inversible hermitien sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.

1) pour tout entier $n \geq 1$, $\widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) = n \widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}})$;

2) $\widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^* \overline{M}) = \widehat{\deg}(\overline{M}) + \widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}})$;

3) $\widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}}_1 \otimes \overline{\mathscr{L}}_2) \geq \widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}}_1) + \widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}}_2)$.

Démonstration. 1) est immédiate d'après la définition.

2) En effet, on a $\pi_*((\overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^*(\overline{M}))^{\otimes n}) = \pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) \otimes \overline{M}^{\otimes n}$. Par conséquent,

$$\widehat{\mu}_{\max}^{\pi}((\overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^*(\overline{M}))^{\otimes n}) = \widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) + n \widehat{\deg}(\overline{M}).$$

3) D'après le corollaire 1.7.18, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_{\max}((\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1 \otimes \overline{\mathscr{L}}_2))^{\otimes n}) &\geq \frac{1}{2} \log[K:\mathbb{Q}] - \log \varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1^{\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}_2^{\otimes n})) \\
\geq \frac{1}{2} \log[K:\mathbb{Q}] - 2 \log C &- 2d \log n - \log \varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1^{\otimes n})) - \log \varepsilon(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})) \\
\geq \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1^{\otimes n})) &+ \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_2^{\otimes n})) - \frac{1}{2} \log(\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}} H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{L}_{1,K}^{\otimes n})) \\
&- \frac{1}{2} \log(\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}} H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{L}_{2,K}^{\otimes n})) - \frac{\log |\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]} - 2 \log C - 2d \log n.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Si on divise les deux côtés de (3.5) par n, par passage à la limite, on obtient

$$\widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}}_1 \otimes \overline{\mathscr{L}}_2) \geq \widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}}_1) + \widehat{\mu}_{\max}^{\pi}(\overline{\mathscr{L}}_2).$$

$\square$

3.1.2 Pente maximale asymptotique arithmétique d'un fibré vectoriel hermitien

Remarque 3.1.6 Soit $\eta : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ le point générique. C'est un morphisme plat. On désigne par $p : \mathscr{X}_K \to \operatorname{Spec} K$ et $q : \mathscr{X}_K \to \mathscr{X}$ les morphismes canoniques, qui s'insèrent dans un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X}_K \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathscr{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r, "\eta"'] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K. \end{tikzcd}$$

D'après [46] chap III, 1.4.15, pour tout $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, l'homomorphisme canonique $\eta^*\pi_*\mathscr{F} \to p_*q^*\mathscr{F}$ est un isomorphisme. Par conséquent, on a un isomorphisme $H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{F}_K) = H^0(\mathscr{X}, \mathscr{F})_K$. Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont deux $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-modules localement libres de rang fini, alors $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}}}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ s'identifie aux sections de $\mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{X}$. D'autre part,

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}_K}}(\mathscr{E}_K, \mathscr{F}_K) \cong H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{E}_K^\vee \otimes \mathscr{F}_K) = H^0(\mathscr{X}, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F})_K.$$

Par conséquent, pour tout homomorphisme $f : \mathscr{E}_K \to \mathscr{F}_K$, il existe un élément non-nul $a \in \mathcal{O}_K$ tel que f se prolonge en un homomorphisme de $\mathscr{E}_a \to \mathscr{F}_a$, autrement dit, l'image de l'homomorphisme composé

$$\mathscr{E} \xrightarrow{a} \mathscr{E} \longrightarrow q_*\mathscr{E}_K \longrightarrow q_*\mathscr{F}_K$$

est dans $\mathscr{F}$. On obtient ainsi un homomorphisme de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{F}$. Cet homomorphisme est injectif lorsque f est injectif.

Soient $\overline{\mathscr{E}}$ et $\overline{\mathscr{F}}$ deux fibrés vectoriels hermitiens sur $\mathscr{X}$ et $f : \mathscr{E}_K \to \mathscr{F}_K$ un homomorphisme. Alors f induit un homomorphisme $\varphi : H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{E}_K) \to H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{F}_K)$. D'autre part, f peut être considéré comme une section de $\mathscr{E}_K^\vee \otimes \mathscr{F}_K$ au-dessus de $\mathscr{X}_K$. Soit $\sigma : K \to \mathbb{C}$ un élément dans Σ_∞. Pour tout section $s \in H^0(\mathscr{X}_K, \mathscr{E}_K)$,

$$\|\varphi(s)\|_\sigma^2 = \int_{\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})} \|f_x(s(x))\|_\sigma^2 d\lambda_\sigma(x) \le \|f\|_{\sigma,\sup}^2 \int_{\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})} \|s(x)\|_\sigma^2 d\lambda_\sigma(x) = \|f\|_{\sigma,\sup}^2 \|s\|_\sigma^2,$$

où $\|f\|_{\sigma,\sup} = \sup\limits_{x \in \mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})} \|f_x\|$. Par conséquent, on a $\|\varphi\|_\sigma \le \|f\|_{\sigma,\sup}$.

Définition 3.1.7 Soient $\overline{L}$ et $\overline{\mathscr{L}}$ deux fibrés inversibles hermitiens sur $\mathscr{X}$. On suppose que $\mathscr{L}_K$ soit ample. Il existe alors un entier $n_0(L, \mathscr{L}) > 0$ tel que $L_K \otimes \mathscr{L}_K^{\otimes n}$ soit ample pour tout $n \ge n_0(L, \mathscr{L})$. On définit pour tout entier $n \ge n_0(L, \mathscr{L})$,

$$A_n(\overline{L}, \overline{\mathscr{L}}) = \widehat{\mu}_{\max}^\pi(\overline{L} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) - n\widehat{\mu}_{\max}^\pi(\overline{\mathscr{L}}).$$

Proposition 3.1.8 *Soit Θ l'ensemble des fibrés inversibles hermitiens $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample. Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$.*

1) Pour tout $\overline{\mathscr{L}} \in \Theta$, la suite $(A_n(\overline{L}, \overline{\mathscr{L}}))_{n \ge n_0(L,\mathscr{L})}$ est croissante et converge vers une limite.

2) Si $\overline{M}$ est un fibré inversible hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, $\overline{\mathscr{L}} \in \Theta$, alors

$$A_n(\overline{L}, \overline{\mathscr{L}} \otimes \pi^*\overline{M}) = A_n(\overline{L}, \overline{\mathscr{L}})$$

pour tout $n \ge n_0(L, \mathscr{L})$.

3) Si L_K est ample, alors

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) = \inf_{\overline{\mathscr{L}}\in\Theta}\lim_{n\to+\infty} A_n(\overline{L},\overline{\mathscr{L}}).$$

4) Pour tout fibré inversible hermitien $\overline{M}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on a

$$\widehat{\deg}(M) = \inf_{\overline{\mathscr{L}}\in\Theta}\lim_{n\to+\infty} A_n(\pi^*(\overline{M}),\overline{\mathscr{L}}).$$

Démonstration. 1) D'après la proposition 3.1.5, on a pour tout $n \geq n_0(L,\mathscr{L})$

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes(n+1)}) \geq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}).$$

Donc on a $A_{n+1}(\overline{L},\overline{\mathscr{L}}) \geq A_n(\overline{L},\overline{\mathscr{L}})$.

Comme $\mathscr{L}_K$ est ample, il existe un entier $m \geq 1$ et un homomorphisme injectif de L_K vers $\mathscr{L}_K^{\otimes m}$ qui induit un homomorphisme injectif $\varphi : L \to \mathscr{L}^{\otimes m}$ (cf. la remarque 3.1.6). Pour tout $n \geq n_0(L,\mathscr{L})$, l'homomorphisme φ induit un homomorphisme injectif $\varphi_n : L\otimes\mathscr{L}^{\otimes n} \to \mathscr{L}^{\otimes(m+n)}$. Soit $\psi_n : H^0(\mathscr{X}_K, L_K\otimes\mathscr{L}_K^{\otimes n}) \to H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K^{\otimes(m+n)})$ l'homomorphisme injectif entre les espaces de sections globales correspondant. D'après l'inégalité de pentes, pour tout entier $u \geq 1$, on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\otimes u}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes un})) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes u(n+m)})) + h(\psi_n^{\otimes u}).$$

Comme $\psi_n^{\otimes u}$ provient d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-modules, on sait que $\|\psi_n^{\otimes u}\|_{\mathfrak{p}} \leq 1$ pour tout $\mathfrak{p}\in\Sigma_f$. Si $\sigma : K \to \mathbb{C}$ est un plongement, alors

$$\|\psi_n^{\otimes u}\|_\sigma \leq \|\varphi_{n,K}^{\otimes u}\|_{\sigma,\sup} = \|\varphi_{n,K}\|^u_{\sigma,\sup} = \|\varphi_K\|^u_{\sigma,\sup}.$$

Par conséquent,

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\otimes u}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes un})) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes u(n+m)})) + u\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|\varphi_K\|_{\sigma,\sup}.$$

Par passage à la limite, on obtient que

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) \leq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes(m+n)}) + \sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|\varphi_K\|_{\sigma,\sup}.$$

Autrement dit,

$$A_n(\overline{L},\overline{\mathscr{L}}) \leq m\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) + \sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|\varphi_K\|_{\sigma,\sup}.$$

Par conséquent, la suite $(A_n(\overline{L},\overline{\mathscr{L}}))_{n\geq n_0(L,\mathscr{L})}$ est bornée supérieurement, donc converge.

2) En effet, pour tout $n \geq n_0(L,\mathscr{L})$,

$$A_n(\overline{L},\overline{\mathscr{L}}\otimes\pi^*(\overline{M})) = \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}\otimes\pi^*(\overline{M}^{\otimes n})) - n\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}\otimes\pi^*(\overline{M})) = A_n(\overline{L},\overline{\mathscr{L}}).$$

3) D'après 1), $A_n(\overline{L},\overline{L}) = \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L})$, donc $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) \geq \inf_{\overline{\mathscr{L}}\in\Theta}\lim_{n\to+\infty} A_n(\overline{L},\overline{\mathscr{L}})$. D'autre part, pour tout $\overline{\mathscr{L}}\in\Theta$,

$$A_n(\overline{L},\overline{\mathscr{L}}) \geq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) - n\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) = \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}).$$

4) En effet, pour tout $\overline{\mathscr{L}}\in\Theta$,

$$A_n(\pi^*(\overline{M}),\overline{\mathscr{L}}) = \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\pi^*(\overline{M})\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) - n\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) = \widehat{\deg}(\overline{M}).$$

□

Définition 3.1.9 Avec les notations de la proposition 3.1.8, on appelle *pente maximale asymptotique arithmétique* relativement à π de $\overline{L}$ la valeur

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) := \inf_{\overline{\mathscr{L}}\in\Theta}\lim_{n\to+\infty} A_n(\overline{L},\overline{\mathscr{L}}).$$

Lemme 3.1.10 *Soient* $\overline{\mathscr{L}}_1$ *et* $\overline{\mathscr{L}}_2$ *deux fibrés inversibles hermitiens sur* $\mathscr{X}$ *dont les restrictions sur* $\mathscr{X}_K$ *sont amples. Si* $f:\mathscr{L}_1\to\mathscr{L}_2$ *est un homomorphisme non-nul, on a*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1^{\otimes n}))\le\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_2^{\otimes n}))+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|f_K\|_{\sigma,\sup}. \tag{3.6}$$

Démonstration. Pour tout entier $n\ge1$ on désigne par $\varphi_n : H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_{1,K}^{\otimes n})\to H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_{2,K}^{\otimes n})$ l'homomorphisme induit par $f^{\otimes n}$. D'après l'inégalité de pentes, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_1^{\otimes n}))&\le\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_2^{\otimes n}))+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|\varphi_n\|_\sigma\\&\le\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}_2^{\otimes n}))+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}n\log\|f_K\|_{\sigma,\sup}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient (3.6). □

Proposition 3.1.11 *Soient* $\overline{L}$, $\overline{L}_1$ *et* $\overline{L}_2$ *trois fibrés inversibles hermitiens sur* $\mathscr{X}$, $\overline{M}$ *un fibré inversible hermitien sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. *On a*
1) $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}_1\otimes\overline{L}_2)\ge\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}_1)+\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}_2)$ *;*
2) $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}^{\otimes n})=n\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L})$ *pour tout* $n\ge1$ *;*
3) $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}\otimes\pi^*(\overline{M}))=\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L})+\widehat{\deg}(\overline{M})$ *;*
4) si $f:L_1\to L_2$ *est un homomorphisme non-nul, on a*

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}_1)\le\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}_2)+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|f_K\|_{\sigma,\sup}.$$

Démonstration. Pour tout fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{X}_K$ soit ample, et tout entier m suffisamment grand, on a

$$\begin{gathered}A_{2m}(\overline{L}_1\otimes\overline{L}_2,\overline{\mathscr{L}})\ge A_m(\overline{L}_1,\overline{\mathscr{L}})+A_m(\overline{L}_2,\overline{\mathscr{L}}),\\A_{mn}(\overline{L}^{\otimes n},\overline{\mathscr{L}})=nA_m(\overline{L},\overline{\mathscr{L}}),\\A_m(\overline{L}\otimes\pi^*(\overline{M}),\overline{\mathscr{L}})=A_m(\overline{L},\overline{\mathscr{L}})+\widehat{\deg}(\overline{M}),\\A_m(\overline{L}_1,\overline{\mathscr{L}})\le A_m(\overline{L}_2,\overline{\mathscr{L}})+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|f_K\|_{\sigma,\sup}.\end{gathered}$$

Par passage à la limite, on obtient les (in)égalités annoncées. □

Définition 3.1.12 Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. On appelle *pente maximale asymptotique arithmétique* relativement à π de $\overline{E}$ la valeur

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}):=\widehat{\mu}^{\pi p}_{\max}(\overline{\mathcal{O}_E(1)}),$$

où $p:\mathbb{P}(E)\to\mathscr{X}$ est le morphisme canonique et où la métrique sur $\mathcal{O}_E(1)$ est la métrique de Fubini-Study.

Proposition 3.1.13 *Avec les notations de la définition 3.1.12, si E_K est ample, alors*

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(S^n\overline{E})).$$

Démonstration. Soit r le rang de E Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\|\cdot\|_{\mathrm{FS}}$ (resp. $\|\cdot\|$) la métrique L^2 sur $\pi_*(S^nE) = (\pi p)_*(\mathcal{O}(n))$ par rapport à la métrique de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_E(1)$ (resp. la métrique produit symétrique sur S^nE). D'après (1.16), on a la relation

$$\|f\|^2 = \binom{n+r-1}{n}\|f\|^2_{\mathrm{FS}}$$

pour tout $f \in \pi_*(S^nE)$. La proposition 1.7.5 montre que, pour tout sous-$\mathcal{O}_K$-module F de $\pi_*(S^nE)$,

$$\widehat{\mu}(F, \|\cdot\|) = \widehat{\mu}(F, \|\cdot\|_{\mathrm{FS}}) - \frac{1}{2[K:\mathbb{Q}]}\log\binom{n+r-1}{n}.$$

Par conséquent, on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(S^nE), \|\cdot\|) = \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(S^nE), \|\cdot\|_{\mathrm{FS}}) - \frac{1}{2[K:\mathbb{Q}]}\log\binom{n+r-1}{n}.$$

Par passage à la limite on obtient

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(S^n\overline{E})).$$

□

3.2 Pente maximale asymptotique arithmétique et conditions de positivité

Proposition 3.2.1 *Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$.*

1) si $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) > 0$, alors $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}^{\vee}) < 0$;

2) si $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) < 0$ (resp. $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) \leq 0$), alors L n'a pas de section effective (resp. strictement effective) ;

3) si $\overline{L}$ est arithmétiquement ample, alors $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) > 0$.

Démonstration. 1) Comme $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathcal{O}}_{\mathscr{X}}) = 0$, on a

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}^{\vee}) \leq 0.$$

Donc $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) > 0$ implique $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}^{\vee}) < 0$.

2) D'après la remarque 1.7.22, L a une section effective (resp. strictement effective) si et seulement s'il existe un homomorphisme non-nul $f : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to L$ tel que $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty}\|f_K\|_{\sigma,\sup} \leq 1$ (resp. $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty}\|f_K\|_{\sigma,\sup} < 1$). D'après la proposition 3.1.11 4), on obtient que $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) \geq 0$ (resp. $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) > 0$).

3) Soit $\overline{M}$ un fibré inversible hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\widehat{\deg}(\overline{M}) > 0$. Comme $\overline{L}$ est arithmétiquement ample, il existe $n \geq 1$ tel que $\pi^*(M^{\vee}) \otimes L^{\otimes n}$ ait une section effectif. Cela implique que

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\pi^*(\overline{M}^{\vee}) \otimes \overline{L}^{\otimes n}) = n\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) - \widehat{\deg}(M) \geq 0.$$

Donc $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) > 0$. □

Lemme 3.2.2 *Soient $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ qui est arithmétiquement ample et $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien quelconque sur $\mathscr{X}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 1$ et un homomorphisme injectif $\varphi : L \to \mathscr{L}^{\otimes n}$ tel que $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\varphi_K\|_{\sigma,\sup} < \varepsilon$.*

Démonstration. On démontre d'abord le cas où $\overline{L} = \overline{\mathcal{O}}_{\mathscr{X}}$. Comme $\mathscr{L}$ est arithmétiquement ample, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\mathscr{L}^{\otimes m}$ a une section strictement effective. Soit $\psi : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{L}^{\otimes m}$ l'homomorphisme correspondant à la section. D'après la remarque 1.7.22, $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\psi_K\|_{\sigma,\sup} < 1$. Par conséquent, il existe un entier $p \geq 1$ tel que $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\psi_K^{\otimes p}\|_{\sigma,\sup} < \varepsilon$. Autrement dit, $\varphi = \psi^{\otimes p} : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{L}^{\otimes mp}$ vérifie la condition. Pour le cas général, comme $\mathscr{L}$ est ample, il existe un entier $q \geq 1$ et un homomorphisme injectif η de L vers $\mathscr{L}^{\otimes q}$. Soit $\alpha = \max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\eta_K\|_{\sigma,\sup}$. Soient $\phi : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{L}^{\otimes r}$ un homomorphisme injectif tel que $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\phi_K\|_{\sigma,\sup} < \varepsilon/\alpha$ et $\varphi = \eta \otimes \phi$. On a pour tout $\sigma \in \Sigma_\infty$, $\|\varphi_K\|_{\sigma,\sup} \leq \|\eta\|_{\sigma,\sup}\|\phi\|_{\sigma,\sup} < \varepsilon$. □

Lemme 3.2.3 *Soient $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien arithmétiquement ample sur $\mathscr{X}$ et $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe deux entiers $m, n \geq 1$ et un homomorphisme injectif $\varphi : E \to (\mathscr{L}^{\otimes n})^{\oplus m}$ tel que $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\varphi_K\|_{\sigma,\sup} < \varepsilon$.*

Démonstration. Comme $\mathscr{L}$ est arithmétiquement ample, il existe deux entiers $p, m \geq 1$ et un homomorphisme injectif $\psi : E \to (\mathscr{L}^{\otimes p})^{\oplus m}$. Soient $\alpha = \max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\psi_K\|_{\sigma,\sup}$ et $\eta : \mathcal{O}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{L}^{\otimes q}$ un homomorphisme injectif tels que $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\eta_K\|_{\sigma,\sup} < \varepsilon/\alpha$, et que $\varphi = \psi \otimes \eta : E \to (\mathscr{L}^{\otimes(p+q)})^{\oplus m}$. On a pour tout $\sigma \in \Sigma_\infty$, $\|\varphi_K\|_{\sigma,\sup} < \varepsilon$. □

Remarque 3.2.4 Si on combine le lemme 3.2.3 et le lemme 3.1.2, on obtient que, pour tout fibré inversible hermitien $\overline{L}$ sur $\mathscr{X}$ et tout fibré vectoriel $\overline{E}$ sur $\mathscr{X}$, il existe une constante C telle que, pour tout entier $D \geq 1$, on ait $\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{E} \otimes \overline{L}^{\otimes D})) \leq CD$. C'est un analogue de la proposition 2.2.5.

Définition 3.2.5 Soit $\overline{E}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$. On dit que $\overline{E}$ est *faiblement positif* si pour tout fibré inversible hermitien $\overline{L}$ sur $\mathscr{X}$, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(\overline{E}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{L}^{\otimes D})) > 1$, où ε est la plus petite norme d'un vecteur non-nul (cf. définition 1.7.14).

Proposition 3.2.6 *Soit $\overline{E}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) pour tout fibré inversible hermitien $\overline{L}$ et tout fibré vectoriel hermitien $\overline{F}$ sur $\mathscr{X}$, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{E}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{L}^{\otimes D} \otimes \overline{F})) > 1;$$

2) $\overline{E}$ est faiblement positif ;

3) il existe un fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ arithmétiquement ample sur $\mathscr{X}$, un nombre $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{E}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) > 1.$$

Démonstration. "1)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$3)" sont triviaux.

"3)$\Longrightarrow$1)" : D'après les lemmes 3.2.2 et 3.2.3, il existe trois entiers $p, q, r \geq 1$ ainsi que deux homomorphismes injectifs $\varphi : F \to (\mathscr{L}^{\otimes p})^{\oplus r}$ et $\psi : L \to \mathscr{L}^{\otimes q}$ tels que $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\varphi_K\|_{\sigma,\sup} < 1$ et $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\psi_K\|_{\sigma,\sup} < 1$. Pour tout entier $D \geq 1$ on a un homomorphisme injectif $\phi_D = \psi^{\otimes D} \otimes \varphi$ de $L^{\otimes D} \otimes F$ vers $(\mathscr{L}^{\otimes(Dq+p)})^{\oplus r}$ tel que $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\phi_{D,K}\|_{\sigma,\sup} < 1$. D'après 3) il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(\overline{E}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes(Dq+p)})) > 1$. Par conséquent, on a $\varepsilon(\pi_*(\overline{E}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes(Dq+p)})^{\oplus r}) > 1$. Comme $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty} \|\phi_{D,K}\|_{\sigma,\sup} < 1$, on sait que $\varepsilon(\pi_*(\overline{E}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{L}^{\otimes D} \otimes \overline{F})) > 1$. □

Théorème 3.2.7 *Soit $\overline{L}$ un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible hermitien. Si $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}^{\vee}) < 0$, alors $\overline{L}$ est faiblement positif. La réciproque est vraie lorsque $L_K^{\vee}$ est ample.*

Démonstration. "Nécessité" : Comme $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}^{\vee}) < 0$, il existe une constante $\varepsilon > 0$ et un fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$ qui est arithmétiquement ample tels que $A_m(\overline{L}^{\vee}, \overline{\mathscr{L}}) \leq -\varepsilon$ pour tout entier m suffisamment grand. En remplacant $\overline{\mathscr{L}}$ par une puissance convenable on peut supposer que $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}^{\vee} \otimes \overline{\mathscr{L}}) \leq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) - \varepsilon$. Soit $\lambda > \varepsilon^{-1}\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ une constante. Pour tout entier $D \geq 1$ et tout entier $n \geq \lambda D$, on a d'après la proposition 3.1.11,

$$(n-D)\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) + \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}) \leq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}((\overline{L}^{\vee} \otimes \overline{\mathscr{L}})^{\otimes n}) \leq n(\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) - \varepsilon).$$

Par conséquent,

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}^{\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}) \leq D\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) - n\varepsilon < 0.$$

Donc $\overline{L}^{\vee\otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}$ n'a pas de section effective.

"Suffisance" : Soit $\overline{M}$ un fibré inversible hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\widehat{\deg}(\overline{M}) > 0$. Il existe une constante $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes n}) \otimes \pi^*(\overline{M}^{\otimes D})) > 1,$$

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes n} \otimes \pi^*(\overline{M}^{\otimes D}))) = \widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes n})) + D\widehat{\deg}(\overline{M}) \leq \frac{1}{2}\log(\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(L^{\vee\otimes n}))) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.$$

Soit $(D_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que

i) $D_n > \lambda$ pour tout entier $n \geq 1$;

ii) $D_n < n/\lambda$ pour n suffisamment grand ;

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{D_n} = \lambda$.

On a

$$\frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes n})) + \frac{D_n}{n}\widehat{\deg}(\overline{M}) \leq \frac{1}{2n}\log(\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(L^{\vee\otimes n}))) + \frac{\log|\Delta_K|}{2n[K:\mathbb{Q}]}.$$

Par passage à la limite on obtient

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}^{\vee}) \leq -\lambda^{-1}\widehat{\deg}(\overline{M}) < 0.$$

□

Remarque 3.2.8 Si on utilise la convention $\varepsilon(0)=+\infty$ et $\widehat{\mu}_{\max}(0)=-\infty$, alors les résultats de 3.1.1 à 3.1.3 sont encore valables pour un fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ quelconque. On en déduit donc l'existence d'une limite dans $[-\infty,+\infty[$ de la suite $(\frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})))_{n\geq 1}$. Lorsque $\mathscr{L}_K$ n'est pas ample, on sait seulement que cette limite est inférieure ou égale à $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$. De plus, la partie "suffisance" de la démonstration du théorème 3.2.7 montre aussitôt que la positivité faible de $\overline{\mathscr{L}}^{\vee}$ implique la négativité de cette limite.

Proposition 3.2.9 *Soient $\overline{L}$ et $\overline{\mathscr{L}}$ deux fibrés inversibles hermitiens sur $\mathscr{X}$. Si $\overline{L}$ est faiblement positif, alors il existe deux nombres réels $a,\lambda'>0$ tels que, pour tout entier $D>\lambda'$ et tout entier $n>\lambda' D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes n}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}))\geq e^{an}$.*

Démonstration. D'après le lemme 3.2.2 il suffit de démontrer la proposition pour le cas où $\overline{\mathscr{L}}$ et $\overline{L}\otimes\overline{\mathscr{L}}$ admettent au moins une section effective. Soit $\overline{M}$ un fibré inversible hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\widehat{\deg}(\overline{M})>0$. Comme $\overline{L}$ est faiblement positif, il existe $\lambda>0$ tel que, pour tout entier $D>\lambda$ et tout entier $n>\lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes n}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}\otimes\pi^*(\overline{M})^{\otimes D}))>1.$$

On fixe maitenant deux entiers $D_0>\lambda$ et $n_0>\lambda D_0$. Pour tout entier $n>0$ on observe que

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}\otimes\pi^*(\overline{M})^{\otimes nD_0}))>1.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}&\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}))\\ &=\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}\otimes\pi^*(\overline{M})^{\otimes nD_0}))-nD_0\widehat{\deg}(\overline{M})\\ &\leq -nD_0\widehat{\deg}(\overline{M})+\frac{1}{2}\log(\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0})))+\frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\vee nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}))=-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\varepsilon(\pi_*(\overline{L}^{\vee nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}))\leq -D_0\widehat{\deg}(\overline{M}).$$

Par conséquent, il existe un nombre réel $a>0$ et un entier $n_1\geq 1$ tels que

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{L}^{\vee nn_0}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes nD_0}))\geq e^{an}$$

pour tout $n\geq n_1$. Comme $\overline{\mathscr{L}}$ a une section effective, et comme il existe un homomorphisme ϕ de $\overline{L}^{\vee}$ vers $\overline{\mathscr{L}}$ tel que $\max\limits_{\sigma\in\Sigma_\infty}\|\phi_K\|_{\sigma,\sup}\leq 1$, on obtient

$$\varepsilon(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes(nn_0+l)}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}))\geq e^{an}$$

pour tout entier $D_0\leq D\leq nD_0$ et tout entier $0\leq l\leq nD_0-D$. On note

$$\lambda_0=\max\Big(n_0,\frac{n_0n_1}{D_0},\frac{n_0^2}{D_0^2}+\frac{2n_0}{D_0}\Big)$$

Pour tout entier $D\geq D_0$ et tout entier $m>\lambda_0 D$, on a $\varepsilon(\pi_*(\overline{L}^{\vee\otimes m}\otimes\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}))\geq e^{am/(n_0+1)}$ puisque dans ce cas-là, il existe deux entiers $n\geq n_1$ et $0\leq l<nD_0-D$ tels que $m=nn_0+l$.
□

Définition 3.2.10 Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. On dit que $\overline{E}$ est *faiblement positif* si pour tout fibré inversible hermitien $\overline{L}$ sur $\mathscr{X}$, il existe deux nombres réels $a, \lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n \geq \lambda D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{E}^\vee \otimes \overline{L}^{\otimes D})) > e^{an}$.

Proposition 3.2.11 *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) pour tout fibré inversible hermitien $\overline{L}$ et tout fibré vectoriel hermitien $\overline{F}$ sur $\mathscr{X}$ il existe deux nombres réels $a, \lambda > 0$ tel que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n \geq \lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{E}^\vee \otimes \overline{L}^{\otimes D} \otimes \overline{F})) > e^{an};$$

2) $\overline{E}$ est faiblement positif ;

3) il existe un fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ arithmétiquement ample sur $\mathscr{X}$, deux nombres $a, \lambda > 0$ tels que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n \geq \lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{E}^\vee \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) > e^{an}.$$

Démonstration. "1)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$3)" sont triviaux.

"3)$\Longrightarrow$1)" : D'après les lemmes 3.2.2 et 3.2.3, il existe trois entiers $p, q, r \geq 1$ ainsi que deux homomorphismes injectifs $\varphi : F \to (\mathscr{L}^{\otimes p})^{\oplus r}$ et $\psi : L \to \mathscr{L}^{\otimes q}$ tels que $\max_{\sigma \in \Sigma_\infty} \|\varphi_K\|_{\sigma,\sup} < 1$ et $\max_{\sigma \in \Sigma_\infty} \|\psi_K\|_{\sigma,\sup} < 1$. Pour tout entier $D \geq 1$ on a un homomorphisme injectif $\phi_D = \psi^{\otimes D} \otimes \varphi$ de $L^{\otimes D} \otimes F$ vers $(\mathscr{L}^{\otimes(Dq+p)})^{\oplus r}$ tel que $\max_{\sigma \in \Sigma_\infty} \|\phi_{D,K}\|_{\sigma,\sup} < 1$. D'après 3) il existe $a, \lambda > 0$ tels que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait $\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{E}^\vee \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes(Dq+p)})) > e^{an}$. Par conséquent, on a $\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{E}^\vee \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes(Dq+p)})^{\oplus r}) > e^{an}$. Comme $\max_{\sigma \in \Sigma_\infty} \|\phi_{D,K}\|_{\sigma,\sup} < 1$, on sait que $\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{E}^\vee \otimes \overline{L}^{\otimes D} \otimes \overline{F})) > e^{an}$. □

Lemme 3.2.12 *Soit $p : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ un schéma projectif et plat sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{Y}_K$ soit lisse sur* Spec K *et équidimensionnel de dimension d. Soit de plus $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{Y}$ tel que L soit ample relativement à p et tel que, pour chaque point $y \in \mathscr{X}(\mathbb{C})$, $c_1(\overline{L}|_{p^{-1}(y)})$ soit strictement positive. Alors il existe un fibré inversible hermitien $\overline{M}$ sur $\mathscr{X}$ tel que $\overline{L} \otimes p^*(\overline{M})$ soit arithmétiquement ample.*

Démonstration. Comme $\mathscr{X}$ est projectif sur Spec $\mathcal{O}_K$, il existe un fibré inversible hermitien $\overline{M}_1$ tel que M_1 soit ample et tel que $c_1(\overline{M}_1)$ soit strictement positive. Après torsion de $\overline{L}$ par une puissance tensorielle de $p^*\overline{M}_1$ on peut supposer que $\overline{L}$ soit ample et que $c_1(\overline{L})$ soit strictement positive. Comme L est ample, il existe une puissance $L^{\otimes n}$ de L qui est engendrée par ses sections au-dessus de $\mathscr{Y}$. Plus précisément, il existe m sections $(s_i)_{1 \leq i \leq m}$ de $\overline{L}^{\otimes n}$ sur $\mathscr{Y}$ tel que l'homomorphisme $(s_i)_{1 \leq i \leq m} : \mathcal{O}_{\mathscr{Y}}^{\oplus m} \longrightarrow L^{\otimes n}$ soit surjectif. On désigne par h la métrique hermitienne sur $L^{\otimes n}$ qui provient de la métrique de $\overline{L}$. Si $a > 0$ est un nombre réel, on désigne par h_a la métrique hermitienne sur $L^{\otimes n}$ qui provient de la métrique de $\overline{L} \otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathscr{X}}, \|\cdot\|_a)$, où $\|1_x\|_a = a$ pour tout $x \in \mathscr{X}(\mathbb{C})$. On a la relation $\|s_x\|_{h_a} = a^n \|s_x\|_h$ pour tout section s de $L^{\otimes n}$. En choisissant un a assez petit, on a $\|s_i\|_{\sup,h_a} < 1$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Cela montre que $(\overline{L} \otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathscr{X}}, \|\cdot\|_a))^{\otimes n}$ est engendré par des sections strictement effectives. La remarque 1.7.24 montre que le fibré vectoriel hermitien $\overline{L} \otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathscr{X}}, \|\cdot\|_a)$ est arithmétiquement ample.
□

Remarque 3.2.13 Le lemme 3.2.12 montre en particulier que sur $\mathscr{X}$ il existe un fibré inversible arithmétiquement ample. En effet, comme le morphisme $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est projectif, il existe un faisceau inversible ample L sur $\mathscr{X}$. Par conséquent, pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, L_σ est un faisceau inversible ample sur $\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})$. En remplaçant L par l'une de ses puissances tensorielles on peut supposer que L soit très ample. On choisit un produit hermitien quelconque sur $E = H^0(\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C}), L_\sigma)$. L'image réciproque de la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}(E)$ par le plongement canonique de $\mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}(E)$ donne une métrique hermitienne strictement positive sur L_σ. Enfin, si on applique le lemme 3.2.12 au morphisme $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on sait qu'il existe un fibré inversible hermitien $\overline{M}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ tel que $\pi^*\overline{M} \otimes \overline{L}$ soit arithmétiquement ample.

Proposition 3.2.14 *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. On désigne par $\overline{L}$ le fibré inversible $\mathcal{O}_{E^\vee}(-1)$ sur $\mathbb{P}(E^\vee)$, muni de la métrique duale de la métrique de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_{E^\vee}(1)$. Alors $\overline{E}$ est faiblement positif sur $\mathscr{X}$ si et seulement si $\overline{L}$ est faiblement positif sur $\mathbb{P}(E^\vee)$.*

Démonstration. On désigne par $p : \mathscr{P} := \mathbb{P}(E^\vee) \to \mathscr{X}$ le morphisme canonique et par r le rang de E.

"$\Longleftarrow$" : On suppose que $\overline{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible hermitien. Comme $\overline{L}$ est faiblement positif, il existe deux nombres $a, \lambda > 0$ tels que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait

$$\varepsilon((\pi p)_*(\overline{L}^{\vee \otimes n} \otimes p^*(\overline{M})^{\otimes D}) > e^{an}.$$

Par conséquent

$$\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{E}^\vee \otimes \overline{M}^{\otimes D})) = \binom{n+r-1}{n}^{\frac{1}{2}} \varepsilon((\pi p)_*(\overline{L}^{\vee \otimes n} \otimes p^*(\overline{M})^{\otimes D}) > e^{an}.$$

"$\Longrightarrow$" : Le faisceau $L^\vee = \mathcal{O}_{\mathscr{P}}(1)$ est ample relativement à p. De plus, la métrique de Fubini-Study sur $L^\vee$ est strictement positive sur les fibres. Par conséquent, il existe un fibré vectoriel hermitien $\overline{M}$ sur $\mathscr{X}$ tel que $\overline{\mathscr{L}} := \overline{L}^\vee \otimes p^*(\overline{M})$ soit arithmétiquement ample (cf. le lemme 3.2.12).

Comme E est faiblement positif, il existe deux nombre réels $a, \lambda > 0$ tels que, pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $n > \lambda D$, on ait

$$\varepsilon(\pi_*(S^n\overline{E}^\vee \otimes \overline{M}^{\otimes D})) > e^{an}.$$

Autrement dit,

$$\varepsilon((\pi p)_*(\overline{L}^{\vee \otimes n} \otimes p^*(\overline{M})^{\otimes D})) = \varepsilon((\pi p)_*(\overline{L}^{\vee \otimes (n-D)} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) > e^{an}\binom{n+r-1}{n}^{-\frac{1}{2}}.$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > n_0$, on ait

$$e^{an}\binom{n+r-1}{n}^{-\frac{1}{2}} > 1.$$

Soit $\lambda' = \max(n_0, \lambda)$, alors pour tout entier $D > \lambda'$ et $n > \lambda' D$ on a

$$\varepsilon((\pi p)_*(\overline{L}^{\vee \otimes n} \otimes \overline{\mathscr{L}}^{\otimes D})) > 1.$$

Donc $\overline{L}$ est faiblement positif. □

Théorème 3.2.15 *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathscr{X}$. Si $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}^{\vee}) < 0$, alors $\overline{E}$ est faiblement positif. La réciproque est vraie lorsque $E_K^{\vee}$ est ample.*

Démonstration. Soient $p : \mathbb{P}(E^{\vee}) \to \mathscr{X}$ le morphisme canonique et $\overline{L}$ le fibré inversible $\mathcal{O}_{E^{\vee}}(-1)$ muni de la métrique duale de celle de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_{E^{\vee}}(1)$.

"$\Longrightarrow$" : Comme $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}^{\vee}) = \widehat{\mu}^{\pi p}_{\max}(\overline{L}^{\vee}) < 0$ le fibré inversible hermitien $\overline{L}$ est faiblement positif, donc il en est de même de $\overline{E}$.

"$\Longleftarrow$" : Si $\overline{E}$ est faiblement positif, il en est de même de $\overline{L}$. D'autre part, si $E_K^{\vee}$ est ample, alors $L_K^{\vee}$ est aussi ample. D'après le théorème 3.2.7 on sait que $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{E}^{\vee}) = \widehat{\mu}^{\pi p}_{\max}(\overline{L}^{\vee}) < 0$. □

3.3 Étude du problème d'algébricité via les modèles sur les entiers

On reprend les notations du paragraphe §1.8 en supposant les conditions suivantes :

1) K est un corps de nombres ;
2) Λ est le spectre de l'anneau des entiers algébrique $\mathcal{O}_K$;
3) $\mathscr{X}_K$ et $\mathscr{Y}_K$ sont des schémas intègres et lisses sur $\operatorname{Spec} K$, et $\mathscr{X}(\mathbb{C})$ et $\mathscr{Y}(\mathbb{C})$ sont munis de formes volumes positives invariantes par conjugaison ;
4) L et N sont munis de métriques hermitiennes ;
5) les espaces vectoriels $E_{D,\sigma}$ sont munis de métriques hermitiennes, qui induisent des métriques "sous-quotient" sur $(E_D^i/E_D^{i+1})_{\sigma}$.

On obtient donc des fibrés vectoriels hermitiens $\overline{\mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1}}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$.

Proposition 3.3.1 *S'il existe trois nombres λ, a, et A dans $\mathbb{R}_{>0}$ tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1) pour tout entier $D > \lambda$ et tout entier $i > \lambda D$ on a $\widehat{\mu}(\overline{\mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1}}) < -ai$,

2) pour tout entier $D > 0$ et tout entier $i \le \lambda D$ on a $\widehat{\mu}(\overline{\mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1}}) \le AD$,

alors $\widehat{V}$ est algébrique.

Démonstration. La démonstration est la même que celle de la proposition 2.3.5. □

Remarque 3.3.2 Sur l'espace E_D on a une métrique hermitienne "canonique" — celle de L^2, mais rien ne nous empêche d'obtenir la proposition 3.3.1 si nous prenons une métrique hermitienne générale sur E_D.

Grâce à l'inégalité de pentes on peut ramener la vérification des conditions dans la proposition 3.3.1 à l'étude de la "négativité" des fibrés vectoriels hermitiens $\overline{(\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1})|_{\mathscr{Y}}}$, où les structures hermitiennes proviennent de celles de $\overline{L}$ et de $\overline{N}$. Une difficulté nouvelle par rapport au cas géométrique est que la hauteur de l'homomorphisme d'évaluation γ_D^i intervient dans la majoration. Plus précisément, on a l'inégalité pour tout $(i, D) \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{\mu}(\overline{\mathscr{E}_D^i/\mathscr{E}_D^{i+1}}) \le \mu_{\max}((\pi\bar{\varphi}_0)_*(\overline{\mathscr{L}}|_{\mathscr{Y}}^{\otimes D} \otimes \overline{(\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1})|_{\mathscr{Y}}})) + h(\gamma_D^i). \tag{3.7}$$

Proposition 3.3.3 *On suppose que les E_D soient munis de métriques hermitiennes de L^2. Si, pour un plongement $\sigma \in \Sigma_\infty$, le sous-schéma formel $\widehat{V}_\sigma$ de $\widehat{X_{\sigma Y_\sigma}}$ est défini par un germe de sous-variétés analytiques (lisses) autour de $Y_\sigma(\mathbb{C})$ dans $X_\sigma(\mathbb{C})$, alors il existe des réels α et β tels que, pour tout couple d'entiers naturels (i, D), on ait*

$$\log \|\gamma_D^i\|_\sigma \leq \alpha D + \beta i.$$

Démonstration. Soient d la dimension de $\mathscr{X}_K$ et d_0 la codimension de $\mathscr{Y}_K$ dans $\mathscr{X}_K$. Soit $\sigma : K \to \mathbb{C}$ un plongement. Pour tout point $y \in \mathscr{Y}_\sigma(\mathbb{C})$ soit $\Gamma_{D,y}^i$ l'homomorphisme canonique de E_D^i vers $L_y^{\otimes D} \otimes S^i N_y^\vee$. Ce dernier est muni de la métrique hermitienne qui provient des structures hermitiennes de L et de N. Soit $\varphi : D(0; R'_y) \to \mathscr{X}(\mathbb{C})$ une carte locale qui envoie 0 en y, où $D(0; R'_y) = B(0; R'_y)^d \subset \mathbb{C}^d$ est le produit direct de disques ouverts de rayon R'_y. Soit $0 < R_y < R'_y$ un nombre réel. On désigne par $z_1, \cdots, z_d$ les coordonnées de cette carte locale et on suppose que dans la carte locale φ, la sous-variété $\mathscr{Y}(\mathbb{C})$ est déterminée par l'annulation des premières d_0 coordonnées. On suppose de plus que dans cette carte locale, le fibré L se trivialise via la section s_0. Localement une section s dans $E_{D,\mathbb{C}}$ s'écrit de la forme $fs_0^{\otimes D}$, où f est une fonction analytique sur $D(0; R_y)$. D'autre part, si la section s est dans $E_{D,\mathbb{C}}^i$, alors localement l'homomomrphisme $\Gamma_{D,y}^i$ envoie $fs_0^{\otimes D}$ en

$$\sum_{\substack{I=(a_j)\in\mathbb{N}^{d_0},\\ |I|=i}} \left[\frac{\partial^i}{\partial z_1^{a_1}\cdots\partial z_{d_0}^{a_{d_0}}} f(0)\right] \frac{z_1^{a_1}}{a_1!}\cdots\frac{z_{d_0}^{a_{d_0}}}{a_{d_0}!} \otimes s_{0,y}^{\otimes D}.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy, il est possible d'estimer la norme de l'application $\Gamma_{D,y}^i$ (cf. [10] [21]). En effet, d'après la formule de Cauchy (cf [26] chap. I (3.8)), on a pour tout $I = (a_j)_{1\leq j\leq d_0} \in \mathbb{N}^{d_0}$

$$I!^{-1}\frac{\partial^i}{\partial z_1^{a_1}\cdots\partial z_{d_0}^{a_{d_0}}} f(0, w) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{D(0,R_y)} \frac{f(z_1,\cdots,z_{d_0},w)}{z_1^{a_1+1}\cdots z_{d_0}^{a_{d_0}+1}} dz_1\cdots dz_{d_0},$$

où par définition $I! = a_1!\cdots a_{d_0}!$. D'où

$$I!^{-1}|\partial^I f(0)| \leq \frac{1}{R_y^i}\sup_{\substack{\forall 1\leq j\leq d_0,\\ |z_j|\leq R_y}} |f(z_1,\cdots,z_{d_0},0)| \leq \frac{1}{R_y^i}\sup_{z\in D(0;R_y)}|f(z)|.$$

Si on note $\alpha_y = \sup\limits_{1\leq j\leq d_0} \|z_j\|_{N_y^\vee}$, alors

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{D,y}^i(f\otimes s_0^{\otimes D})\| &\leq \|s_{0,y}\|_{L_y}^D\left(\frac{\alpha_y}{R_y}\right)^i \sup_{z\in D(0;R_y)}|f(z)| \\ &\leq \left(\frac{\|s_{0,y}\|_{L_y}}{\inf\limits_{z\in D(0;R_y)}\|s_{0,\varphi(z)}\|_{L_{\varphi(z)}}}\right)^D \left(\frac{\alpha_y}{R_y}\right)^i \|s\|_{\sigma,\sup}.\end{aligned}$$

Comme $\mathscr{Y}_\sigma(\mathbb{C})$ est compact, on sait qu'il existe deux constantes A_1 et B_1 telles que, pour toute section $s \in E_D^i$ et tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$, on ait

$$\|\gamma_D^i(s)\|_{\sigma,\sup} \leq A_1^D B_1^i \|s\|_{\sigma,\sup}.$$

D'après la comparaison de la norme $\|\cdot\|_{\sup}$ et la norme L^2 (la proposition 1.7.17), il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$\log \|\gamma_D^i\|_\sigma \leq \alpha D + \beta i. \tag{3.8}$$

□

Proposition 3.3.4 *On suppose que pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, le sous-schéma formel $\widehat{V_\sigma}$ de $\widehat{X_{\sigma Y_\sigma}}$ soit défini par un germe de sous-variétés analytiques lisses autours de $Y_\sigma(\mathbb{C})$ dans $X_\sigma(\mathbb{C})$. Si de plus $\widehat{V}$ se prolonge en un sous-schéma formel $\widehat{\mathscr{V}}$ du complété formel $\widehat{\mathscr{X}_\mathscr{Y}}$ tel que $\mathscr{Y}$ soit régulièrement immergé dans $\widehat{\mathscr{V}}$, alors la condition 2) de la proposition 3.3.1 est satisfaite.*

Démonstration. Soit $\mathscr{N} = N_\mathscr{Y}\widehat{\mathscr{V}}$. D'après l'hypothèse on sait que $\overline{(\mathscr{I}_i/\mathscr{I}_{i+1})|_\mathscr{Y}} = S^i\overline{\mathscr{N}}^\vee$. Donc pour tout place finie $\mathfrak{p}$ et tout paire d'entiers naturels (i,D), on a $\|\gamma_D^i\|_\mathfrak{p} \leq 1$. Soit $\mathscr{P} = \mathbb{P}(\mathscr{N}^\vee)$ et $\overline{\mathscr{M}}$ le fibré inversible canonique sur $\mathscr{P}$, muni de la métrique de Fubini-Study. On désigne par $p : \mathscr{P} \to \mathscr{Y}$ le morphisme canonique. Il existe une constante $b > 0$ tel que, pour tout $(i,D) \in \mathbb{N}^2$,

$$\widehat{\mu}_{\max}((\pi|_\mathscr{Y} p)_*(p^*\overline{\mathscr{L}}|_\mathscr{Y}^{\otimes D} \otimes \overline{\mathscr{M}}^{\otimes i})) \leq b(i+D). \tag{3.9}$$

En effet, on peut plonger de façon effective les fibrés inversibles hermitiens $p^*\overline{\mathscr{L}}|_\mathscr{Y}$ et $\overline{\mathscr{M}}$ dans le même fibré inversible hermitien arithmétiquement ample. L'inégalité (3.9) résulte donc du lemme 3.1.2.

La comparaison de la métrique de Fubini-Study et la métrique produit symétrique (1.16) montre que

$$\widehat{\mu}_{\max}((\pi|_\mathscr{Y})_*(\overline{\mathscr{L}}|_\mathscr{Y}^{\otimes D} \otimes S^i\overline{\mathscr{N}}^\vee) \leq b(i+D) + \log\binom{i+d_0-1}{i}.$$

Par conséquent, on sait qu'il existe une constante $A > 0$ tel que, pour tout entier $D > 0$ et tout entier $i \leq \lambda D$, on ait

$$\widehat{\mu}_{\max}((\pi|_\mathscr{Y})_*(\overline{\mathscr{L}}|_\mathscr{Y}^{\otimes D} \otimes S^i\overline{\mathscr{N}}^\vee) \leq AD.$$

La condition 2) de la Proposition 3.3.1 résulte donc de la majoration (3.7) et (3.8). □

Lemme 3.3.5 *Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{B(0,R)} \subset \mathbb{C}^n$ qui admet comme développement de Taylor à l'origine $f(z) = \sum_I a_I z^I$. Si la fonction f s'annule d'ordre au moins i en 0, alors*

$$\frac{1}{\lambda(B(0,R))}\int_{B(0,R)} |f(z)|^2 dz \geq \frac{n}{2i+n} R^{2i} \|j^i f\|_{\mathrm{FS}}^2, \tag{3.10}$$

$$\log \sup_{z \in B(0,R)} |f(z)| \geq i \log R + \frac{1}{2}\log\frac{n}{2i+n} + \log \|j^i f\|_{\mathrm{FS}}^2. \tag{3.11}$$

Démonstration. Pour tout nombre complexe t tel que $|t| \leq 1$ soit $f_t(z) = \sum_I a_I t^{|I|-i} z^I$. Alors l'intégrale

$$\int_{B(0,R)} |f_t(z)|^2 d\lambda(z)$$

est sous-harmonique sur $\{t \in \mathbb{C} \,\big|\, |t| < 1\}$. Comme $f_1 = f$ et $f_0 = j^i f$, on déduit que

$$\frac{1}{\lambda(B(0,R))}\int_{B(0,R)} |f(z)|^2 d\lambda(z) \geq \frac{1}{\lambda(B(0,R))}\int_{B(0,R)} |j^i f(z)|^2 d\lambda(z).$$

Pour tout nombre réel $0 < r \leq R$, soit σ_r la mesure de Lebesgue sur $\partial B(0,r)$. On a $d\sigma_r = r^{n-1}d\sigma_1$ et $d\sigma_1 = \sigma_1(\partial B(0,1))d\sigma$, où σ est la mesure de probabilité U_n-invariante sur le cercle unité $\partial B(0,1)$. On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda(B(0,R))}\int_{B(0,R)} |j^i f(z)|^2 d\lambda(z) = \Big(\int_0^R dr\int_{\partial B(0,r)} d\sigma_r\Big)^{-1}\Big(\int_0^R dr\int_{\partial B(0,r)} |j^i f(z)|^2 d\sigma_r\Big)\\
&= \Big(\int_0^R r^{n-1}\sigma_1(\partial B(0,1))dr\Big)^{-1}\Big(\int_0^R dr\int_{\partial B(0,1)} r^{2i}|j^i f(z)|^2 r^{n-1}\sigma_1(\partial B(0,1))d\sigma\Big)\\
&= \Big(\int_0^R r^{n-1}dr\Big)^{-1}\Big(\int_0^R r^{2i+n-1}dr\int_{\partial B(0,1)} |j^i f(z)|^2 d\sigma\Big) = nR^{-n}\|j^i f\|_{\mathrm{FS}}^2\int_0^R r^{2i+n-1}dr\\
&= \frac{n}{2i+n}R^{2i}\|j^i f\|_{\mathrm{FS}}^2.
\end{aligned}$$

On obtient donc (3.10). Enfin, si on compare l'inégalité

$$\frac{1}{\lambda(B(0,R))}\int_{B(0,R)} |f(z)|^2 d\lambda(z) \leq \sup_{z\in B(0,R)} |f(z)|^2$$

et l'inégalité (3.10), on obtient (3.11). □

Lemme 3.3.6 *Soient $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ un polynôme sur $\mathbb{C}$ et $R > 0$ un nombre réel. On a pour tout $1 \leq i \leq n$*

$$|a_i| \leq \sup_{|z|\leq R} |P(z)|\frac{1}{R^i}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la formule de Cauchy :

$$a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|\zeta|=R}\frac{P(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

□

Corollaire 3.3.7 *Soit φ un élément dans $\mathbb{Z}[\![T_1,\cdots,T_n]\!]$ qui définit une fonction méromorphe sur un voisinage de la boule fermée $\overline{B(0;R)}$ de $\mathbb{C}^n$, où $R > \sqrt{n}$, alors φ est rationnel.*

Démonstration. Soient $X = \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Proj}\mathbb{Q}[X_0,\cdots,X_n,Z]$ et $P : \operatorname{Spec}\mathbb{Q} \to X$ un point rationnel (de coordonnés $(1:0:\cdots:0)$). Le schéma formel $\widehat{X}_P$ s'identifie au spectre formel de l'anneau topologique[1] $\widehat{\mathcal{O}}_P \cong \mathbb{Q}[\![T_1,\cdots,T_n,Y]\!]$. L'élément φ définit un sous-schéma formel fermé $\widehat{V}$ de $\widehat{X}_P$ d'idéal $(Y - \varphi(T_1,\cdots,T_n))$. Le schéma formel $\widehat{V}$, qui est isomorphe à $\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathbb{Q}}$, peut être considéré comme le "graphe formel" de φ.

On prend un modèle entier $\mathscr{X} = \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Z}}$ de X et on désigne par $\mathscr{P} : \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \to \mathscr{X}$ la section qui prolonge P. Comme φ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, le schéma formel $\widehat{V}$ se prolonge en un sous-schéma formel $\widehat{\mathscr{V}}$ de $\widehat{\mathscr{X}_{\mathscr{P}}}$ qui est isomorphe à $\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathbb{Z}}$.

[1]en posant $T_i = X_i/X_0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $Y = Z/X_0$.

Soient $\mathscr{L}$ le faisceau inversible canonique sur $\mathscr{X} = \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{Z}}$ et $L = \mathscr{L}_{\mathbb{Q}}$. On suppose que $L_{\mathbb{C}}$ soit muni de la métrique de Fubini-Study. Soient $\mathscr{N} = N_{\mathscr{P}}\widehat{\mathscr{V}}$ et $N = \mathscr{N}_{\mathbb{Q}} = N_P\widehat{V}$. D'après la définition, $N^{\vee}$ est un espace vectoriel de rang n sur $\mathbb{Q}$, engendré par $T_1, \cdots, T_n$. On munit $N_{\mathbb{C}}$ de la métrique hermitien de sorte que $T_1, \cdots, T_n$ forment une base orthonormée.

Pour tout entier $D \geq 1$ soit

$$\mathscr{E}_D = \pi_*(\mathscr{L}^{\otimes D}) = \mathbb{Z}[X_0, \cdots, X_n, Z]_D \cong \mathbb{Z}[T_1, \cdots, T_n, Y]_{\leq D}$$

et soit $E_D = \mathscr{E}_{D,\mathbb{Q}}$. On utilisera les notations du paragraph §1.8. L'espace E_D^i s'identifie au sous-espace de $\mathbb{Q}[T_1, \cdots, T_n, Y]_{\leq D}$ des polynômes Ψ tels que

$$\Psi(T_1, \cdots, T_n, \varphi(T_1, \cdots, T_n))$$

s'annule en $(0, \cdots, 0)$ à l'ordre au moins i. Soit Ψ un élément dans $E^i_{D,\mathbb{C}}$. L'homomorphisme $\gamma^i_{D,\mathbb{C}}$ envoie Ψ en le jet d'ordre i de $\Psi(T_1, \cdots, T_n, \varphi(T_1, \cdots, T_n))$ en $(0, \cdots, 0)$. Comme φ définit une fonction méromorphe sur un voisinage du boule fermée $\overline{B(0;R)}$, elle sécrit de la forme ϕ/θ, où ϕ et θ sont des fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{B(0;R)}$ et $\theta(0, \cdots, 0) = 1$. En effet, cela résulte de la résolubilité du deuxième problème (ou problème multiplicatif) de Cousin sur le domaine $B(0, R+\varepsilon)$. Grosso modo, si Ω est un ouvert d'une variété analytique complexe, on dit que le deuxième problème de Cousin est résoluble pour Ω si l'application canonique

$$\Gamma(\Omega, \mathscr{M}^{\times}) \to \Gamma(\Omega, \mathscr{M}^{\times}/\mathscr{O}^{\times})$$

est surjectif, où $\mathscr{M}$ (resp. $\mathscr{O}$) est le faisceau d'anneaux des germes de fonctions méromorphes (resp. holomorphes). Il est connu que lorsque le deuxième problème de Cousin est résoluble pour Ω, alors le problème de Poincaré est aussi résoluble, i.e., toute fonction méromorphe sur Ω peut s'écrire comme le quotient de deux fonctions holomorphes. Comme on a des suite exactes :

$$1 \longrightarrow \mathscr{O}^{\times} \longrightarrow \mathscr{M}^{\times} \longrightarrow \mathscr{M}^{\times}/\mathscr{O}^{\times} \longrightarrow 1$$

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathscr{O} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}^{\times} \longrightarrow 1\ ,$$

le deuxième problème de Cousin est résoluble notamment si $H^1(\Omega, \mathscr{O}^{\times}) = 0$ et si $H^2(\Omega, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$. On peut consulter [62] pour une présentation plus détaillée.

On suppose que Ψ s'écrit sous la forme

$$\Psi(T_1, \cdots, T_n, Y) = \sum_{d=0}^{D} \Psi_d(T_1, \cdots, T_n) Y^d,$$

où $\Psi_d \in \mathbb{C}[T_1, \cdots, T_n]_{\leq(D-d)}$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(T_1, \cdots, T_n) :&= \theta(T_1, \cdots, T_n)^D \Psi(T_1, \cdots, T_n, \varphi(T_1, \cdots, T_n)) \\ &= \sum_{d=0}^{D} \Psi_d(T_1, \cdots, T_n)\phi(T_1, \cdots, T_n)^d \theta(T_1, \cdots, T_n)^{D-d}.\end{aligned}$$

est une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{B(0;R)}$. Comme $\theta(0, \cdots, 0) = 1$ et comme la fonction $\Psi(T_1, \cdots, T_n, \varphi(T_1, \cdots, T_n))$ est d'ordre au moins i en l'origin, on obtient

$$\gamma^i_{D,\mathbb{C}}(\Psi) = \frac{1}{I!} \sum_{\substack{I=(a_j)\in\mathbb{N}^n,\\ |I|=i}} \left[\frac{\partial^i}{\partial T_1^{a_1} \cdots \partial T_n^{a_n}} \Phi(0, \cdots, 0)\right] T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n},$$

où $I! = a_1! \cdots a_n!$ pour $I = (a_j)_{1 \le j \le n} \in \mathbb{N}^n$. Autrement dit, $\gamma^i_{D,\mathbb{C}}(\Psi)$ s'identifie au jet d'ordre i de la fonction holomorphe Φ. D'après le lemme 3.3.5, on déduit que

$$\log \|\gamma^i_{D,\mathbb{C}}(\Psi)\|_{\mathrm{FS}} \le \log \sup_{z \in B(0,R)} \|\Phi(z)\| - i \log R - \frac{1}{2}\frac{n}{2i+n}.$$

D'après la comparaison de la métrique produit symétrique et la métrique de Fubini-Study (1.16),

$$\log \|\gamma^i_{D,\mathbb{C}}(\Psi)\| \le \log \sup_{z \in B(0,R)} \|\Phi(z)\| - i \log R - \frac{1}{2}\frac{n}{2i+n} + \log \binom{i+n-1}{i}, \tag{3.12}$$

où la métrique sur $S^i N_{\mathbb{C}}$ est la métrique produit symétrique. De plus, on a la majoration

$$\begin{aligned} \sup_{z \in B(0;R)} |\Phi(z)| &\le \max\Big(\sup_{z \in B(0;R)} |\phi(z)|^D, \sup_{z \in B(0;R)} |\theta(z)|^D \Big) \sup_{\substack{z \in B(0;R) \\ 0 \le d \le D}} \|\Psi_d(z)\| \\ &\le C_1^D C_2 \|\Psi\|_{\sup}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives uniformes pour $\sqrt{n} < R \le \sqrt{n} + 1$, $\|\Psi\|_{\sup}$ est la norme sup pour la métrique de Fubini-Study. En outre, comme φ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, pour toute place finie $\mathfrak{p}$, $h_{\mathfrak{p}}(\gamma^i_D) \le 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{\max}(\mathscr{P}^*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}) \otimes S^i \overline{\mathscr{N}}) &= D\widehat{\deg}(\mathscr{P}^* \overline{\mathscr{L}}) + \widehat{\mu}_{\max}(S^i \overline{\mathscr{N}}) \\ &\le D\widehat{\deg}(\mathscr{P}^* \overline{\mathscr{L}}) + \frac{1}{2} \log \frac{i!}{\Gamma(i/n+1)^n} \ll D\widehat{\deg}(\mathscr{P}^* \overline{\mathscr{L}}) + i \log \sqrt{n}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

D'après l'inégalité des pentes (cf. proposition 1.7.13), combinée avec (3.12), (3.14) et la comparaison de la norme sup à la norme L^2 (cf. le théorème 1.6.6), on obtient que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe deux nombres réels $\lambda, \alpha > 0$ tels que, pour tout entier $D \ge \lambda$ et tout entier $i > \lambda D$, on ait

$$\widehat{\mu}(\overline{\mathscr{E}}^i_D / \overline{\mathscr{E}}^{i+1}_D) \le (\log \sqrt{n} - \log R + \varepsilon) i + \alpha D.$$

D'après la proposition 3.3.1 et la proposition 3.3.4, si $R > \sqrt{n}$, φ est une fonction algébrique. Par conséquent, il existe un polynôme Q à coefficient dans $\mathbb{Z}$ tel que $Q\varphi$ soit holomorphe sur un voisinage de $\overline{B(0,R)}$. On est donc ramené au cas où φ définit une fonction holomorphe sur $\overline{B(0,R)}$. Comme $R > \sqrt{n}$, il existe $r > 1$ tel que $B(0,R)$ contient le polydisque $D(0,r)$. Si on suppose que

$$\varphi(z) = \sum_I a_I z^I,$$

alors d'après la formule de Cauchy,

$$|a_I| \le \frac{1}{r^{|I|}} \sup_{z \in D(0;r)} |\varphi(z)|.$$

Donc a_I s'annule pour $|I|$ suffisamment grand, i.e., φ est un polynôme. □

Remarque 3.3.8 Le corollaire 3.3.7 généralise un résultat de Borel sur la rationalité d'une série formelle à un indéterminé (voir [2] pour une démonstration classique, voir [21] pour une présentation panoramique dans un point de vu Arakelovien dont la démonstration du corollaire

3.3.7 s'inspire). Récemment J.-B. Bost et A. Chambert-Loir ont démontré un théorème fort de rationnalité (d'une série formelle d'un indéterminé) en proposant une condition sur le domaine de mémorphicité (complexe ou p-adique) plus faible que le critère de Borel-Dwork qui implique la rationnalité de la série formelle.

Après avoir terminé la rédaction de ce travail et l'avoir soumis comme thèse, l'auteur a appris que le corollaire 3.3.7 avait été établi antérieurement par Y. André, sous une forme plus générale qui généralise le théorème de Borel-Dwork, dans son ouvrage [3], Chapter VIII.

Remarque 3.3.9 Dans le corollaire 3.3.7, la borne $\sqrt{n}$ est optimale. En effet, toute série de la forme $\displaystyle\sum_{i\geq 0}\varepsilon_i(T_1\cdots T_n)^i$ ($\varepsilon_i\in\{0,1\}$) définit une fonction holomorphe sur la boule ouverte $B(0;R)$. Comme l'ensemble des séries formelles algébriques à coefficients dans $\mathbb{Z}$ forment un ensmble dénombrable (cf. [11] page 410), il existe une suite $(\varepsilon_i)_{i\geq 0}$ constituée en des 0 et des 1 telle que la série $\displaystyle\sum_{i\geq 0}\varepsilon_i(T_1\cdots T_n)^i$ ne soit pas algébrique.

Remarque 3.3.10 Il est possible d'affaiblir la condition dans le corollaire 3.3.7 en demandant que la série φ définissent une fonction méromorphe sur le polydisque $D(0;r)$, où $r>1$. En effet, pour tout entier $i>0$, $S^iN^\vee$ contient une base de la forme $\mathbf{B}_i=(T_1^{\alpha_1}\cdots T_n^{\alpha_n})_{\substack{(\alpha_j)_{j=1}^n\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|=i}}$. Si on choisit la métique hermitien h_0 sur $S^iN^\vee$ de sorte que $\mathbf{B}_i$ soit une base orthonormée, alors $\widehat{\mu}_{\max}(S^i\mathscr{N}^\vee,h_0)=0$. D'autre part, l'inégalité (3.12) devient

$$\log\|\gamma^i_{D,\mathbb{C}}(\Psi)\|_{h_0}\leq\log\sup_{z\in D(0;r)}|\Phi(z)|-i\log r+\frac{1}{2}\log\binom{i+n-1}{n-1}.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon>0$, il existe deux nombres réels λ, $\alpha>0$ tels que, pour tout entier $D>\lambda$ et tout entier $i>\lambda D$, on ait

$$\widehat{\mu}(\overline{\mathscr{E}}^i_D/\overline{\mathscr{E}}^{i+1}_D)\leq(-\log r+\varepsilon)i+\alpha D.$$

Par conséquent, φ est algébrique et donc rationnelle dès que $r>1$. Le même contre-exemple que celui dans la remarque 3.3.9 montre qu'ici la borne 1 est aussi optimale.

Chapitre 4

Filtrations

4.1 Préliminaires sur les filtrations

4.1.1 Filtrations dans une catégorie

Dans ce sous-paragraphe, on donnera la définition de filtrations des objets dans une catégorie et on discutera des constructions de nouvelles filtrations à partir d'une filtration donnée.

On fixe dans ce sous-paragraphe un ensemble non-vide totalement ordonné I. Soit I^* le prolongement de l'ensemble ordonné I obtenu en rajoutant un élément minimal $-\infty$, à savoir, $I^* := I \amalg \{-\infty\}$, et pour tout $i \in I$, $-\infty < i$. L'ensemble totalement ordonné I^* peut être vu comme une catégorie petite dont la classe d'objets est I^* et telle que, pour tout couple d'objets $(i,j) \in (I^*)^2$, $\mathrm{Hom}(i,j)$ soit un singleton (resp. vide) si $i \geq j$ (resp. si $i < j$). On notera u_{ij} l'unique élément de $\mathrm{Hom}(i,j)$ lorsque $i \geq j$. L'ensemble I peut être considéré comme une sous-catégorie pleine de I^*. L'élément $-\infty \in I^*$ est l'objet terminal dans la catégorie I^*.

Si $i \leq j$ sont deux élément dans I^*, l'expression $[i,j]$ (resp. $]i,j[$, $[i,j[$, $]i,j]$) désignera l'ensemble $\{k \in I^* \mid i \leq k \leq j\}$ (resp. $\{k \in I^* \mid i < k < j\}$, $\{k \in I^* \mid i \leq k < j\}$, $\{k \in I^* \mid i < k \leq j\}$).

4.1.2 Filtration d'un objet dans une catégorie, catégorie des filtrations

Définition 4.1.1 Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et X un objet de $\mathcal{C}$. On appelle *I-filtration* de X dans $\mathcal{C}$ tout foncteur $\mathcal{F} : I^* \to \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{F}(-\infty) = X$ et que, pour tout morphisme φ de I^*, $\mathcal{F}(\varphi)$ soit un monomorphisme.

On dit qu'une filtration $\mathcal{F}$ est *exhaustive* si $\varinjlim \mathcal{F}|_I$ existe et si le morphisme $\varinjlim \mathcal{F}|_I \to X$ défini par le système $(\mathcal{F}(u_{i,-\infty}) : X_i \to X)_{i\in I}$ est un isomorphisme. On dit que $\mathcal{F}$ est *séparée* si $\varprojlim \mathcal{F}$ existe et est un objet initial dans $\mathcal{C}$.

Si i est un élément de I, on désigne par $I_{<i}$ (resp. $I_{>i}$) le sous-ensemble de I des éléments strictement plus petits (resp. strictement plus grands) que i. On dit que I est *dense à gauche* (resp. *dense à droite*) en i si $I_{<i}$ (resp. $I_{>i}$) est non-vide et $\sup I_{<i} = i$ (resp. $\inf I_{>i} = i$).

Proposition 4.1.2 *Soit i un élément de I. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) I est dense à gauche en i ;

2) $I_{<i}$ est non-vide et l'ensemble $]j,i[$ est non-vide pour tout $j < i$;

3) $I_{<i}$ *est non-vide et l'ensemble* $]j, i[$ *est infini pour tout* $j < i$.

Démonstration. "1)$\Longrightarrow$2)" : S'il existe $j < i$ tel que $]j, i[= \emptyset$, alors pour tout $k < i$ on a $k \leq j$. Autrement dit, j est un majorant de $I_{<i}$. Comme $i = \sup I_{<i}$, on a $j \geq i$, cela est absurde.

"2)$\Longrightarrow$3)" : Soit $j < i$ un élément dans I. Comme $]j, i[\neq \emptyset$ on peut choisir $j_0 \in]j, i[$. Si on a déja choisi $j_0 < j_1 < \cdots < j_{n-1}$ dans $]j, i[$, comme $]j_{n-1}, i[\neq \emptyset$ il existe un $j_n \in]j_{n-1}, i[$. Par la méthode de récurrence on peut extraire une suite infinie d'éléments dans $]j, i[$. Donc $]j, i[$ est un ensemble infini.

"3)$\Longrightarrow$2)" est trivial.

"2)$\Longrightarrow$1)" : Evidemment i est un majorant de $I_{<i}$. Si j est un majorant de $I_{<i}$ tel que $j < i$, alors on peut trouver un élément $k \in]j, i[$. Cela est absurde puisque $k \in I_{<i}$ et j est un majorant de $I_{<i}$. Par conséquent, tout majorant de $I_{<i}$ est supérieur ou égal à i, i.e., $i = \sup I_{<i}$. □

Par dualité, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 4.1.3 *Soit i un élément de I. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) I *est dense à droite en* i *;*

2) $I_{>i}$ *est non-vide et l'ensemble* $]i, j[$ *est non-vide pour tout* $j > i$ *;*

3) $I_{>i}$ *est non-vide et l'ensemble* $]i, j[$ *est infini pour tout* $i > j$.

On dit que $\mathcal{F}$ est *continue à gauche* (resp. *continue à droite*) en $i \in I$ si I n'est pas dense à gauche (resp. dense à droite) en i ou si la limite projective (resp. inductive) de la restriction de $\mathcal{F}$ en $I_{<i}$ (resp. $I_{>i}$) existe et le morphisme $\mathcal{F}(i) \to \varprojlim \mathcal{F}|_{I_{<i}}$ (resp. $\varinjlim \mathcal{F}|_{I_{>i}} \to \mathcal{F}(i)$) défini par le système $(\mathcal{F}(u_{ij}) : \mathcal{F}(i) \to \mathcal{F}(j))_{j<i}$ (resp. $(\mathcal{F}(u_{ji}) : \mathcal{F}(j) \to \mathcal{F}(i))_{j>i}$) est un isomorphisme. On dit qu'une filtration $\mathcal{F}$ est *continue à gauche* (resp. *continue à droite*) si elle est continue à gauche (resp. continue à droite) en tout élément $i \in I$.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtrations dans $\mathcal{C}$. On appelle *morphisme de filtrations* de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$ toute transformation naturelle de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$. Les filtrations dans $\mathcal{C}$ et les morphismes de filtrations forment une catégorie, notée $\mathbf{Fil}(\mathcal{C})$. C'est une sous-catégorie pleine de la catégorie des foncteurs de I^* vers $\mathcal{C}$. On désigne par $\mathbf{Fil}^g(\mathcal{C})$ (resp. $\mathbf{Fil}^d(\mathcal{C})$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fil}(\mathcal{C})$ des filtrations continues à gauche (resp. continues à droite) dans $\mathcal{C}$.

Soient (X, Y) un couple d'objets de $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) une I-filtration de X (resp. Y). On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est *compatible* aux filtrations $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ s'il existe un morphisme de filtrations $F : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tel que $F(-\infty) = f$. Si un tel morphisme F existe, il est unique puisque les morphismes $\mathcal{G}(i) \to Y$ sont des monomorphiques.

Soit X un objet dans $\mathcal{C}$. Les I-filtrations de X et les morphismes de filtrations valant Id_X en $-\infty$ forment une catégorie, notée $\mathbf{Fil}_X$. On désigne par $\mathbf{Fil}_X^g$ (resp. $\mathbf{Fil}_X^d$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fil}_X$ des filtrations continues à gauche (resp. à droite). La catégorie $\mathbf{Fil}_X$ admet un objet terminal C_X qui envoie tout $i \in I^*$ vers X et tout morphisme de I^* vers Id_X.

Lemme 4.1.4 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *deux morphismes dans $\mathcal{C}$. Si gf est un isomorphisme et si g est monomorphique, alors f et g sont des isomorphismes.*

Démonstration. Soit $h : Z \to X$ un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que $hgf = \mathrm{Id}_X$ et $gfh = \mathrm{Id}_Z$. Comme $gfhg = \mathrm{Id}_Z g = g = g \,\mathrm{Id}_Y$ et comme g est monomorphique on a aussi $fhg = \mathrm{Id}_Y$. Cela montre que f et g sont des isomorphismes. □

Proposition 4.1.5 *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{F}$ une filtration dans $\mathcal{C}$. S'il existe des éléments $i \geq j$ dans I^* tels que $\mathcal{F}(u_{ij})$ soit un isomorphisme, alors pour tout couple d'éléments (i', j') dans I^* tel que $i \geq i' \geq j' \geq j$, le morphisme $F(u_{i',j'})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme $F(u_{i,j}) = F(u_{i',j})F(u_{i,i'})$ est un isomorphisme, le morphisme $F(u_{i',j})$ est aussi un isomorphisme compte tenu du lemme 4.1.4. D'autre part, $F(u_{i',j}) = F(u_{j',j})F(u_{i',j'})$, et, encore d'après le lemme 4.1.4, le morphisme $F(u_{i',j'})$ est un isomorphisme. □

4.1.3 Filtration continue à gauche (à droite) associée à une filtration

On considère les deux conditions suivantes sur une catégorie $\mathcal{C}$:

(**Mon**) Tout système totalement ordonné de monomorphismes dans $\mathcal{C}$ admet une limite projective.

(**Mon***) Tout système totalement ordonné $(X_i \xrightarrow{\alpha_i} X)_{i \in J}$ de sous-objets d'un objet X admet une limite inductive. De plus, le morphisme $\varinjlim X_i \to X$ induit par les morphismes $(\alpha_i)_{i\in J}$ est encore un sous-objet de X.

Proposition 4.1.6 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On suppose vérifiée la condition* (**Mon**) *pour la catégorie $\mathcal{C}$. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, alors le foncteur d'oubli de $\mathbf{Fil}_X^g$ vers $\mathbf{Fil}_X$ admet un adjoint à gauche $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^g$.*

Démonstration. Pour tout $i \in \operatorname{obj} I$ où I est dense à gauche on désigne par $\mathcal{F}^g(i)$ la limite projective de la restriction de $\mathcal{F}$ en $I_{<i}$. Si I n'est pas dense à gauche en $i \in \operatorname{obj} I$, on pose $\mathcal{F}^g(i) = \mathcal{F}(i)$. Enfin, soit $\mathcal{F}^g(-\infty) = X$. Alors $\mathcal{F}^g : I^* \to \mathcal{C}$ est un foncteur. On a une transformation naturelle f de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}^g$ donnée par la propriété universelle de la limite projective. La filtration $\mathcal{F}$ est continue à gauche si et seulement si la transformation naturelle $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^g$ est un isomorphisme.

Si I n'est pas dense à gauche en i, alors $\mathcal{F}^g(i) = \mathcal{F}(i)$. Donc le morphisme canonique $\mathcal{F}^g(i) \to X$ est monomorphique. D'autre part, si $i > j$ et si I n'est pas dense à gauche en j, alors $\mathcal{F}^g(j) = \mathcal{F}(j)$, donc le morphisme $\mathcal{F}^g(i) \to \mathcal{F}^g(j)$ est monomorphique. Si I est dense à gauche en j, alors il existe $l < j$. Comme $\mathcal{F}(i) \to \mathcal{F}(l)$ est monomorphique, le morphisme $\mathcal{F}^g(i) \to \mathcal{F}^g(j) = \varprojlim_{k<j} \mathcal{F}(k)$ est aussi monomorphique. Si I est dense à gauche en i, pour tout $j < i$ on désigne par φ_{ij} le morphisme canonique de $\mathcal{F}^g(i) = \varprojlim_{k<i} \mathcal{F}(k)$ vers $\mathcal{F}(j)$. Si $u, v : Z \to \mathcal{F}^g(i)$ sont deux morphismes tels que $\varphi_{ij}u = \varphi_{ij}v$, alors pour tout $k \in]j, i[$, on a $\varphi_{ik}u = \varphi_{ik}v$ puisque $F(u_{jk})$ est monomorphique. Par conséquent, on a $u = v$ puisque $\mathcal{F}^g(i) = \varprojlim_{j<k<i} \mathcal{F}(k)$. Cela montre que le morphisme canonique $\mathcal{F}^g(i) \to \mathcal{F}(j)$ est monomorphique. Donc $\mathcal{F}^g(i) \to X$ est aussi monomorphique. En outre, si I est dense à gauche en j, alors il existe $k < j$. Comme $\mathcal{F}^g(i) \to \mathcal{F}(k)$ est monomorphique, le morphisme $\mathcal{F}^g(i) \to \mathcal{F}^g(j)$ est aussi monomorphique ; si I n'est pas dense à gauche en j, alors $\mathcal{F}^g(j) = \mathcal{F}(j)$, donc $\mathcal{F}^g(i) \to \mathcal{F}^g(j)$ est monomorphique. On a donc démontré que $\mathcal{F}^g$ est une I-filtration de X.

On a un morphisme canonique de filtrations de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}^g$. Cette construction est fonctorielle par rapport à $\mathcal{F}$ puisque la limite projective est fonctorielle. Si on répète le procédé ci-dessus en remplaçant $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}^g$ on obtient une nouvelle filtration $\mathcal{F}^{gg}$. Si I n'est pas dense à gauche en i, alors $\mathcal{F}(i) = \mathcal{F}^g(i) = \mathcal{F}^{gg}(i)$. Si I est dense à gauche en i, alors pour tout $j < i$ il existe $k \in I$ tel que $j < k < i$. Le composé du morphisme canonique $\mathcal{F}^{gg}(i) \to \mathcal{F}^g(k)$ et du morphisme canonique $\mathcal{F}^g(k) \to \mathcal{F}(j)$ donne un morphisme de $\mathcal{F}^{gg}(i)$ vers $\mathcal{F}(j)$. Ce morphisme ne dépend pas du choix de k puisque I est totalement ordonné. Les morphismes $\mathcal{F}^{gg}(i) \to \mathcal{F}(j)$ induisent un morphisme

$$\mathcal{F}^{gg}(i) \longrightarrow \varprojlim_{j<i} \mathcal{F}(j) = \mathcal{F}^g(i)$$

qui est l'inverse du morphisme canonique $\mathcal{F}^g(i) \to \mathcal{F}^{gg}(i)$. Par conséquent, la transformation naturelle canonique $\mathcal{F}^g \to \mathcal{F}^{gg}$ est un isomorphisme, i.e., $\mathcal{F}^g$ est continue à gauche.

Si $\mathcal{G}$ est une I-filtration continue à gauche de X et si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme, alors φ induit par fonctorialité une transformation naturelle $\widetilde{\varphi}$ de $\mathcal{F}^g$ vers $\mathcal{G}^g$. Par l'isomorphisme $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^g$ on obtient une transformation naturelle $\varphi^g : \mathcal{F}^g \to \mathcal{G}$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}^g \arrow[d, "\varphi^g"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

commute. Pour tout $i \in I$ où I n'est pas dense à gauche, on a $\mathcal{F}(i) = \mathcal{F}^g(i)$, donc $\varphi^g(i) = \varphi(i)$. Si I est dense à gauche en i, alors $\mathcal{F}^g(i) = \varprojlim_{k<i} \mathcal{F}(k)$. Comme le diagramme (4.1) est commutatif, d'après la propriété universelle de la limite projective, le morphisme $\varphi^g(i)$ est unique. Par conséquent, le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^g$ est adjoint à gauche du foncteur d'oubli de $\mathbf{Fil}_X^g$ vers $\mathbf{Fil}_X$. $\square$

Proposition 4.1.7 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On suppose la condition* ($\mathbf{Mon}^*$) *soit vérifiée pour la catégorie $\mathcal{C}$. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, alors le foncteur d'oubli de $\mathbf{Fil}_X^d$ vers $\mathbf{Fil}_X$ admet un adjoint à droite.*

Démonstration. Si I est dense à droite en i, on note $\mathcal{F}^d(i) = \varinjlim_{j>i} \mathcal{F}(j)$, sinon on note $\mathcal{F}^d(i) = \mathcal{F}(i)$. Alors $\mathcal{F}^d$ est un foncteur de I vers $\mathcal{C}$, et on a une transformation naturelle canonique de $\mathcal{F}^d$ vers $\mathcal{F}$. La filtration $\mathcal{F}$ est continue à droite si et seulement si la transformation naturelle $\mathcal{F}^d \to \mathcal{F}$ est un isomorphisme.

Montrons que $\mathcal{F}^d$ est bien une filtration. D'après l'hypothèse ($\mathbf{Mon}^*$), pour tout élément $i \in I$, le morphisme canonique $\mathcal{F}^d(i) \to \mathcal{F}(i)$ est monomorphique. Par conséquent, le morphisme $\mathcal{F}^d(i) \to X$ est monomorphique. En outre, pour tout $j < i$, le morphisme $\mathcal{F}^d(i) \to \mathcal{F}(j)$ est aussi monomorphique. Cela implique que le morphisme $\mathcal{F}^d(i) \to \mathcal{F}^d(j)$ est monomorphique.

Montrons que la filtration $\mathcal{F}^d$ est continue à droite. Il suffit de vérifier que $\mathcal{F}^{dd} \cong \mathcal{F}^d$. Pour les point $i \in I$ où I n'est pas dense à droite, l'égalité est vraie par définition. Si I est dense à droite en i, alors pour tout $j > i$ il existe k tel que $j > k > i$. Le composé du morphisme $\mathcal{F}(j) \to \mathcal{F}^d(k)$ et du morphisme $\mathcal{F}^d(k) \to \mathcal{F}^{dd}(i)$ donne un morphisme de $\mathcal{F}(j)$ vers $\mathcal{F}^{dd}(i)$. Ces morphismes induisent un morphisme $\mathcal{F}^d(i) \to \mathcal{F}^{dd}(i)$ qui est l'inverse du morphisme canonique $\mathcal{F}^{dd}(i) \to \mathcal{F}^d(i)$.

Si $\mathcal{G}$ est une filtration continue à droite et si $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ est un morphisme, alors pour tout i où I est dense à droite on a un morphisme canonique de $\mathcal{G}(i) = \varinjlim_{j>i} \mathcal{G}(j)$ vers $\mathcal{F}^d(i) = \varinjlim_{j>i} \mathcal{F}(j)$. On obtient alors un unique morphisme de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{F}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{F}^d \arrow[d] \\ & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. La proposition est donc démontrée. $\square$

Corollaire 4.1.8 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.*

1) *Sous la condition* (**Mon**)*, le foncteur d'oubli de* $\mathbf{Fil}^g(\mathcal{C})$ *vers* $\mathbf{Fil}(\mathcal{C})$ *admet un adjoint à gauche* $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^g$ *;*
2) *sous la condition* (**Mon***)*, le foncteur d'oubli de* $\mathbf{Fil}^d(\mathcal{C})$ *vers* $\mathbf{Fil}(\mathcal{C})$ *admet un adjoint à droite* $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^d$*.*

4.1.4 Constructions de filtrations

On suppose que la catégorie $\mathcal{C}$ soit à produits fibrés[1]. Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ et si $\mathcal{G}$ est une I-filtration de Y, alors le produit fibré dans la catégorie $\mathbf{Fil}(\mathcal{C})$

$$f^*\mathcal{G} := \mathcal{G} \times_{C_Y} C_X$$

est une I-filtration de X, où C_X (resp. C_Y) est la filtration triviale de X (resp. Y) qui envoie tout $i \in I^*$ en X (resp. Y) et tout morphisme de I^* en Id_X (resp. Id_Y). La filtration $f^*\mathcal{G}$ est appelée l'*image réciproque* de $\mathcal{G}$ par le morphisme f. Comme le produit fibré commute aux limites projectives, le foncteur image réciproque $f^* : \mathbf{Fil}_Y \to \mathbf{Fil}_X$ envoie $\mathbf{Fil}_Y^g$ en $\mathbf{Fil}_X^g$. La projection canonique P de $f^*\mathcal{G}$ vers $\mathcal{G}$ donne un morphisme de filtrations dans $\mathbf{Fil}(\mathcal{C})$ tel que $P(-\infty) = f$. Autrement dit, le morphisme f est compatible aux filtrations $(f^*\mathcal{G}, \mathcal{G})$.

Définition 4.1.9 Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. On appelle *décomposition admissible* de f tout triplet (Z, u, v) de morphismes de $\mathcal{C}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1) Z est un objet de $\mathcal{C}$;
2) u est un morphisme de X vers Z ;
3) v est un monomorphisme de Z vers Y ;
4) $f = vu$.

Si (Z, u, v) et (Z', u', v') sont deux décompositions admissibles de f, on appelle *morphisme de décompositions admissibles* de (Z, u, v) vers (Z', u', v') tout morphisme φ de Z vers Z' tel que $\varphi u = u'$ et que $v = v'\varphi$.

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dr, "v"] \arrow[dd, "\varphi"] & \\
X \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u'"'] & & Y \\
& Z' \arrow[ur, "v'"'] &
\end{tikzcd}$$

Les décompositions admissibles et leurs morphismes forment une catégorie, notée $\mathbf{Dec}(f)$. Si la catégorie $\mathbf{Dec}(f)$ admet un objet initial (Z_0, u_0, v_0), on dit que f a une *image*. Le monomorphisme $v_0 : Z_0 \to Y$ est appelé une *image* de f, ou encore l'*image* de X dans Y par le morphisme f, notée $\operatorname{Im} f$.

[1] C'est à dire, tout système de la forme

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$ admet une limite projective. Dans ce cas-là, pour tout catégorie petite $\mathcal{D}$, la catégorie des foncteurs de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{C}$ est aussi à produits fibrés. En particulier, la catégorie $\mathbf{Fil}(\mathcal{C})$ est à produit fibré.

Définition 4.1.10 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On suppose que tout morphisme dans $\mathcal{C}$ admette une image. Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ et si $\mathcal{F}$ est une filtration de X, on définit une filtration $f_\flat\mathcal{F}$ de Y qui associe à chaque $i \in I^*$ le sous-objet $\mathrm{Im}(f \circ \mathcal{F}(u_{i,-\infty}))$ de Y, appelé l'*image directe faible* de $\mathcal{F}$ par le morphisme f. Si de plus la condition (**Mon**) est vérifiée pour la catégorie $\mathcal{C}$, la filtration $f_*\mathcal{F} := (f_\flat\mathcal{F})^g$ est appelée l'*image directe forte* par f.

On remarque que pour toute filtration $\mathcal{F}$ de X, le morphisme f est compatible aux filtrations $(\mathcal{F}, f_\flat\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}, f_*\mathcal{F})$. D'autre part, $f_\flat$ (resp. f_*) est un foncteur de $\mathbf{Fil}_X$ vers $\mathbf{Fil}_Y$ (resp. $\mathbf{Fil}_Y^g$).

Proposition 4.1.11 *On suppose que la catégorie $\mathcal{C}$ soit à produit fibré et que tout morphisme dans $\mathcal{C}$ admette une image. Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, alors le foncteur f^* : $\mathbf{Fil}_Y \to \mathbf{Fil}_X$ est adjoint à droite du foncteur $f_\flat$.*

Démonstration. Soient $\mathcal{F}$ une filtration de Y, $\mathcal{G}$ une filtration de X et $\tau : \mathcal{G} \to f^*\mathcal{F}$ un morphisme. Pour tout $i \in I$ soient $\varphi_i : \mathcal{F}(i) \to Y$ et $\psi_i : \mathcal{G}(i) \to X$ les morphismes canoniques, et soit $(f_\flat\mathcal{G}(i), u_i, v_i)$ l'image de $\mathcal{G}(i)$ dans Y par le morphisme $f\psi_i$. Comme le morphisme $\varphi_i : \mathcal{F}(i) \to Y$ est monomorphique, il existe un unique morphisme η_i de $f_\flat\mathcal{G}(i)$ vers $\mathcal{F}(i)$ tel que $\varphi_i\eta_i = v_i$ et tel que $\eta_i u_i = \mathrm{pr}_1\,\tau(i)$.

$$\begin{tikzcd}
 & f^*\mathcal{F}(i) \arrow[rr, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dd] & & \mathcal{F}(i) \arrow[dd, "\varphi_i"] \\
\mathcal{G}(i) \arrow[ur, "\tau(i)"] \arrow[rr, "u_i"'] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & f_\flat\mathcal{G}(i) \arrow[ur, "\eta_i"] \arrow[dr, "v_i"] & \\
 & X \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

On a donc une application bijective fonctorielle

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fil}_X}(\mathcal{G}, f^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fil}_Y}(f_\flat\mathcal{G}, \mathcal{F}).$$

□

Corollaire 4.1.12 *On suppose que la catégorie $\mathcal{C}$ soit à produit fibré et que tout morphisme dans $\mathcal{C}$ admette une image. On suppose de plus que la condition* (**Mon**) *soit vérifiée pour la catégorie $\mathcal{C}$. Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, alors le foncteur $f^* : \mathbf{Fil}_Y^g \to \mathbf{Fil}_X$ est adjoint à droite du foncteur f_*.*

Démonstration. Pour toute filtration $\mathcal{F}$ de X et toute filtration $\mathcal{G}$ continue à gauche de Y, on a les bijections canoniques fonctoriels

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fil}_X}(\mathcal{F}, f^*\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fil}_Y}(f_\flat\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fil}_Y^g}(f_*\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

□

4.1.5 Filtrations de longueur finie

Définition 4.1.13 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit qu'une filtration $\mathcal{F}$ de $X \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ est *de longueur finie* s'il existe une partie finie I_0 de I telle que, pour tout $i > j$ avec $I_0 \cap [j, i] = \emptyset$, le morphisme $\mathcal{F}(u_{ij})$ est un isomorphisme. Le sous-ensemble I_0 de I est appelé un *lieu de sauts* de $\mathcal{F}$.

On a plusieurs choix de lieux de sauts. En effet, si I_1 est un sous-ensemble fini quelconque de I et si I_0 est un lieu de sauts de $\mathcal{F}$, alors $I_0 \cup I_1$ est aussi un lieu de saut de $\mathcal{F}$. On désigne par $\mathbf{Fil}_{X,f}$ (resp. $\mathbf{Fil}^g_{X,f}$, $\mathbf{Fil}^d_{X,f}$, $\mathbf{Fil}_f(\mathcal{C})$, $\mathbf{Fil}^g_f(\mathcal{C})$, $\mathbf{Fil}^d_f(\mathcal{C})$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fil}_X$ (resp. $\mathbf{Fil}^g_X$, $\mathbf{Fil}^d_X$, $\mathbf{Fil}(\mathcal{C})$, $\mathbf{Fil}^g(\mathcal{C})$, $\mathbf{Fil}^d(\mathcal{C})$) formée des filtrations de longueur finie.

Remarque 4.1.14 On suppose que $\mathcal{C}$ soit une catégorie à produits fibrés. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{G}$ est une filtration de longueur finie de Y, alors $f^*\mathcal{G}$ est une filtration de longueur finie puisque le produit fibré transforme un isomorphisme en un isomorphisme.

Définition 4.1.15 Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, X un objet de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ une I-filtration de X. On dit que la filtration $\mathcal{F}$ est *localement constante* à gauche (resp. à droite) en $i \in I$ si I n'est pas dense à gauche (resp. à droite) en i ou s'il existe $j < i$ (resp. $j > i$) tel que $\mathcal{F}(u_{ij})$ (resp. $\mathcal{F}(u_{ji})$) soit un isomorphisme, ou, de façon équivalente, tel que $\mathcal{F}(u_{ik})$ (resp. $\mathcal{F}(u_{ki})$) soit un isomorphisme pour tout $k \in [j, i[$ (resp. pour tout $k \in]i, j]$). On dit que la filtration $\mathcal{F}$ est *localement constante* à gauche (resp. à droite) si elle est localement constante à gauche (resp. à droite) en tout $i \in I$.

Proposition 4.1.16 *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, X un objet dans $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ une filtration de longueur finie de X, et I_0 un lieu de saut de $\mathcal{F}$. Pour tout $i \in I \setminus I_0$, la filtration $\mathcal{F}$ est localement constante à gauche et à droite en i.*

Démonstration. Soit $i \in I \setminus I_0$ un élément où I est dense à gauche. Comme I_0 est fini, $I_{<i} \cap I_0$ est aussi un ensemble fini. Soit $j_0 = \max(I_{<i} \cap I_0)$. On a $j_0 < i$, donc l'ensemble $]j_0, i[$ est non-vide (cf. la proposition 4.1.2). Soit $j \in]j_0, i[$. Alors $[j, i] \cap I_0 = \emptyset$, donc $\mathcal{F}(u_{i,j})$ est un isomorphisme. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est localement constante à gauche en i. La démonstration que $\mathcal{F}$ est localement constante à droite en i est similaire. □

Proposition 4.1.17 *Avec les notations de la definition 4.1.15, si la filtration $\mathcal{F}$ est localement constante à gauche (resp. à droite), alors elle est continue à gauche (resp. à droite). La réciproque est vraie lorsque la filtration $\mathcal{F}$ est de longueur finie.*

Démonstration. "$\Longrightarrow$" est triviale.

"$\Longleftarrow$" : On suppose que $\mathcal{F}$ soit une filtration de longueur finie et continue à gauche. Soit I_0 un lieu de sauts de $\mathcal{F}$. Si I est dense à gauche en i, alors il existe un élément $j < i$ dans I tel que $[j, i[\cap I_0 = \emptyset$. Comme $\mathcal{F}$ est continue à gauche en i, $\mathcal{F}(i)$ est la limite projective totalement ordonnée d'isomorphismes. Par conséquent, $\mathcal{F}(u_{ij})$ est un isomorphisme. La démonstration de l'autre assertion est identique. □

Corollaire 4.1.18 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On suppose que la condition* (**Mon**) *(resp.* (**Mon***)*) soit vérifiée pour la catégorie $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{F}$ est une filtration de longueur finie dans $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{F}^g$ (resp. $\mathcal{F}^d$) est aussi de longueur finie.*

Démonstration. Soit I_0 un lieu de sauts. On sait que la filtration $\mathcal{F}$ est continue à gauche en dehors de I_0, donc pour tout $i \in I \setminus I_0$ on a $\mathcal{F}^g(i) = \mathcal{F}(i)$, et si $[j, i]$ est un intervalle de I ne rencontrant pas I_0, alors $\mathcal{F}^g(u_{ij}) = \mathcal{F}(u_{ij})$. Par conséquent, $\mathcal{F}^g$ est de longueur finie, et I_0 est un lieu de sauts de $\mathcal{F}^g$. La démonstration de l'autre assertion est similaire. □

Corollaire 4.1.19 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On suppose que tout morphisme dans $\mathcal{C}$ ait une image. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{F}$ est une filtration de longueur finie de X, alors $f_\flat\mathcal{F}$ est une filtration de longueur finie de Y. Si de plus la condition* (**Mon**) *est vérifiée pour la catégorie $\mathcal{C}$, alors $f_*\mathcal{F}$ est aussi une filtration de longueur finie de Y.*

Remarque 4.1.20 Soient $\mathcal{C}$ une catégorie à objet initial et $\mathcal{F}$ une I-filtration d'un objet X de $\mathcal{C}$. On suppose que $\mathcal{F}$ soit de longueur finie. Alors

1) la filtration $\mathcal{F}$ est séparée si et seulement s'il existe $i_1 \in I$ tel que $\mathcal{F}(i)$ soit un objet initial pour tout $i \geq i_1$;
2) la filtration $\mathcal{F}$ est exhaustive si et seulement s'il existe $i_2 \in I$ tel que $\mathcal{F}(u_{ji})$ soit un isomorphisme pour tous $i \leq j \leq i_2$ dans I^*.

Définition 4.1.21 Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Si F envoie tout monomorphisme de $\mathcal{C}$ en un monomorphisme de $\mathcal{D}$, alors F induit un foncteur $\widetilde{F} : \mathbf{Fil}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Fil}(\mathcal{D})$. Si X est un objet de $\mathcal{C}$ et si $\mathcal{F}$ est une filtration de X, $\widetilde{F}(\mathcal{F})$ est appelée la filtration de $F(X)$ *induite* de $\mathcal{F}$ par le foncteur F.

Remarque 4.1.22 Avec les notations de la definition 4.1.21.

1) Si $\mathcal{F}$ est de longueur finie, alors il en est de même de $\widetilde{F}(\mathcal{F})$.
2) Si $\mathcal{F}$ est localement constante à gauche (resp. à droite), alors il en est de même de $\widetilde{F}(\mathcal{F})$.
3) Si la filtration $\mathcal{F}$ est de longueur finie et exhaustive, alors il en est de même de $\widetilde{F}(\mathcal{F})$.
4) On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ soient à objet initial et que F envoie l'objet initial de $\mathcal{C}$ en celui de $\mathcal{D}$. Si la filtration $\mathcal{F}$ est de longueur finie et séparée, alors il en est de même de $\widetilde{F}(\mathcal{F})$.

4.2 $\mathbb{R}$-filtrations d'un espace vectoriel

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux propriétés particulières des $\mathbb{R}$-filtrations d'un espace vectoriel de rang fini sur un corps. Les références sont [29] et [24].

On fixe dans ce sous-paragraphe un corps K et on désigne par $\mathbf{Vec}_K$ la catégorie des espaces vectoriels sur K. C'est une catégorie abélienne dont les suites exactes sont scindées. Toutes les filtrations dans ce sous-paragraphe sont supposées être des $\mathbb{R}$-filtrations. Si E est un espace vectoriel sur K et si $\mathcal{F}$ est une $\mathbb{R}$-filtration de E, dans la suite, on utilisera souvent le symbole $\mathcal{F}_rE$ (ou même le symbole E_r s'il n'y a aucune ambiguïté) pour le sous-espace $\mathcal{F}(r)$ de E, où $r \in \mathbb{R}$. On rappelle que la filtration $\mathcal{F}$ est séparée (resp. exhaustive) si et seulement si

$$E_{+\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{r\in\mathbb{R}} E_r = \{0\} \quad (\text{resp. } E_{-\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{r\in\mathbb{R}} E_r = E).$$

4.2.1 Fonction indice associée à une filtration

Définition 4.2.1 Soient E un espace vectoriel sur K, $\mathcal{F}$ une $\mathbb{R}$-filtration sur E. Pour tout élément $x \in E$ on appelle *indice de x relativement à $\mathcal{F}$* l'élément $\sup\{r \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}_rE\}$ dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, (où $\sup\emptyset = -\infty$), noté $\lambda_{\mathcal{F}}(x)$ (ou simplement $\lambda(x)$ s'il n'y a aucune ambiguïté),. L'application $\lambda_{\mathcal{F}} : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est appelée la *fonction de l'indice* associée à la filtration $\mathcal{F}$.

Remarque 4.2.2 Avec les notations de la définition 4.2.1, l'ensemble $\{r \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}_rE\}$ est non-vide si et seulement si $\lambda(x) > -\infty$; il est alors ou bien de la forme $]-\infty, \lambda(x)[$, ou bien de la forme $]-\infty, \lambda(x)]$. Les propriétés suivantes de la fonction λ sont immédiates :

1) $\lambda(x) = +\infty$ si et seulement si $x \in E_{+\infty}$;
2) $\lambda(x) = -\infty$ si et seulement si $x \in E \setminus E_{-\infty}$;
3) $\lambda(x) > r$ si et seulement si $x \in \bigcup_{s>r} E_s$;
4) $\lambda(x) \geq r$ si et seulement si $x \in \bigcap_{s<r} E_s$.

Proposition 4.2.3 *Avec les notations de la definition 4.2.1,*
1) si $a \in K^\times$ et si $x \in E$,

$$\lambda(ax) = \lambda(x);$$

2) si x et y sont deux éléments de E,

$$\lambda(x+y) \geq \min(\lambda(x), \lambda(y));$$

3) si x et y sont deux éléments de E tels que $\lambda(x) \neq \lambda(y)$, alors $x + y \neq 0$, et

$$\lambda(x+y) = \min(\lambda(x), \lambda(y)).$$

4) si E est de rang fini, l'image de λ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ de cardinal $\leq \mathrm{rg}_K E + 1$.

Démonstration. 1) Comme $a \in K^\times$, $x \in \mathcal{F}_r E$ si et seulement si $ax \in \mathcal{F}_r E$. Donc

$$\{r \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}_r E\} = \{r \in \mathbb{R} \mid ax \in \mathcal{F}_r E\}.$$

Par conséquent, on a $\lambda(x) = \lambda(ax)$.

2) En effet, on a

$$\{t \mid x+y \in \mathcal{F}_t E\} \supset \{r \mid x \in \mathcal{F}_r E\} \cap \{s \mid y \in \mathcal{F}_s E\}.$$

D'après la remarque 4.2.2, on a

$$\sup\{t \mid x+y \in \mathcal{F}_t E\} \geq \min(\sup\{r \mid x \in \mathcal{F}_r E\}, \sup\{s \mid y \in \mathcal{F}_s E\}),$$

i.e., $\lambda(x+y) \geq \min(\lambda(x), \lambda(y))$.

3) Si $x + y = 0$, alors $x = -y$. D'après 1) on a $\lambda(x) = \lambda(y)$. Cela est absurde. Donc $x + y$ est non-nul. On pourra supposer que $\lambda(x) < \lambda(y)$. Dans ce cas-là pour tout $r \in]\lambda(x), \lambda(y)[$ on a $y \in \mathcal{F}_r E$ mais $x \notin \mathcal{F}_r E$. Par conséquent $x + y \notin \mathcal{F}_r E$, autrement dit $\lambda(x+y) \leq r$. Comme r est arbitraire on obtient $\lambda(x+y) \leq \lambda(x)$. D'après 2) on a l'égalité.

4) Supposons que $x_1, \cdots, x_n$ soient des éléments non-nuls dans E tels que $\lambda(x_1) < \lambda(x_2) < \cdots < \lambda(x_n) < +\infty$. D'après 1) et 3), pour tout $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in K^n \setminus \{0\}$,

$$\lambda(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) = \min\{\lambda(x_i) \mid a_i \neq 0\} < +\infty.$$

Cela montre que $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \neq 0$. Par conséquent, $x_1, \cdots, x_n$ sont linéairement indépendents. Donc $n \leq \mathrm{rg}_K E$. □

On donnera à l'aide de la fonction de l'indice λ des critères numériques pour des conditions sur les filtrations d'espaces vectoriels.

Proposition 4.2.4 *Soit E un espace vectoriel sur K muni d'une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$. Alors la filtration $\mathcal{F}$ est séparée (resp. exhaustive) si et seulement si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ (resp. $x \in E$), $\lambda(x) < +\infty$ (resp. $\lambda(x) > -\infty$).*

Démonstration. 1) Si la filtration est séparée, alors pour tout élément non-nul x de E, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $x \notin \mathcal{F}_r E$, donc $\lambda(x) \le r$. Inversement pour tout élément non-nul $x \in E$ tel que $\lambda(x) < +\infty$, si $\lambda(x) \in \mathbb{R}$, alors $x \notin \mathcal{F}_{\lambda(x)+1} E$, sinon $\lambda(x) = -\infty$ et par définition $x \notin \mathcal{F}_r E$ pour tout $r \in \mathbb{R}$.

2) Si la filtration est exhaustive, alors pour tout élément x de E il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $x \in \mathcal{F}_r E$. Par conséquent, $\lambda(x) \ge r$. Inversement pour tout élément $x \in E$ tel que $\lambda(x) > -\infty$, ou bien $\lambda(x) \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathcal{F}_{\lambda(x)-1} E$, ou bien $\lambda(x) = +\infty$ et $x \in \mathcal{F}_r E$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. □

Soit E un espace vectoriel sur K. On rappelle qu'une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$ sur E est continue à gauche si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}_r E = \mathcal{F}_r^g E = \bigcap_{s<r} \mathcal{F}_s E.$$

Proposition 4.2.5 *Soit E un espace vectoriel sur K muni d'une $\mathbb{R}$-filtration continue à gauche $\mathcal{F}$. Pour tout élément non-nul x de E et tout $r \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{F}_r E$ si et seulement si $\lambda(x) \ge r$.*

Démonstration. Par définition si $x \in \mathcal{F}_r E$ alors $r \le \lambda(x)$. Réciproquement si $\lambda(x) \ge r$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lambda(x) > r - \varepsilon$. Par conséquent $x \in \mathcal{F}_{r-\varepsilon} E$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci montre que

$$x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{r-\varepsilon} E = \mathcal{F}_r E.$$

□

Proposition 4.2.6 *Si E est un espace vectoriel sur K est si $\mathcal{F}$ est une filtration de E, pour tout élément x de E, on a*

$$\lambda_{\mathcal{F}}(x) = \lambda_{\mathcal{F}^g}(x).$$

Démonstration. Comme $\mathcal{F}_r E \subset \mathcal{F}_r^g E$, on a

$$\lambda_{\mathcal{F}}(x) \le \lambda_{\mathcal{F}^g}(x).$$

D'autre part, si $x \in \mathcal{F}_r^g E$, alors pour tout $s < r$ on a $x \in \mathcal{F}_s E$, donc $\lambda_{\mathcal{F}}(x) \ge r$. D'où

$$\lambda_{\mathcal{F}}(x) \ge \lambda_{\mathcal{F}^g}(x).$$

□

Corollaire 4.2.7 *Soient E un espace vectoriel sur K, $\mathcal{F}$ une filtration sur E. Si $\mathcal{F}$ est séparée (resp. exhaustive), il en est de même de $\mathcal{F}^g$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.2.4 et la proposition 4.2.6. □

4.2.2 Image réciproque, image directe faible, image directe forte

On rappelle d'abord quelques résultats obtenus dans le sous-paragraphe 4.1.1 dans la situation considérée ici des $\mathbb{R}$-filtrations d'espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application K-linéaire d'espaces vectoriels sur K. Si $\mathcal{G}$ est une $\mathbb{R}$-filtration de F, alors l'image réciproque de $\mathcal{G}$ par f est donnée par $(f^*\mathcal{G})_rE = f^{-1}(\mathcal{G}_rF)$. Si $\mathcal{F}$ est une $\mathbb{R}$-filtration de E, on sait que l'image directe faible et l'image directe forte de $\mathcal{F}$ par f existent, et on a $(f_\flat\mathcal{F})_rF = f(\mathcal{F}_rE)$, $f_*\mathcal{F} = (f_\flat\mathcal{F})^g$.

On discutera ensuite quelques propriétés particulières des filtrations images réciproques ou images directes (faibles ou fortes).

Proposition 4.2.8 *Soient E un espace vectoriel sur K, $f : E' \to E$ (resp. $\pi : E \to E''$) une application K-linéaire injective (resp. surjective). On suppose que $\mathcal{F}$ soit une $\mathbb{R}$-filtration de E. Alors*

1) si la filtration $\mathcal{F}$ est séparée, il en est de même de $f^*\mathcal{F}$;

2) si la filtration $\mathcal{F}$ est séparée et si E est de rang fini, la filtration $\pi_\flat\mathcal{F}$ est aussi séparée ;

3) si la filtration $\mathcal{F}$ est exhaustive, les filtrations $f^*\mathcal{F}$, $\pi_\flat\mathcal{F}$ et $\pi_*\mathcal{F}$ sont toutes exhaustives.

Démonstration. 1) Si $\mathcal{F}$ est séparée, alors $\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_rE = \{0\}$. Comme f est injectif, on a

$$\bigcap_{r\in\mathbb{R}}(f^*\mathcal{F})_rE' = \bigcap_{r\in\mathbb{R}} f^{-1}(\mathcal{F}_rE) = f^{-1}\Big(\bigcap_{r\in\mathbb{R}} E\Big) = f^{-1}(\{0\}) = \{0\}.$$

Par conséquent, la filtration $f^*\mathcal{F}$ est aussi séparée.

2) Si $\operatorname{rg} E < +\infty$, alors $\lambda_\mathcal{F}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Soit $r_0 = \sup\Big(\lambda_\mathcal{F}(E) \setminus \{\pm\infty\}\Big) < +\infty$. Pour tout nombre réel $r > r_0$ et tout $x \in \mathcal{F}_rE$ on a $\lambda_\mathcal{F}(x) \geq r > r_0$, donc $\lambda_\mathcal{F}(x) = +\infty$, i.e., $x = 0$ puisque la filtration $\mathcal{F}$ est séparée. Par conséquent, $\mathcal{F}_rE = 0$ et $(\pi_\flat\mathcal{F})_rE'' = \pi(\mathcal{F}_rE) = 0$.

3) Comme la filtration sur E est exhaustive, on a $\bigcup_{r\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_rE = E$. Par conséquent,

$$\bigcup_{r\in\mathbb{R}}(f^*\mathcal{F})_rE' = \bigcup_{r\in\mathbb{R}}(E' \cap \mathcal{F}_rE) = E' \cap \Big(\bigcup_{r\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_rE\Big) = E' \cap E = E',$$
$$\bigcup_{r\in\mathbb{R}}(\pi_\flat\mathcal{F})_rE'' = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} \pi(\mathcal{F}_rE) = \pi\Big(\bigcup_{r\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_rE\Big) = \pi(E) = E''.$$

Donc les filtrations $f^*\mathcal{F}$ et $\pi_\flat\mathcal{F}$ sont exhaustives. Enfin, $\pi_*\mathcal{F} = (\pi_\flat\mathcal{F})^g$ est exhaustive d'après le corollaire 4.2.7. □

Proposition 4.2.9 *Soient E et F deux espaces vectoriels de rang fini sur K, $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) une $\mathbb{R}$-filtration de E (resp. F), $\varphi : E \to F$ une application linéaire.*

1) On suppose que φ soit injectif. Si $\mathcal{F} = \varphi^*\mathcal{G}$, alors pour tout $x \in E$, $\lambda_\mathcal{F}(x) = \lambda_\mathcal{G}(\varphi(x))$. La réciproque est vraie lorsque les filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont toutes deux continues à gauche.

2) On suppose que φ soit surjectif. Si $\mathcal{G} = \varphi_*\mathcal{F}$, alors pour tout élément y de F,

$$\lambda_\mathcal{G}(y) = \sup_{x\in\varphi^{-1}(y)} \lambda_\mathcal{F}(x).$$

La réciproque est vraie lorsque les filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont toutes deux continues à gauche.

Démonstration. 1) "$\Longrightarrow$" : Comme $\mathcal{F} = \varphi^*\mathcal{G}$, un élément non-nul $x \in E$ appartient dans E_λ si et seulement si $\varphi(x) \in F_\lambda$, d'où

$$\lambda(x) = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid x \in F_r\} = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \in E_r\} = \lambda(\varphi(x)).$$

"$\Longleftarrow$" : Si $x \in E_r$, alors $\lambda(\varphi(x)) \geq \lambda(x) \geq r$. Donc

$$\varphi(x) \in \bigcap_{s<r} F_s = F_r$$

puisque la filtration sur F est continue à gauche. Inversement si $0 \neq x \in \varphi^{-1}(F_r)$, alors $\lambda(x) = \lambda(\varphi(x)) \geq r$, d'où

$$x \in \bigcap_{s<r} E_s = E_r$$

puisque la filtration sur E est continue à gauche. Par conséquent, on a $E_r = \varphi^{-1}(F_r)$.

2) "$\Longrightarrow$" : Si $x \in E_r$, alors $\varphi(x) \in F_r$, donc $\lambda(\varphi(x)) \geq \lambda(x)$. D'où pour tout $y \in F \setminus \{0\}$

$$\lambda(y) \geq \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \lambda(x).$$

D'autre part, $y \in F_r$ implique que $E_s \cap \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$ pour tout $s < r$. Par conséquent,

$$r \leq \sup_{x \in \varphi^{-1}(x)} \lambda(x),$$

et donc

$$\lambda(y) = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid y \in F_r\} \leq \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \lambda(x).$$

"$\Longleftarrow$" : Pour tout élément non-nul y de F, si $y \in F_r$, alors $\lambda(y) \geq r$, donc

$$\sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \lambda(x) \geq r.$$

Par conséquent, pour tout $s < r$, il existe $x \in \varphi^{-1}(y)$ tel que $\lambda(x) \geq s$. Comme la filtration sur E est continue à gauche, on a $x \in E_s$. Cela implique que

$$y \in \bigcap_{s<r} \varphi(E_s).$$

Inversement si y est un élément non-nul dans $\varphi(E_s)$, alors il existe $x \in E_s$ tel que $y = \varphi(x)$. Donc $\lambda(y) \geq \lambda(x) \geq s$. Cela implique que $y \in F_s$ car la filtration sur F est continue à gauche. Par conséquent,

$$\bigcap_{s<r} \varphi(E_s) \subset \bigcap_{s<r} F_s = F_r.$$

□

4.2.3 Mesure de probabilité associée à une $\mathbb{R}$-filtration

Dans ce sous-paragraphe, K désigne un corps commutatif, toutes les filtrations sont supposées être des $\mathbb{R}$-filtrations d'un espace vectoriel de rang fini sur K (donc de longueur finie).

Probabilité associée à une filtration pour une base

Définition 4.2.10 Soit E un espace vectoriel de rang $0 < n < +\infty$ sur K, muni d'une filtration séparée et exhaustive $\mathcal{F}$. Si $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, on définit une mesure de probabilité sur (la tribu borélienne de) $\mathbb{R}$

$$\mu_{\mathcal{F},\mathbf{e}} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda(e_i)},$$

appelée la *probabilité associée* à la filtration $\mathcal{F}$ et à la base $\mathbf{e}$. S'il n'y a aucune ambiguïté, on note aussi $\mu_{\mathbf{e}}$ au lieu de $\mu_{\mathcal{F},\mathbf{e}}$ pour simplifier les notations.

Remarque 4.2.11 Avec les notations dans la definition 4.2.10, la proposition 4.2.6 montre que $\mu_{\mathcal{F},\mathbf{e}} = \mu_{\mathcal{F}^g,\mathbf{e}}$.

Définition 4.2.12 Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures boréliennes bornées sur $\mathbb{R}$, on dit que μ_1 est *à droite*[2] de μ_2 si pour toute fonction croissante bornée f on a

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_1 \geq \int_{\mathbb{R}} f d\mu_2,$$

noté $\mu_1 \gg \mu_2$. On dit que μ_1 est *strictement à droite* de μ_2 si $\mu_1 \gg \mu_2$ mais $\mu_2 \not\gg \mu_1$.

Si μ_1 est à droite de μ_2, on dit aussi que μ_2 est *à gauche* de μ_1, noté $\mu_2 \ll \mu_1$.

Base maximale, mesure associée à une filtration

Définition 4.2.13 Soit E un espace vectoriel de rang fini sur K, muni d'une filtration séparée et exhaustive $\mathcal{F}$. On dit qu'une base $\mathbf{e}$ de E est *maximale* si pour toute base $\mathbf{e}'$ de E on a $\mu_{\mathbf{e}} \gg \mu_{\mathbf{e}'}$.

Proposition 4.2.14 *Soit E un espace vectoriel de rang fini sur K, muni d'une filtration $\mathcal{F}$ qui est séparée, exhaustive et continue à gauche. Alors une base $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E est maximale si et seulement si pour tout nombre réel r,*

$$\operatorname{card}(\mathbf{e} \cap E_r) = \operatorname{rg} E_r.$$

Démonstration. "$\Longrightarrow$" : Comme $\mathbf{e}$ est une base de E, on a

$$\operatorname{card}(\mathbf{e} \cap E_r) \leq \operatorname{rg} E_r$$

pour tout $r \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un nombre réel r tel que

$$\operatorname{card}(\mathbf{e} \cap E_r) < \operatorname{rg} E_r.$$

Soit E'_r le sous-espace vectoriel de E_r engendré par $\mathbf{e} \cap E_r$, on a $\operatorname{rg} E'_r < \operatorname{rg} E_r$. Donc il existe $e' \in E_r \setminus E'_r$. Comme $\mathbf{e}$ est une base de E, il existe $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in K^n$ tel que

$$e' = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n.$$

[2] C'est aussi équivalent à dire que pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{[r,+\infty[} d\mu_1 \geq \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{[r,+\infty[} d\mu_2.$$

Comme $e' \notin E'_r$, il existe un $1 \leq i \leq n$ tel que $e_i \notin E_r$ et tel que $a_i \neq 0$. Alors

$$\mathbf{e}' = (e_1, \cdots, e_{i-1}, e', e_{i+1}, \cdots, e_n)$$

est une base de E. De plus, comme $e_i \notin E_r$, on a $\lambda(e_i) < r$ puisque la filtration est continue à gauche. D'autre part, comme $e' \in E_r$, on a $\lambda(e') \geq r$. Soit g une fonction croissante telle que

$$g(\lambda(e_i)) < g(\lambda(e')),$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu_{\mathbf{e}'} - \int_{\mathbb{R}} g d\mu_{\mathbf{e}} = \frac{1}{n}(g(\lambda(e')) - g(\lambda(e_i))) > 0.$$

Cela est absurde car $\mathbf{e}$ est maximale.

"$\Longleftarrow$" : Pour tout nombre réel r et toute base $\mathbf{e}'$ de E, on a

$$\operatorname{card}(\mathbf{e}' \cap E_r) = n \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[r,+\infty[} d\mu_{\mathbf{e}'}.$$

Donc, pour tout nombre réel r, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[r,+\infty[} d\mu_{\mathbf{e}'} \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[r,+\infty[} d\mu_{\mathbf{e}}.$$

Soit $I = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_n\}$ un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ tel que $\operatorname{supp} \mu_{\mathbf{e}} \cup \operatorname{supp} \mu_{\mathbf{e}'} \subset I$. Si g est une fonction croissante et bornée, soit

$$g_0(x) = \mathbb{1}_{]-\infty,a_0[} \lim_{y \to -\infty} g(y) + \sum_{i=1}^{n} g(a_{i-1}) \mathbb{1}_{[a_{i-1},a_i[} + \mathbb{1}_{[a_n,+\infty[} g(a_n).$$

C'est une fonction croissante bornée continue à droite telle que

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu_{\mathbf{e}} = \int g_0 d\mu_{\mathbf{e}}, \quad \int_{\mathbb{R}} g d\mu_{\mathbf{e}'} = \int g_0 d\mu_{\mathbf{e}'}.$$

Soit ν la mesure de Lebesgue-Stieljes définie par g_0, c'est-à-dire la mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout $-\infty < a < b < +\infty$, $\nu(]a, b]) = g_0(b) - g_0(a)$. Alors pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$g_0(x) = \int \mathbb{1}_{]-\infty,x]} d\nu + \lim_{y \to -\infty} g(y).$$

D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g d\mu_{\mathbf{e}} = \int_{\mathbb{R}} g_0(x) d\mu_{\mathbf{e}} &= g(a_0) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]-\infty,x]}(r) d\nu d\mu_{\mathbf{e}}(x) \\
&= g(a_0) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[r,+\infty[}(x) d\mu_{\mathbf{e}}(x) d\nu(r) \\
&\geq g(a_0) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[r,+\infty[}(x) d\mu_{\mathbf{e}'}(x) d\nu(r) \\
&= g(a_0) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]-\infty,x]}(r) d\nu d\mu_{\mathbf{e}'} = \int_{\mathbb{R}} g_0 d\mu_{\mathbf{e}'} = \int_{\mathbb{R}} g d\mu_{\mathbf{e}'}.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 4.2.15 *Soit E un espace vectoriel de rang $0 < n < +\infty$ sur K, muni d'une filtration séparée et exhaustive $\mathcal{F}$. Si $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_n)^T$ est une base de E, alors il existe une matrice triangulaire $A \in M_{n\times n}(K)$ avec $\operatorname{diag}(A) = (1, \cdots, 1)$ telle que $A\mathbf{e}$ soit une base maximale de E.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le rang n de E. Si $n = 1$, alors

$$E_r = \begin{cases} E, & r \le \lambda(e_1), \\ 0, & r > \lambda(e_1). \end{cases}$$

Donc on a

$$\operatorname{card}(E_r \cap \{e_1\}) = \operatorname{rg} E_r.$$

Autrement dit, $\mathbf{e}$ est déjà une base maximale.

Traitons le cas où $n > 1$. Soit F l'espace quotient E/Ke_n, muni de la filtration image directe forte. Alors $\widetilde{\mathbf{e}} = ([e_1], \cdots, [e_{n-1}])^T$ est une base de F, où $[e_i]$ est l'image canonique de e_i dans F $(1 \le i \le n-1)$. D'après l'hypothèse de récurrence on sait qu'il existe $\widetilde{A} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(K)$ avec $\operatorname{diag}(\widetilde{A}) = (1, \cdots, 1)$ telle que

$$\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) := \widetilde{A}\widetilde{\mathbf{e}}$$

soit maximale.

Soit $\pi : E \to F$ l'application canonique. Pour tout $1 \le i \le n-1$, choisissons $e'_i \in E$ tel que

$$\lambda(e'_i) = \max_{x \in \pi^{-1}(\alpha_i)} \lambda(x).$$

Cela est toujours possible car la fonction λ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Soit $\mathbf{e}' = (e'_1, \cdots, e'_{n-1}, e_n)^T$. On remarque que $\mathbf{e}'$ s'écrit sous la forme $A\mathbf{e}$, où

$$A = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice triangulaire. Comme $\overrightarrow{\alpha}$ est une base maximale, on a

$$\operatorname{card}(F_r \cap \overrightarrow{\alpha}) = \operatorname{rg} F_r$$

pour tout $r \in \mathbb{R}$. D'autre part, $e'_i \in E_r$ implique $\alpha_i = \pi(e'_i) \in F_r$. D'où

$$\operatorname{card}(\mathbf{e}' \cap E_r) \ge \begin{cases} \operatorname{rg} F_r \ge \operatorname{rg} \pi(E_r) = \operatorname{rg} E_r, & e_n \notin E_r, \\ \operatorname{rg} F_r + 1 \ge \operatorname{rg} \pi(E_r) + 1 = \operatorname{rg} E_r, & e_n \in E_r. \end{cases}$$

Donc on a toujours

$$\operatorname{card}(E_r \cap \mathbf{e}') = \operatorname{rg} E_r,$$

i.e., $\mathbf{e}'$ est une base maximale. □

Remarque 4.2.16 On peut aussi démontrer la proposition 4.2.15 de la manière suivante : L'ensemble des drapeaux complets X de E est muni d'une action transitive de $\mathrm{GL}_n(K)$ et s'identifie à l'espace homogène $\mathrm{GL}_n(K)/B$, où B est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieurement (cf. [20]). La proposition résulte donc de la décomposition de Bruhat[3] d'une matrice inversible qui peut être considérée comme une version intrinsèque de l'élimination gaussienne (cf. [16] chap II, §10, n°13).

[3] Si A est une matrice carrée inversible, alors A peut être décomposée en produit de trois matrices carrée $A = PLU$, où P est une matrice de permutation, L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure.

Corollaire 4.2.17 *Avec les notations de la proposition 4.2.15, il existe toujours une base maximale de E.*

Définition 4.2.18 Soit E un espace vectoriel de rang fini sur K, muni d'une filtration séparée et exhaustive $\mathcal{F}$. Si $E \neq 0$, on appelle *mesure* (de probabilité) associée à $\mathcal{F}$ pour E et on note $\mu_{\mathcal{F},E}$ (ou simplement μ_E s'il n'y a aucune ambiguïté) la mesure de probabilité $\mu_{\mathcal{F},\mathbf{e}}$ sur $\mathbb{R}$, où $\mathbf{e}$ est une base maximale quelconque de E. Si E est l'espace nul, alors μ_E est définie par convention comme la mesure nulle. La proposition 4.2.14 montre que la mesure $\mu_{\mathcal{F},E}$ ne dépend pas du choix de la base maximale $\mathbf{e}$.

Remarque 4.2.19 Soit E un espace vectoriel de rang fini sur K. La donnée d'une $\mathbb{R}$-filtration continue à gauche $\mathcal{F}$ sur E est la même chose que la donnée d'un drapeau

$$E^{(0)} \subsetneq E^{(2)} \subsetneq \cdots \subsetneq E^{(n)}$$

et une suite strictement décroissante $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de nombres réels qui décrit le lieu de sauts. On a

$$\mathcal{F}_r E = \begin{cases} E^{(0)}, & \text{si } r \in]a_1, +\infty[, \\ E^{(i)} & \text{si } r \in]a_{i+1}, a_i], \quad 1 \leq i < n, \\ E^{(n)}, & \text{si } r \in]-\infty, a_n]. \end{cases}$$

La filtration $\mathcal{F}$ est séparée (resp. exhaustive) si et seulement si $E^{(0)} = \{0\}$ (resp. $E^{(n)} = E$). Lorsque $\mathcal{F}$ est séparée et exhaustive, la mesure associée à $\mathcal{F}$ pour E est égale à

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{rg} E^{(i)} - \operatorname{rg} E^{(i-1)}}{\operatorname{rg} E} \delta_{a_i}.$$

Remarque 4.2.20 Soit E un espace vectoriel de rang fini et non-nul sur K, muni d'une $\mathbb{R}$-filtration séparée, exhaustive et continue à gauche $\mathcal{F}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité

$$1 - \frac{\operatorname{rg} E_x}{\operatorname{rg} E} = \mu_E(]-\infty, x[).$$

La fonction de répartition de la distribution μ_E est donc

$$F(x) = \lim_{y \to x+} 1 - \frac{\operatorname{rg} E_y}{\operatorname{rg} E}.$$

Proposition 4.2.21 *Soit*

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte d'espaces vectoriels de rang finie munis des $\mathbb{R}$-filtrations continues à gauche. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

i) l'espace E est non-nul et la filtration de E est séparée et exhaustive ;

ii) la filtration de E' est l'image réciproque par φ de celle de E ;

iii) la filtration de E'' est l'image directe forte par ψ de celle de E.

Alors

1) les filtrations sur E' et sur E'' sont séparées et exhaustives ;

2) $\mu_E = \dfrac{1}{\operatorname{rg} E}\Big(\operatorname{rg} E'\mu_{E'} + \operatorname{rg} E''\mu_{E''}\Big).$

Démonstration. 1) Si G est un espace vectoriel de rang fini muni d'une $\mathbb{R}$-filtration, la filtration de G est séparée et exhaustive si et seulement si la fonction $\lambda : G \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ prend valeurs dans un intervalle borné de $\mathbb{R}$ (voir la proposition 4.2.3 4) et la proposition 4.2.4). Ceci étant, d'après la proposition 4.2.8, si la filtration de E est séparée et exhaustive, alors il en est de même des filtrations de E' et E''.

2) Soit $\mathbf{e}' = (e'_i)_{1\le i\le n}$ (resp. $\mathbf{e}'' = (e''_j)_{1\le j\le m}$) une base maximale de E' (resp. E''). Soit

$$\mathbf{e} = (\varphi(e'_1), \cdots, \varphi(e'_n), e_{n+1}, \cdots, e_{n+m})$$

une base de E telle que[4] pour tout $1 \le j \le m$, $\psi(e_{n+j}) = e''_j$ et $\lambda(e_{n+j}) = \lambda(e''_j)$. Par définition on sait que

$$\mu_{\mathbf{e}} = \frac{1}{\operatorname{rg} E}\Big(\operatorname{rg} E'\mu_{\mathbf{e}'} + \operatorname{rg} E''\mu_{\mathbf{e}''}\Big).$$

Il suffit donc de vérifier que $\mathbf{e}$ est une base maximale.

Soit r un nombre réel. D'abord on a

$$\operatorname{card}(\{\varphi(e'_1), \cdots \varphi(e'_n)\} \cap E_r) = \operatorname{card}(\mathbf{e}' \cap E'_r) = \operatorname{rg} E'_r. \tag{4.2}$$

D'autre part, si $e_{n+j} \in E_r$, alors $\lambda(e''_j) = \lambda(e_{n+j}) \ge r$, donc $e''_j \in E''_r$. Par conséquent

$$\operatorname{card}(\{e_{n+1}, \cdots, e_{n+m}\} \cap E_r) \ge \operatorname{card}(\mathbf{e}'' \cap E''_r) = \operatorname{rg}(E''_r) \ge \operatorname{rg}(\psi(E_r)). \tag{4.3}$$

La somme des inégalités (4.2) et (4.3) donne

$$\operatorname{card}(\mathbf{e} \cap E_r) \ge \operatorname{rg}(E'_r) + \operatorname{rg}(\psi(E_r)) = \operatorname{rg} E_r,$$

donc $\mathbf{e}$ est bien une base maximale. □

Espérance, variance et corrélation

Soit V un espace vectoriel de rang fini et non-nul sur K. Si $\mathcal{F}$ est une filtration séparée, exhaustive et continue à gauche sur V, alors elle détermine une probabilité de Radon sur $\mathbb{R}$. On désigne par $\mathbb{E}[\mathcal{F}]$ (resp. $\operatorname{var}(\mathcal{F})$) l'intégrale

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}] = \int_{\mathbb{R}} x d\mu_{\mathcal{F},V} \qquad (\text{resp. } \int_{\mathbb{R}} \big(x - \mathbb{E}[\mathcal{F}]\big)^2) d\mu_{\mathcal{F},V}, \tag{4.4}$$

appelée l'*espérance* (resp. la *variance*) de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}^{(i)})_{1\le i\le n}$ une famille de filtrations séparées, exhaustives et continues à gauche sur V. On considère la fonction G sur $\mathbb{R}^n$ suivante :

$$G(x_1, \cdots, x_n) = 1 - \frac{\operatorname{rg}(\mathcal{F}^{(1)}_{x_1} V \cap \cdots \cap \mathcal{F}^{(n)}_{x_n} V)}{\operatorname{rg} V}.$$

La fonction G détermine [5] une mesure de probabilité $\mu_{\mathbb{F},V}$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour toutes familles de nombres réels $(a_i^{(0)})_{1\le i\le n}$ et $(a_i^{(1)})_{1\le i\le n}$ telles que $a_i^{(0)} \ge a_i^{(1)}$ pour tout $1 \le i \le n$, on ait

$$\mu_{\mathbb{F},V}(]a_1^{(1)}, a_1^{(0)}] \times \cdots \times]a_n^{(1)}, a_n^{(0)}]) = \sum_{\alpha:\Xi\to\{0,1\}} (-1)^{|\alpha|} G(a_1^{\alpha(1)}, \cdots, a_n^{\alpha(n)}),$$

[4] Cela est toujours possible grâce à la proposition 4.2.3 4) et la proposition 4.2.9 2)

[5] Voir le théorème 2.25 de [60] pour une démonstration. Il faut faire attention que la fonction G ici est continue à gauche pour chaque variable x_i.

où $\Xi = \{1, \cdots, n\}$. Si on désigne par $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ les n projections, alors on a $\pi_{i*}(\mu_{\mathbb{F},V}) = \mu_{\mathcal{F}_i,V}$, autrement dit, $\mu_{\mathcal{F}_i,V}$ sont les distributions marginales de $\mu_{\mathbb{F},V}$. Toutefois, la mesure $\mu_{\mathbb{F},V}$ est un invariant plus fin de la famille $\mathbb{F} = (\mathcal{F}^{(i)})_{1\le i\le n}$ que la famille de mesures $(\mu_{\mathcal{F}^{(i)},V})_{1\le i\le n}$ qui décrit les “correlations” entre ces filtrations.

Si on considère la situation de deux filtrations séparés, exhaustives et continues à gauche $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur V, il est naturel de définir leur *covariance* comme

$$\mathrm{cov}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(x - \mathbb{E}[\mathcal{F}]\Big)\Big(y - \mathbb{E}[\mathcal{G}]\Big) d\mu_{(\mathcal{F},\mathcal{G}),V}. \tag{4.5}$$

On définit le *produit scalaire* (cf. [86] §6) de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ le nombre

$$\langle \mathcal{F},\mathcal{G}\rangle := \int_{\mathbb{R}^2} xy d\mu_{(\mathcal{F},\mathcal{G}),V}. \tag{4.6}$$

On a la relation $\mathrm{cov}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \langle \mathcal{F},\mathcal{G}\rangle - \mathbb{E}[\mathcal{F}]\,\mathbb{E}[\mathcal{G}]$.

4.2.4 Polygone associé à une filtration

Définition 4.2.22 Si $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ est une fonction décroissante et continue à droite telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

on définit le *quasi-inverse* de f l'application $f^* :]0,1[\to \mathbb{R}$ qui associe à tout $t \in]0,1[$ la valeur $\sup\{x \mid f(x) > t\}$.

Proposition 4.2.23 *Soit $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction décroissante et continue à droite telle que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

1) pour tout $t \in]0,1[$, et tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) > t$ si et seulement si $y < f^*(t)$;

2) f^* est une fonction décroissante, continue à droite ;

3) on a[6] $\sup_{t\in]0,1[} f^*(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ *et* $\inf_{t\in]0,1[} f^*(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$.

Démonstration. 1) Si $y < f^*(t) = \sup\{x \mid f(x) > t\}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > t$ et que $y < x$. Comme la fonction f est décroissante, on a $f(y) \ge f(x) > t$. Si $y > f^*(t)$, alors $y \notin \{x \mid f(x) > t\}$, i.e., $f(y) \le t$. Enfin, si $y = f^*(t)$, comme f est une fonction continue à droite, on a

$$f(y) = f(f^*(t)) = \lim_{z\to f^*(t)+} f(z) \le t.$$

2) Si $s \ge t$, alors $\{x \mid f(x) > s\} \subset \{x \mid f(x) > t\}$. Par conséquent, on a $f^*(t) \ge f^*(s)$, i.e., f^* est une fonction décroissante.

Soit $t \in]0,1[$. Il existe une suite croissante $(x_n)_{n\ge1}$ qui converge vers $f^*(t)$ et telle que $f(x_n) > t$ pour tout $n \ge 1$. Soit $\delta_n = \min((f(x_n) - t)/2, 1/n)$, alors $f(x_n) > t + \delta_n$, i.e., $x_n < f^*(t + \delta_n)$. Par conséquent,

$$\lim_{s\to t+} f^*(s) = \lim_{n\to+\infty} f^*(t+\delta_n) \ge \lim_{n\to+\infty} x_n = f^*(t).$$

Comme f^* est décroissante, cela montre que $\lim_{s\to t+} f^*(s) = f^*(t)$.

[6] Par définition $\inf\emptyset = +\infty$, et $\sup\emptyset = -\infty$.

3) En effet

$$\sup_{t\in]0,1[} f^*(t) = \sup_{t\in]0,1[} \sup\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\} \leq \sup\{x \mid f(x) > 0\}.$$

D'autre part, si $f(x) > 0$, alors il existe $s \in]0,1[$ tel que $f(x) > s$. Donc $x \leq f^*(s) \leq \sup\limits_{t\in]0,1[} f^*(t)$. Comme x est arbitraire on en déduit que $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \leq \sup\limits_{t\in]0,1[} f^*(t)$. Enfin, comme f est décroissante et prend valeur dans $[0,1]$, on obtient $\sup\{x \mid f(x) > 0\} = \inf\{x \mid f(x) = 0\}$.

Pour la deuxième , on a

$$\inf_{t\in]0,1[} f^*(t) = \inf_{t\in]0,1[} \sup\{x \mid f(x) > t\} \geq \sup\{x \mid f(x) = 1\}.$$

D'autre part, $\sup\{x \mid f(x) = 1\} = \inf\{x \mid f(x) < 1\}$. Si $f(x) < 1$, alors il existe $s \in]0,1[$ tel que $f(x) < s$. Par conséquent, $x \geq f^*(s) \geq \inf\limits_{t\in]0,1[} f^*(t)$. Donc

$$\sup\{x \mid f(x) = 1\} = \inf\{x \mid f(x) < 1\} \geq \inf_{t\in]0,1[} f^*(t).$$

□

Définition 4.2.24 On appelle *polygone* toute fonction continue, concave et linéaire par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$ sur $[0,1]$ qui vaut 0 au point 0.

Proposition 4.2.25 *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ qui est une combinaison linéaire finie de mesures de Dirac. Si on désigne par $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ la fonction $f(x) = \mu(]x, +\infty[)$, alors la fonction sur $[0,1]$ définie par*

$$P(\mu)(t) := \int_0^t f^*(s)ds$$

est un polygone.

Démonstration. Comme μ est une probabilité combinaison linéaire de mesures de Dirac, la fonction f est décroissante, continue à droite, et constante par morceaux ; de plus, $f(x) = 0$ (resp. $f(x)=1$) lorsque x est suffisamment grand (resp. petit). Par conséquent, f^* est décroissante, continue à droite, constante par morceaux et bornée. Comme $P(\mu)$ est la fonction primitive de f^* qui vaut 0 en point 0, on sait que $P(\mu)$ est un polygone. □

Remarque 4.2.26 En fait, si $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ est une fonction décroissante, continue à droite et telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors la fonction $t \mapsto \int_0^t f^*(s)ds$ sur $[0,1]$ n'est rien d'autre la *transformation de Legendre* de la fonction concave $x \mapsto \int_0^x f(y)dy$ (cf. [57] chap. II §2.2).

Définition 4.2.27 Avec les notations de la proposition 4.2.25, $P(\mu)$ est appelé le *polygone* associé à la mesure de probabilité μ.

Définition 4.2.28 Soit E un espace vectoriel de rang fini et non-nul sur K, $\mathcal{F}$ une filtration séparée et exhaustive de E. On appelle *polygone* associé à la filtration $\mathcal{F}$ pour E le polygone $P(\mu_{\mathcal{F},E})$, noté $P_{\mathcal{F},E}$ (ou simplement P_E s'il n'y a aucune ambiguïté).

Remarque 4.2.29 Si E est un espace vectoriel de rang fini sur K et si $\mathcal{F}$ est une $\mathbb{R}$-filtration séparée, exhaustive et continue à gauche correspondant au drapeau

$$E^{(0)} \subsetneq E^{(1)} \subsetneq \cdots \subsetneq E^{(n)}$$

et à la suite strictement décroissante $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ (cf. la remarque 4.2.19), alors on a

$$P_{\mathcal{F},E}(t) = \sum_{i=1}^{j-1} a_i\Big(\frac{\operatorname{rg} E^{(i)}}{\operatorname{rg} E} - \frac{\operatorname{rg} E^{(i-1)}}{\operatorname{rg} E}\Big) + a_j\Big(t - \frac{\operatorname{rg} E^{(j)}}{\operatorname{rg} E}\Big)$$

pour tout $t \in \Big[\frac{\operatorname{rg} E^{(j)}}{\operatorname{rg} E}, \frac{\operatorname{rg} E^{(j+1)}}{\operatorname{rg} E}\Big]$.

4.3 Filtration de Harder-Narasimhan

4.3.1 Catégorie de Harder-Narasimhan

On rappelle d'abord quelques notions concernant les catégories exactes (au sens de Quillen). La référence est [76].

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie additive essentiellement petite (i.e., équivalente à une catégorie petite) et $\mathcal{E}$ une classe de diagrammes de la forme

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

dans $\mathcal{C}$. On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ est un *monomorphisme admissible* (resp. *épimorphisme admissible*)[7] pour $\mathcal{E}$ s'il existe une suite de la forme

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$
$$(\text{resp.}\quad 0 \longrightarrow Z \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \quad)$$

dans $\mathcal{E}$. On utilisera le symbole " $\rightarrowtail$ " (resp. " $\twoheadrightarrow$ ") pour représenter un monomorphisme admissible (resp. épimorphisme admissible). Si $\mathcal{F} :\ 0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ et $\mathcal{G} :\ 0 \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow 0$ sont deux suites dans $\mathcal{E}$, on appelle *morphisme* de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$ tout digramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (\Phi) :\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On dit que (Φ) est un *isomorphisme* si φ', φ et φ'' sont tous des isomorphismes dans $\mathcal{C}$.

Définition 4.3.1 On dit que $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ est une *catégorie exacte* si les axiomes suivants sont vérifiés :

(**Ex**1) Pour toute suite

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\psi} X'' \longrightarrow 0$$

dans $\mathcal{E}$, φ est le noyau de ψ et ψ est le conoyau de φ.

[7] Quand $\mathcal{C}$ muni de la classe $\mathcal{E}$ forme une catégorie exacte, au sens de la définition 4.3.1 ci-dessous, un monomorphisme admissible (resp. épimorphisme admissible) est *ipso facto* un monomorphisme (resp. épimorphisme) d'après l'axiome (**E**x1).

(**Ex**2) Si X et Y sont deux objets dans $\mathcal{C}$, alors la suite

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{(\mathrm{Id},0)} X \amalg Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y \longrightarrow 0$$

est dans $\mathcal{E}$.

(**Ex**3) Toute suite isomorphe à une suite dans $\mathcal{E}$ est aussi dans $\mathcal{E}$.

(**Ex**4) Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux monomorphismes admissibles (resp. épimorphismes admissibles) pour $\mathcal{E}$, alors gf est un monomorphisme admissible (resp. épimorphisme admissible) pour $\mathcal{E}$.

(**Ex**5) Pour tout monomorphisme admissible $f : X' \rightarrowtail X$ et tout morphisme $u : X' \to Y$ dans $\mathcal{C}$, le coproduit de f et u existe. De plus, si le diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "v"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

est cocartésien, alors g est un monomorphisme admissible.

(**Ex**6) Pour tout épimorphisme admissible $f : X \twoheadrightarrow X''$ et tout morphisme $u : Y \to X''$ dans $\mathcal{C}$, le produit fibré de f et u existe. De plus, si le carré

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & Y \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, two heads, "f"'] & X'' \end{tikzcd}$$

est cartésien, alors g est un épimorphisme admissible.

(**Ex**7) Pour tout morphisme $f : X \to Y$ admettant un noyau (resp. conoyau) dans $\mathcal{C}$, s'il existe un morphisme $g : Z \to X$ (resp. $g : Y \to Z$) tel que fg (resp. gf) soit un épimorphisme admissible (resp. monomorphisme admissible), alors f est un épimorphisme admissible (resp. monomorphisme admissible).

Si $f : X \to Y$ est un monomorphisme admissible, d'après l'axiome (**Ex**1), le morphisme f admet un conoyau, noté Y/X. Le couple (X, f) est appelé un *sous-objet admissible* de Y.

Exemple 4.3.2 Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine additive de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{E}$ est la classe de suites exactes

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

dans $\mathcal{A}$ telles que X', X et X'' soient tous des objets dans $\mathcal{C}$, alors $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ est une catégorie exacte. Grâce au foncteur de Yoneda (dans sa version additive à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens), toute catégorie exacte peut se réaliser comme une sous-catégorie additive pleine d'une catégorie abélienne (cf. [76]).

Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ une catégorie exacte. On désigne par $K_0(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ le groupe commutatif libre engendré par les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}$, modulo le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[X] - [X'] - [X'']$, où

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

est une suite dans $\mathcal{E}$. Le groupe $K_0(\mathcal{C},\mathcal{E})$ est appelé le *groupe de Grothendieck* de la catégorie exacte $(\mathcal{C},\mathcal{E})$.

Définition 4.3.3 Soient $\deg : K_0(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{rg} : K_0(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \mathbb{Z}$ deux homomorphismes. On suppose que $\mathrm{rg}([X]) > 0$ pour tout objet non-nul X de $\mathcal{C}$. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, $\deg([X])$ (resp. $\mathrm{rg}([X])$) est appelé le *degré* (resp. *rang*) de X, noté aussi $\deg(X)$ (resp. $\mathrm{rg}(X)$), si de plus X est non-nul, le quotient $\mu(X) = \deg(X)/\mathrm{rg}(X)$ est appelé la *pente* de l'objet X. On dit qu'un objet non-nul X de $\mathcal{C}$ est *semi-stable* si pour tout monomorphisme admissible non-nul $f : X' \to X$, on a $\mu(X') \leq \mu(X)$.

Remarque 4.3.4 Avec les notations de la définition 4.3.3, si X est de rang 1, alors il est semi-stable. En effet, si Y est un sous-objet admissible de X, alors on a $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(Y) + \mathrm{rg}(X/Y) = 1$. Par conséquent, ou bien on a $\mathrm{rg}(Y) = 0$, ou bien $\mathrm{rg}(X/Y) = 0$, autrement dit, on a $Y = 0$, ou $Y = X$. Donc X est automatiquement semi-stable.

Proposition 4.3.5 *Soit X un objet non-nul de $\mathcal{C}$. L'objet X est semi-stable si et seulement si pour tout épimorphisme admissible non-nul $g : X \to X''$ on a $\mu(X'') \geq \mu(X)$.*

Démonstration. Soit
$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$
une suite dans $\mathcal{E}$. Si X' est nulle, alors $\deg(X) = \deg(X'')$ et $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(X'')$, donc $\mu(X) = \mu(X'')$. Si X' est non-nul, on a
$$\mu(X) = \frac{\mathrm{rg}(X')}{\mathrm{rg}(X)}\mu(X') + \frac{\mathrm{rg}(X'')}{\mathrm{rg}(X)}\mu(X''),$$
donc $\mu(X') \leq \mu(X) \Longleftrightarrow \mu(X'') \geq \mu(X)$. □

Définition 4.3.6 Soient $(\mathcal{C},\mathcal{E})$ une catégorie exacte, $\deg : K_0(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{rg} : K_0(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \mathbb{Z}$ deux homomorphismes. On suppose que $\mathrm{rg}(X) > 0$ pour tout objet non-nul X de $\mathcal{C}$. On dit que $(\mathcal{C},\mathcal{E},\deg,\mathrm{rg})$ est une *catégorie de Harder-Narasimhan* si les axiomes suivants sont vérifiés :

(**HN**1) Pour tout objet non-nul X, il existe un sous-objet admissible non-nul X_{des} tel que
$$\mu(X_{\mathrm{des}}) = \sup\{\mu(Y) \mid \text{il existe un monomorphisme admissible de } Y \text{ vers } X\},$$
et tel que tout monomorphisme admissible $Z \to X$ avec $\mu(Z) = \mu(X_{\mathrm{des}})$ se factorise par X_{des}.

(**HN**2) Si X et Y sont des objets semi-stables tels que $\mu(X) > \mu(Y)$, alors $\mathrm{Hom}(X,Y) = \{0\}$

La pente de X_{des} est appelée la *pente maximale* de X, notée $\mu_{\max}(X)$.

Remarque 4.3.7 Avec les notations de la définition 4.3.6, si X est un objet non-nul de $\mathcal{C}$, alors X_{des} est semi-stable. En effet, tout sous-objet admissible Y de X_{des} est aussi un sous-objet admissible de X. Par la définition de X_{des}, on a $\mu(Y) \leq \mu(X_{\mathrm{des}})$. Par conséquent, $X = X_{\mathrm{des}}$ si et seulement si X est semi-stable. Si X n'est pas semi-stable, on dit que X_{des} est l'objet qui *déstabilise* X.

Théorème 4.3.8 *Soit $(\mathcal{C},\mathcal{E},\deg,\mathrm{rg})$ une catégorie de Harder-Narasimhan. Si X est un objet non-nul de $\mathcal{C}$, il existe une suite de monomorphismes admissibles dans $\mathcal{C}$*
$$0 = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n = X\ , \tag{4.7}$$
unique à un unique isomorphisme près, telle que

i) pour tout entier $0 \le i < n$, X_{i+1}/X_i est semi-stable ;

ii) $\mu(X_1/X_0) > \mu(X_2/X_1) > \cdots > \mu(X_n/X_{n-1})$.

Démonstration. On démontre d'abord l'existence d'une telle suite par récurrence sur le rang r de X. Le cas où X est semi-stable est trivial, il suffit de prendre $0 \to X$. Donc le cas où $r = 1$ est démontré (cf. la remarque 4.3.4). Pour le cas général, on prend $X_1 = X_{\mathrm{des}}$. Alors X_1 est un objet semi-stable de pente $\mu_{\max}(X)$. Soit $X' = X/X_1$. On a $\mathrm{rg}(X') < r$. Si $X' = 0$, alors $X = X_1$ est semi-stable, et on tombe dans le cas précédent, sinon on peut appliquer l'hypothèse de récurrence sur X' pour obtenir une suite de monomorphismes admissibles :

$$0 = X'_1 \xrightarrow{f'_1} X'_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_{n-1} \xrightarrow{f'_{n-1}} X'_n = X'$$

de X' vérifiant les conditions. Comme l'homomorphisme canonique de X vers X' est un épimorphisme admissible, pour tout $1 \le i \le n$, si on pose $X_i = X \times_{X'} X'_i$, la projection $\pi_i : X_i \to X'_i$ est un épimorphisme admissible (l'axiome **Ex**6). Pour tout entier $1 \le i < n$, on a un morphisme canonique de X_i vers X_{i+1} et le carré

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\pi_i"'] & X_{i+1} \arrow[d, "\pi_{i+1}"] \\ X'_i \arrow[r, "f'_i"'] & X'_{i+1} \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

est cartésien. Comme le morphisme f'_i est monomorphique, il en est de même de f_i (cf. [68] V. 7). D'autre part, comme le carré (4.8) est cartésien, f_i est le noyau du morphisme composé

$$X_{i+1} \xrightarrow{\pi_{i+1}} X'_{i+1} \xrightarrow{p_i} X'_{i+1}/X'_i\ ,$$

où p_i est le morphisme canonique. Comme π_{i+1} et p_i sont des épimorphismes admissibles, il en est de même de $p_i\pi_{i+1}$ (l'axiom **Ex**4). Par conséquent, f_i est un monomorphisme admissible. De plus, pour tout entier $1 \le i < n$, $X_{i+1}/X_i \cong X'_{i+1}/X'_i$ est semi-stable, et on a

$$\mu(X_2/X_1) > \mu(X_3/X_2) > \cdots > \mu(X_n/X_{n-1}).$$

Enfin,

$$\mu(X_2/X_1) = \frac{\mathrm{rg}(X_2)\mu(X_2) - \mathrm{rg}(X_1)\mu(X_1)}{\mathrm{rg}(X_2) - \mathrm{rg}(X_1)} < \mu(X_1)$$

puisque $X_1 = X_{\mathrm{des}}$, et donc $\mu(X_2) > \mu(X_1)$. Par conséquent, la suite

$$0 = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n = X$$

satisfait aux conditions i) et ii).

On démontre ensuite l'unicité de la suite (4.7). Par récurrence (sur le rang de X), il suffit de montrer que X_1 est isomorphe à X_{des} comme sous-objet de X. Soit $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ le premier indice tel que le morphisme canonique $X_{\mathrm{des}} \to X$ se factorise par X_{i+1}. Le morphisme composé $X_{\mathrm{des}} \to X_{i+1} \to X_{i+1}/X_i$ est non-nul. Comme X_{des} et X_{i+1}/X_i sont semi-stables on a $\mu(X_{\mathrm{des}}) \le \mu(X_{i+1}/X_i)$. Si $i > 0$, cela implique que $\mu(X_{\mathrm{des}}) < \mu(X_1)$, ce qui est absurde. On a alors $i = 0$, $\mu(X_{\mathrm{des}}) = \mu(X_1)$, et donc $X_1 \to X$ se factorise par X_{des} puisque X_{des} est maximal. Cela implique que $X_{\mathrm{des}} \cong X_1$. □

Remarque 4.3.9 D'après la démonstration du théorème 4.3.8, l'axiome (**HN**1) suffit pour l'existence de la suite de Harder-Narasimhan. Mais pour avoir l'unicité, l'axiome (**HN**2) est essentiel.

Corollaire 4.3.10 *Soit* $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \deg, \mathrm{rg})$ *une catégorie de Harder-Narasimhan. Si* X *est un objet non-nul de* $\mathcal{C}$ *et si* Y *est un sous-objet non-nul de* X*, alors* $\mu_{\max}(Y) \leq \mu_{\max}(X)$*.*

Démonstration. Comme Y_{des} est un sous-objet non-nul de X on se ramène au cas où Y est semi-stable. D'après le théorème 4.3.8 il existe une suite de monomorphisme admissibles

$$0 = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \to X_{n-1} \longrightarrow X_n = X,$$

qui vérifie les deux conditions du théorème 4.3.8. Soit i le premier indice tel que le morphisme canonique $Y \to X$ se factorise par X_{i+1}, alors le morphisme composé $Y \to X_{i+1} \to X_{i+1}/X_i$ est non-nul. Par conséquent

$$\mu(Y) \leq \mu(X_{i+1}/X_i) \leq \mu(X_1) = \mu_{\max}(X).$$

□

Définition 4.3.11 Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \deg, \mathrm{rg})$ une catégorie de Harder-Narasimhan. Si X est un objet non-nul de $\mathcal{C}$, on appelle la suite (4.7) dans le théorème 4.3.8 la *suite de Harder-Narasimhan* de l'objet X. La pente de X_n/X_{n-1} est appelée la *pente minimale* de l'objet X, notée $\mu_{\min}(X)$.

Remarque 4.3.12 Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \deg, \mathrm{rg})$ une catégorie de Harder-Narasimhan. Si X est un objet non-nul de $\mathcal{C}$ et si

$$0 = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n = X$$

est la suite de Harder-Narasimhan de X, alors pour tout entier $1 \leq i \leq n$,

$$0 = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{i-1} \longrightarrow X_i$$

est la suite de Harder-Narasimhan de X_i. Par conséquent, on a $\mu_{\min}(X_i) = \mu(X_i/X_{i-1})$

Corollaire 4.3.13 *Soit* $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \deg, \mathrm{rg})$ *une catégorie de Harder-Narasimhan. Si* X *et* Y *sont deux objets non-nuls de* $\mathcal{C}$ *et si* $f : X \to Y$ *est un épimorphisme, alors* $\mu_{\min}(Y) \geq \mu_{\min}(X)$

Démonstration. En prenant un quotient semi-stable de pente $\mu_{\min}(Y)$ de Y on peut supposer que Y soit semi-stable. Soit

$$0 = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n = X$$

la suite de Harder-Narasimhan de X. Soit i le plus petit indice tel que le morphisme composé $X_{i+1} \to X \xrightarrow{f} Y$ soit non-nul. Comme le morphisme composé $X_i \to X \xrightarrow{f} Y$ est nul on obtient un morphisme non-nul de X_{i+1}/X_i vers Y, d'où $\mu(Y) \geq \mu(X_{i+1}/X_i) \geq \mu_{\min}(X)$ d'après l'axiom (**HN**2). □

Corollaire 4.3.14 *Soit* $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \deg, \mathrm{rg})$ *une catégorie de Harder-Narasimhan. Si* X *est un objet non-nul de* $\mathcal{C}$*, alors*

$$\mu_{\min}(X) \leq \mu(X) \leq \mu_{\max}(X).$$

Démonstration. Soit

$$0 = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n = X$$

la suite de Harder-Narasimhan de X. On a $\deg X = \sum_{i=1}^{n} \deg(X_i/X_{i-1})$, d'où

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{rg}(X_i/X_{i-1})}{\mathrm{rg}(X)} \mu(X_i/X_{i-1}) \in [\mu_{\min}(X), \mu_{\max}(X)].$$

□

Corollaire 4.3.15 *Soit* $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \deg, \mathrm{rg})$ *une catégorie de Harder-Narasimhan, si* $f : X \to Y$ *est un morphisme non-nul dans* $\mathcal{C}$*, alors* $\mu_{\min}(X) \leq \mu_{\max}(Y)$.

Démonstration. Soit

$$0 = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n = X$$

la suite de Harder-Narasimhan de X. Pour tout entier $0 \leq i \leq n$ soit $h_i : X_i \to X$ le monomorphisme canonique. Soit $1 \leq j \leq n$ le premier indice tel que fh_j soit non-nul. Comme $fh_{j-1} = 0$ on obtient que fh_j se factorise par X_j/X_{j-1}, d'où on a un morphisme non-nul g de X_j/X_{j-1} ver Y. Soit

$$0 = Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_{m-1} \longrightarrow Y_m$$

la suite de Harder-Narasimhan de Y. Soit $1 \leq k \leq n$ le dernier indice tel que g se factorise par Y_k. Si $\pi : Y_k \to Y_k/Y_{k-1}$ est le morphisme canonique, alors πg est non-nul puisque g ne se factorise pas par Y_{k-1}. Par conséquent, on a

$$\mu_{\min}(X) \leq \mu(X_j/X_{j-1}) \leq \mu(Y_k/Y_{k-1}) \leq \mu_{\max}(Y).$$

□

4.3.2 Filtration et polygone de Harder-Narasimhan

Dans ce sous-paragraphe, on fixe une catégorie de Harder-Narasimhan $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \deg, \mathrm{rg})$.

Filtration de Harder-Narasimhan

Proposition 4.3.16 *Soient* X *un objet non-nul de* $\mathcal{C}$ *et*

$$0 = X_0^{\mathrm{HN}} \longrightarrow X_1^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1}^{\mathrm{HN}} \longrightarrow X_n^{\mathrm{HN}} = X$$

sa suite de Harder-Narasimhan. Si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$*, on note (avec par convention* $\max \emptyset = 0$*)*

$$i_X(\lambda) = \max\{1 \leq i \leq n \mid \mu(X_i^{\mathrm{HN}}/X_{i-1}^{\mathrm{HN}}) \geq \lambda\}$$

et $X_\lambda = X_{i_X(\lambda)}^{\mathrm{HN}}$*, alors* $(X_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *est une* $\mathbb{R}$*-filtration continue à gauche de l'objet* X*. De plus, cette filtration est séparée, exhaustive et de longueur finie.*

Démonstration. Si $\lambda > \lambda'$, on a $i_X(\lambda) \le i_X(\lambda')$, donc $(X_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est bien une $\mathbb{R}$-filtration de X. D'autre part, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $X_\lambda \in \{X_0^{\mathrm{HN}}, \cdots, X_n^{\mathrm{HN}}\}$, donc cette filtration est de longueur finie. Quand $\lambda > \mu_{\max}(X)$, $i_X(\lambda) = 0$, donc $X_\lambda = X_0^{\mathrm{HN}} = 0$ est l'objet nul, donc la filtration est séparée. Lorsque $\lambda < \mu_{\min}(X)$, $i_X(\lambda) = n$, donc $X_\lambda = X$; ainsi la filtration est exhaustive. Enfin, pour démontrer la continuité à gauche de cette filtration, il suffit de vérifier que la fonction $\lambda \mapsto i_X(\lambda)$ est continue à gauche. En effet, cette fonction est même localement constante à gauche : si $i_X(\lambda) = 0$, alors pour tout entier $1 \le i \le n$ on a $\mu(X_i^{\mathrm{HN}}/X_{i-1}^{\mathrm{HN}}) < \lambda$, donc il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ on ait $\mu(X_i^{\mathrm{HN}}/X_{i-1}^{\mathrm{HN}}) < \lambda - \varepsilon$, i.e., $i_X(\lambda-\varepsilon) = 0$; si $i_X(\lambda) = n$, alors pour tout entier $1 \le i \le n$ et tout $\varepsilon \ge 0$ on a $\mu(X_i^{\mathrm{HN}}/X_{i-1}^{\mathrm{HN}}) \ge \lambda \ge \lambda - \varepsilon$, d'où $i_X(\lambda - \varepsilon) = n$; enfin si $1 \le i_X(\lambda) \le n-1$, alors on a $\mu(X_{i_X(\lambda)}^{\mathrm{HN}}/X_{i_X(\lambda)-1}^{\mathrm{HN}}) \ge \lambda$ et $\mu(X_{i_X(\lambda)+1}^{\mathrm{HN}}/X_{i_X(\lambda)}^{\mathrm{HN}}) < \lambda$, donc il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ on ait $\mu(X_{i_X(\lambda)}^{\mathrm{HN}}/X_{i_X(\lambda)-1}^{\mathrm{HN}}) \ge \lambda - \varepsilon$ et $\mu(X_{i_X(\lambda)+1}^{\mathrm{HN}}/X_{i_X(\lambda)}^{\mathrm{HN}}) < \lambda - \varepsilon$, i.e., $i_X(\lambda-\varepsilon) = i_X(\lambda)$. □

Définition 4.3.17 Avec les notations de la proposition 4.3.16, la filtration $(X_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est appelée la *filtration de Harder-Narasimhan* de X. La *filtration de Harder-Narasimhan* de l'objet nul est par définition le foncteur constant qui associe à chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ l'objet nul.

Remarque 4.3.18 On garde les notations de la proposition 4.3.16. Soit X un objet non-nul. Si $(X_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est la filtration de Harder-Narasimhan de X, alors pour tous nombres réels $a > b$, le monomorphisme canonique de X_a vers X_b est admissible. En effet, les morphismes dans la suite de Harder-Narasimhan de X sont tous des monomorphismes admissibles.

Proposition 4.3.19 *Avec les notations de la proposition 4.3.16, tout morphisme dans $\mathcal{C}$ est compatible avec les filtrations de Harder-Narasimhan de sa source et de son but.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. Le cas où X ou Y est nul est trivial. On supposera X et Y non-nuls. Soient

$$0 = X_0^{\mathrm{HN}} \longrightarrow X_1^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1}^{\mathrm{HN}} \longrightarrow X_n^{\mathrm{HN}} = X$$

la suite de Harder-Narasimhan de X et

$$0 = Y_0^{\mathrm{HN}} \longrightarrow Y_1^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_{m-1}^{\mathrm{HN}} \longrightarrow Y_m^{\mathrm{HN}} = Y$$

celle de Y. Pour tous les entiers $0 \le i < j \le m$, soit $P_{j,i}$ le morphisme canonique de Y_j^{HN} vers $Y_j^{\mathrm{HN}}/Y_i^{\mathrm{HN}}$. Pour tout entier $0 \le i \le n$ soit U_i le monomorphisme canonique de X_i^{HN} vers X. Soit λ un nombre réel. Si $i_X(\lambda) = 0$ ou si $i_Y(\lambda) = 0$ on définit F_λ comme le morphisme nul de X_λ vers Y_λ ; si $i_Y(\lambda) = m$ on a $Y_\lambda = Y$ et on définit F_λ comme le composé $fU_{i_X(\lambda)}$; sinon on a $\mu(X_{i_X(\lambda)}^{\mathrm{HN}}/X_{i_X(\lambda)-1}^{\mathrm{HN}}) \ge \lambda$ et $\mu(Y_{i_Y(\lambda)}^{\mathrm{HN}}/Y_{i_Y(\lambda)-1}^{\mathrm{HN}}) \ge \lambda$, mais $\mu(Y_j^{\mathrm{HN}}/Y_{j-1}^{\mathrm{HN}}) < \lambda$ pour tout $j > i_Y(\lambda)$.

Montrons par récurrence que le morphisme $fU_{i_X(\lambda)}$ se factorise par $Y_{i_Y(\lambda)}^{\mathrm{HN}}$. D'abord le morphisme $fU_{i_X(\lambda)}$ se factorise trivialement par $Y_m^{\mathrm{HN}} = Y$. S'il se factorise par $\varphi_j : X_{i_X(\lambda)}^{\mathrm{HN}} \to Y_j^{\mathrm{HN}}$, où $j > i_Y(\lambda)$, alors le morphisme composé $P_{j,j-1}\varphi_j$ est forcément nul car (cf. le corollaire 4.3.15)

$$\mu_{\max}(Y_j^{\mathrm{HN}}/Y_{j-1}^{\mathrm{HN}}) < \lambda \le \mu(X_{i_X(\lambda)}^{\mathrm{HN}}/X_{i_X(\lambda)-1}^{\mathrm{HN}}) = \mu_{\min}(X_{i_X(\lambda)}^{\mathrm{HN}}).$$

Donc le morphisme $fU_{i_X(\lambda)}$ se factorise par Y_{j-1}^{HN}. Par récurrence, on obtient que $fU_{i_X(\lambda)}$ se factorise (de façon unique) par $F_\lambda : X_{i_X(\lambda)} \to Y_{i_Y(\lambda)}$. Ainsi, la famille de morphismes $F = (F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est un morphisme de foncteurs tel que (F, f) soit un morphisme de filtrations. □

Remarque 4.3.20 Avec les notations de la proposition 4.3.16, on a un foncteur HN de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathbf{Fil}^g_f(\mathcal{C})$ qui envoie chaque objet X de $\mathcal{C}$ vers sa filtration de Harder-Narasimhan, que l'on appellera *foncteur de Harder-Narasimhan* de $\mathcal{C}$. On remarque que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\mathrm{HN}(X)$ est une filtration séparée, exhaustive, continue à gauche et de longueur finie de X. De plus, si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, alors $\mathrm{HN}(f)(-\infty) = f$.

Polygone de Harder-Narasimhan

Soient X un objet non-nul de $\mathcal{C}$ et

$$0 = X_0^{\mathrm{HN}} \longrightarrow X_1^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1}^{\mathrm{HN}} \longrightarrow X_n^{\mathrm{HN}} = X$$

sa suite de Harder-Narasimhan. Pour tout $0 \le i \le n$ on note $t_i = \operatorname{rg} X_i^{\mathrm{HN}} / \operatorname{rg} X$. Pour tout $0 \le i \le n-1$, on note $\lambda_i = \mu(X_{i+1}^{\mathrm{HN}}/X_i^{\mathrm{HN}})$. Les relations

$$\frac{\deg X_i^{\mathrm{HN}}}{\operatorname{rg} X} + \lambda_i(t_{i+1} - t_i) = \frac{\deg X_{i+1}^{\mathrm{HN}}}{\operatorname{rg} X}$$

et $\lambda_i \ge \lambda_{i+1}$ montrent que la fonction

$$P_X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\deg X_i^{\mathrm{HN}}}{\operatorname{rg} X} + \lambda_i(t - t_i) \right) 1\!\!1_{[t_i, t_{i+1}]}(t).$$

est un polygone, appelé le *polygone de Harder-Narasimhan* de X.

On désigne par ν_X la mesure de Radon sur $\mathbb{R}$ définie par la formule

$$\nu_X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{rg}(X_i^{\mathrm{HN}}/X_{i-1}^{\mathrm{HN}})}{\operatorname{rg}(X)} \delta_{\lambda_i},$$

appelée la *mesure de Harder-Narasimhan* de X. C'est une mesure de probabilité. La mesure de Harder-Narasimhan de l'objet nul est par définition la mesure nulle.

Si $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Vec}_K$ est un foncteur exact, alors il induit un homomorphisme de groupes : $K_0(F) : K_0(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \to K_0(\mathbf{Vec}_K)$. D'autre part, F induit un foncteur $\widetilde{F} : \mathbf{Fil}^g_f(\mathcal{C}) \to \mathbf{Fil}^g_f(\mathbf{Vec}_K)$. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, alors $\widetilde{F} \circ \mathrm{HN}$ est une $\mathbb{R}$-filtration de l'espace vectoriel $F(X)$.

Proposition 4.3.21 *On suppose que F préserve l'homomorphisme de rang, i.e., $\operatorname{rg}_{\mathbf{Vec}_K} \circ K_0(F) = \operatorname{rg}_{\mathcal{C}}$, alors pour tout objet non-nul X de $\mathcal{C}$, le polygone associé à la filtration $\widetilde{F} \circ \mathrm{HN}(X)$ est égal au polygone de Harder-Narasimhan de X, et la mesure de probabilité associée à la filtration $\widetilde{F} \circ \mathrm{HN}(X)$ s'identifie à la mesure de Harder-Narasimhan de X.*

Démonstration. Soit

$$0 = X_0^{\mathrm{HN}} \longrightarrow X_1^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1}^{\mathrm{HN}} \longrightarrow X_n^{\mathrm{HN}} = X$$

la suite de Harder-Narasimhan de X. La dérivée de la fonction $P_X(t)$ existe presque partout. Si on note $t_i = \operatorname{rg} X_i^{\mathrm{HN}} / \operatorname{rg} X$ pour $0 \le i \le n$ et $\lambda_i = \mu(X_{i+1}^{\mathrm{HN}}/X_i^{\mathrm{HN}})$ pour tout $0 \le i \le n-1$, alors on a

$$P'_X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i 1\!\!1_{[t_i, t_{i+1}[}(t).$$

Soit ν la mesure de probabilité associée à la filtration $\widetilde{F} \circ \mathrm{HN}(X)$. On a

$$\nu = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\delta_{\lambda_i}.$$

Si on définit

$$f(x) = \nu(]x, +\infty[) = \sum_{i=0}^{n-1} 1\!\!1_{[\lambda_{i+1},\lambda_i[}(x) t_{i+1},$$

où par convention $\lambda_n = +\infty$. On trouve immédiatement $f^* = P'_X$. Par conséquent, le polygone associé à la filtration $\widetilde{F} \circ \mathrm{HN}(X)$ s'identifie à P_X. □

4.3.3 Catégorie de Harder-Narasimhan arithmétique, filtrations et polygones

Catégorie de Harder-Narasimhan arithmétique

Proposition 4.3.22 *Soient $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ une catégorie exacte et $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$.*

1) la suite

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{(\mathrm{Id}_X, f)} X \amalg Y \xrightarrow{f \circ \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2} Y \longrightarrow 0$$

est dans $\mathcal{E}$;

2) le morphisme f se factorise en $f = \mathrm{pr}_2 \circ (\mathrm{Id}_X, f)$, où $\mathrm{pr}_2 : X \amalg Y \to Y$ est un épimorphisme admissible et $(\mathrm{Id}_X, f) : X \to X \amalg Y$ est un monomorphisme admissible.

Démonstration. Soit $Z = X \amalg Y$. Considérons les morphismes $u = (\mathrm{Id}_X, f) : X \to Z$ et $v = \mathrm{pr}_2 : Z \to Y$. Evidemment on a $vu = f$. D'autre part, d'après l'axiome (**Ex**2), v est un épimorphisme admissible. Il suffit donc de vérifier que u est un monomorphisme admissible. On considère le morphisme $w = f \circ \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2 : Z \to Y$. Montrons que w est un conoyau de u. D'abord on a $wu = 0$. D'autre part, tout morphisme $\alpha : Z \to S$ s'écrit sous la forme $\alpha = \alpha_1 \circ \mathrm{pr}_1 - \alpha_2 \circ \mathrm{pr}_2 : Z \to S$, où $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(X, S)$ et $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(Y, S)$. Si $\alpha u = 0$, on a $\alpha_2 f = \alpha_1$, i.e., le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & X \amalg Y \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "\alpha"'] & Y \arrow[d, dotted, "\alpha_2"] \\ & & S \end{tikzcd}$$

est commutatif. Enfin, si $\beta : Y \to S$ est tel que $\beta w = \beta f - \beta = \alpha$, on a forcément $\beta = \alpha_2$. On a montré donc que le morphisme u a un conoyau.

Comme le morphisme composé $X \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X$ est le morphisme Id_X, qui est un monomorphisme admissible, on obtient que u est aussi un monomorphisme admissible compte tenu de l'axiome (**Ex**7). □

Définition 4.3.23 Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ une catégorie exacte. On appelle *structure arithmétique* sur $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ les données suivantes :

1) une application A de $\mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ vers la classe des ensembles ;

2) pour tout monomorphisme admissible $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, une application $f^* : A(Y) \to A(X)$;

3) pour tout épimorphisme admissible $g : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, une application $g_* : A(X) \to A(Y)$;

assujetties aux conditions suivantes :

(**A**1) $A(0)$ est un ensemble à un élément ;

(**A**2) si $X \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{j}{\rightarrowtail} Z$ sont des monomorphismes admissibles, on a $(ji)^* = i^*j^*$;

(**A**3) si $X \overset{p}{\twoheadrightarrow} Y \overset{q}{\twoheadrightarrow} Z$ sont des épimorphismes admissibles, on a $(qp)_* = q_*p_*$;

(**A**4) si $f : X \to Y$ est un isomorphisme, on a $f^*f_* = \mathrm{Id}_{A(X)}$ et $f_*f^* = \mathrm{Id}_{A(Y)}$;

(**A**5) pour tout carré cartésien ou cocartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, two heads, "p"'] & Y \arrow[d, two heads, "q"] \\ Z \arrow[r, tail, "j"'] & W \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$, où i et j (resp. p et q) sont des monomorphismes (resp. épimorphismes) admissibles, on a $j^*q_* = p_*i^*$;

(**A**6) si $S :\ 0 \longrightarrow X' \overset{i}{\longrightarrow} X \overset{p}{\longrightarrow} X'' \longrightarrow 0$ est une suite dans $\mathcal{E}$, l'application $(i^*, p_*) : A(X) \to A(X') \times A(X'')$ est surjective ;

(**A**7) si $X \overset{u}{\twoheadrightarrow} Y \overset{v}{\rightarrowtail} Z$ est un diagramme de morphismes dans $\mathcal{C}$ où u (resp. v) est un épimorphisme admissible (resp. monomorphisme admissible) et si $(h_X, h_Z) \in A(X) \times A(Z)$ est tel que $u_*(h_X) = v^*(h_Z)$, alors il existe $h \in A(X \amalg Z)$ tel que $(\mathrm{Id}, vu)^*(h) = h_X$ et que $\mathrm{pr}_{2*}(h) = h_Z$.

Pour tout objet X de $\mathcal{C}$ (qui est une catégorie exacte munie d'une structure arithmétique), on appelle *structure arithmétique* sur X la donnée d'un élément h dans $A(X)$. Le couple (X, h) est alors appelé un *objet arithmétique* Si $p : X \to Z$ (resp. $i : Y \to X$) est un épimorphisme (resp. monomorphisme) admissible et si h est une structure arithmétique sur X, $p_*(h)$ (resp. i^*h) est appelée la structure arithmétique *quotient* (resp. *induite*) sur Z (resp. Y). Le triplet $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, A)$ est appelé une *catégorie exacte arithmétique.*

Exemple 4.3.24 Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ une catégorie exacte. Si pour tout objet X de $\mathcal{E}$ on désigne par $A(X)$ l'ensemble à un élément, alors $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, A)$ est une catégorie exacte arithmétique.

Définition 4.3.25 Soient (X', h') et (X, h) deux objets arithmétiques dans une catégorie exacte arithmétique. On dit qu'un morphisme $f : X' \to X$ est *compatible aux structures arithmétiques* de ces objets s'il existe

1) une décomposition

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Y_1 \arrow[dr, two heads, "v_1"] & & Y_2 \arrow[dr, two heads, "v_2"] & & \cdots\cdots \arrow[dr, two heads, "v_{n-1}"] & & Y_n \arrow[dr, two heads, "v_n"] & \\ X' = Z_0 \arrow[ur, tail, "u_1"] & & Z_1 \arrow[ur, tail, "u_2"] & & Z_2 \arrow[ur, tail, "u_3"] & & Z_{n-1} \arrow[ur, tail, "u_n"] & & Z_n = X \end{tikzcd}$$

de f telle que les u_i $(1 \le i \le n)$ soient des monomorphismes admissibles et que les v_i $(1 \le i \le n)$ soient des épimorphismes admissibles.

2) pour chaque $1 \le i \le n$, une structure arithmétique h_i sur Y_i telle que $u_1^* h_1 = h'$, que $v_{n*} h_n = h$ et que pour tout $1 \le i \le n-1$, $v_{i*} h_i = u_{i+1}^* h_{i+1}$.

Remarque 4.3.26 On déduit aussitôt de la définition des morphismes compatibles aux structures les assertions suivantes :

1) Si (X_1, h_1) et (X_2, h_2) sont deux objets arithmétiques dans une catégorie exacte arithmétique et si $f : X_1 \to X_2$ est un monomorphisme admissible (resp. épimorphisme admissible) tel que $f^* h_2 = h_1$ (resp. $f_* h_1 = h_2$), alors f est compatible aux structures arithmétiques.
2) Si (X_1, h_1) et (X_2, h_2) sont deux objets arithmétiques dans une catégorie exacte arithmétique et si $f : X_1 \to X_2$ est un morphisme nul, alors f est compatible aux structures arithmétiques.
3) Le composé de deux morphismes compatibles aux structures arithmétiques est compatible aux structures arithmétiques. Par conséquent, si $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, A)$ est une catégorie exacte arithmétique, alors les objets arithmétiques de $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ et les morphismes compatibles aux structures arithmétiques forment une catégorie.
4) Par le raisonnement par récurrence, l'axiome (**A**7) implique aussitôt que si (X, h_X) et (Y, h_Y) sont deux objets arithmétiques dans une catégorie exacte arithmétique et si $f : X \to Y$ est un morphisme qui est compatible aux structures arithmétiques, alors il existe un objet arithmétique (Z, h_Z) de la catégorie exacte arithmétique considérée ainsi qu'un décomposition $X \rightarrowtail^{u} Z \xrightarrow{v} \!\!\!\rightarrow Y$ de f en le composé d'un épimorphisme et d'un monomorphisme tel que $h_X = u^*(h_Z)$ et que $h_Y = v_*(h_Z)$.

Définition 4.3.27 Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, A)$ une catégorie exacte arithmétique. On désigne par $\mathcal{C}_A$ la catégorie des objets arithmétiques et des morphismes compatibles aux structures arithmétiques. Dans la suite, pour simplifier les notations, on utilise le symbole $\overline{X}$ pour désigner un objet arithmétique (X, h) s'il n'y a aucune ambiguïté sur la structure arithmétique que l'on considère. Si $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont deux objets arithmétiques, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\overline{X}, \overline{Y})$ est le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ des morphismes compatibles aux structures arithmétiques.

Par abus de notation, on désigne par $\mathcal{C}_A$ la classe des couples (X, h), où X est un objet de $\mathcal{C}$ et h est une structure arithmétique sur X. Un tel couple est appelé un *objet arithmétique* de $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, A)$. On dit qu'un objet arithmétique (X, h) est *non-nul* si X est non-nul dans $\mathcal{C}$. On dit que deux objets arithmétiques (X, h) et (X', h') sont *isomorphes* et on note $(X, h) \cong (X', h')$ s'il existe un isomorphisme $f : X \to X'$ tel que $h' = f_*(h)$ (et donc $h = f^*(h')$). Comme $\mathcal{C}$ est essentiellement petite, la classe $\mathcal{C}_A/\cong$ est en fait un ensemble.

On désigne par $\mathcal{E}_A$ la classe des suites de la forme

$$0 \longrightarrow (X', h') \xrightarrow{i} (X, h) \xrightarrow{p} (X'', h'') \longrightarrow 0$$

où (X', h'), (X, h) et (X'', h'') sont des objets arithmétiques et où

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X'' \longrightarrow 0$$

est une suite dans $\mathcal{E}$ tel que $h' = i_*(h)$ et que $h'' = p_*(h)$. On dit que (X', h') (resp. (X'', h'')) est un *sous-objet arithmétique admissible* (resp *quotient arithmétique admissible*) de (X, h).

On désigne par $K_0(\mathcal{C}, \mathcal{E}, A)$ le groupe commutatif libre engendré par $\mathcal{C}_A/\cong$, modulo le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[(X, h)] - [(X', h')] - [(X'', h'')]$, où

$$0 \longrightarrow (X', h') \xrightarrow{i} (X, h) \xrightarrow{p} (X'', h'') \longrightarrow 0$$

est une suite dans $\mathcal{E}_A$. Le groupe $K_0(\mathcal{C},\mathcal{E},A)$ est appelé le *groupe de Grothendieck* de la catégorie exacte arithmétique $(\mathcal{C},\mathcal{E},A)$. On a un homomorphisme "d'oubli" du groupe $K_0(\mathcal{C},\mathcal{E},A)$ vers $K_0(\mathcal{C},\mathcal{E})$, qui envoie $[(X,h)]$ vers $[X]$.

Soient $\widehat{\deg} : K_0(\mathcal{C},\mathcal{E},A) \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{rg} : K_0(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \mathbb{Z}$ deux homomorphismes de groupes. On suppose que $\mathrm{rg}([X]) > 0$ pour tout X non-nul. Pour tout objet arithmétique (X,h) dans $(\mathcal{C},\mathcal{E})$ on note $\widehat{\deg}(X,h)$ (resp. $\mathrm{rg}(X)$) pour $\widehat{\deg}([(X,h)])$ (resp. $\mathrm{rg}([X])$), appelé le *degré arithmétique* (resp. *rang*) de (X,h). Si (X,h) est non-nul, le quotient $\widehat{\mu}(X,h) = \widehat{\deg}(X,h)/\,\mathrm{rg}(X)$ est appelé la *pente arithmétique* de (X,h). On dit qu'un objet arithmétique non-nul (X,h) est *semi-stable* si pour tout sous-objet arithmétique admissible non-nul (X',h') de (X,h) on a $\widehat{\mu}(X',h') \le \widehat{\mu}(X,h)$.

Proposition 4.3.28 *Avec les notations comme ci-dessus.*

1) Si $0 \longrightarrow (X',h') \longrightarrow (X,h) \longrightarrow (X'',h'') \longrightarrow 0$ *est une suite dans* $\mathcal{E}_A$*, alors on a*

$$\widehat{\deg}(X,h) = \widehat{\deg}(X',h') + \widehat{\deg}(X'',h'').$$

2) Si (X,h) *est un objet arithmétique de rang* 1*, alors il est semi-stable.*

3) Si (X,h) *est un objet arithmétique non-nul, alors il est semi-stable si et seulement si pour tout quotient arithmétique admissible* (X'',h'') *non-trivial (à savoir* $X'' \neq X$ *et* $X'' \neq 0$*), on a* $\widehat{\mu}(X,h) \le \widehat{\mu}(X'',h'')$*.*

Démonstration. Comme $\widehat{\deg}$ est un homomorphisme de $K_0(\mathcal{C},\mathcal{E},A)$ vers $\mathbb{R}$, 1) est claire.

2) Si (X',h') est un sous-objet admissible non-nul de (X,h), on a une suite dans $\mathcal{C}_A$:

$$0 \longrightarrow (X',h') \xrightarrow{\ f\ } (X,h) \longrightarrow (X'',h'') \longrightarrow 0\ .$$

Comme X' est non-nul, $\mathrm{rg}(X') \ge 1$. Donc $\mathrm{rg}(X'') = 0$ et $X'' = 0$. Autrement dit, f est un isomorphisme. Donc on a $\widehat{\mu}(X',h') = \widehat{\mu}(X,h)$.

3) Pour toute suite

$$0 \longrightarrow (X',h') \longrightarrow (X,h) \longrightarrow (X'',h'') \longrightarrow 0$$

dans $\mathcal{E}_A$, (X'',h'') est non-trivial si et seulement si (X',h') est non-trivial. De plus si (X',h') et (X'',h'') sont non-triviaux, on a

$$\widehat{\mu}(X,h) = \frac{\mathrm{rg}(X')}{\mathrm{rg}(X)}\widehat{\mu}(X',h') + \frac{\mathrm{rg}(X'')}{\mathrm{rg}(X)}\widehat{\mu}(X'',h'').$$

Donc on a $\widehat{\mu}(X',h') \le \widehat{\mu}(X,h) \Longleftrightarrow \widehat{\mu}(X'',h'') \ge \widehat{\mu}(X,h)$. □

Définition 4.3.29 Soient $(\mathcal{C},\mathcal{E},A)$ une catégorie exacte arithmétique, $\widehat{\deg} : K_0(\mathcal{C},\mathcal{E},A) \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{rg} : K_0(\mathcal{C},\mathcal{E}) \to \mathbb{Z}$ deux homomorphismes tels que $\mathrm{rg}(X) > 0$ pour tout X non-nul. On dit que $(\mathcal{C},\mathcal{E},A,\widehat{\deg},\mathrm{rg})$ est une *catégorie de Harder-Narasimhan arithmétique* si les axiomes suivants sont vérifiés :

(**HNA**1) Pour tout objet non-nul X de $\mathcal{C}$ et toute structure arithmétique h sur X, il existe un sous-objet arithmétique admissible $(X_{\mathrm{des}},h_{\mathrm{des}})$ de (X,h) tel que

$$\widehat{\mu}(X_{\mathrm{des}},h_{\mathrm{des}}) = \sup\{\widehat{\mu}(X',h') \mid (X',h') \text{ est un sous-objet arithmétique admissible de } (X,h)\}.$$

De plus, pour tout sous-objet arithmétique (X_0, h_0) tel que $\widehat{\mu}(X_0, h_0) = \widehat{\mu}(X_{\mathrm{des}}, h_{\mathrm{des}})$, il existe un monomorphisme admissible $f : X_0 \to X_{\mathrm{des}}$ qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j"'] & X_{\mathrm{des}} \arrow[d, "i"] \\ & X \end{tikzcd}$$

commutatif, où i et j sont des monomorphismes admissibles canoniques, et tel que $f^*(h_{\mathrm{des}}) = h_0$.

(**HNA**2) Si (X_1, h_1) et (X_2, h_2) sont deux objets arithmétiques semi-stables tels que $\widehat{\mu}(X_1, h_1) > \widehat{\mu}(X_2, h_2)$, alors il n'y a pas de morphisme non-nul de X_1 vers X_2 qui soit compatible aux structures arithmétiques.

Remarque 4.3.30 Avec les notations de la definition 4.3.29, si X est un objet non-nul de $\mathcal{C}$ et h est une structure arithmétique sur X, alors $(X_{\mathrm{des}}, h_{\mathrm{des}})$ est un objet arithmétique semi-stable. Si (X, h) n'est pas semi-stable, on dit que $(X_{\mathrm{des}}, h_{\mathrm{des}})$ est le sous-objet arithmétique admissible qui *déstablise* (X, h).

Théorème 4.3.31 *Soit* $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, A, \widehat{\deg}, \mathrm{rg})$ *une catégorie de Harder-Narasimhan arithmétique. Si* (X, h) *est un objet arithmétique non-nul, alors il existe une suite de monomorphismes admissibles dans* $\mathcal{C}$*,*

$$0 = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n = X \ , \tag{4.9}$$

unique à un isomorphisme unique près, telle que, si on désigne par h_i *la structure arithmétique sur* X_i *induite par* h *(*$0 \le h \le n$*) et si on munit* X_j/X_{j-1} *de la structure arithmétique quotient de* h_j *(*$1 \le j \le n$*), alors*

1) l'objet arithmétique $\overline{X_j/X_{j-1}}$ *ainsi défini est semi-stable pour tout* $1 \le j \le n$ *;*

2) $\widehat{\mu}(\overline{X_1/X_0}) > \widehat{\mu}(\overline{X_2/X_1}) > \cdots > \widehat{\mu}(\overline{X_n/X_{n-1}})$.

Démonstration. On montre d'abord l'existence par récurrence sur le rang r de X. Le cas où (X, h) est semi-stable est trivial, et *a fortiori* l'existence est vraie pour $r = 1$. Pour le cas où (X, h) n'est pas semi-stable on prend $(X_1, h_1) = (X_{\mathrm{des}}, h_{\mathrm{des}})$. C'est un objet semi-stable. De plus $X' = X/X_1$ est non-nul. Le rang de X' est strictement plus petit que r, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence sur (X', h'), où h' est la structure arithmétique quotient et on obtient ainsi une suite de monomorphismes admissibles

$$0 = X_1' \longrightarrow X_2' \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1}' \longrightarrow X_n' = X'$$

vérifiant les conditions. D'après un procédé de relèvement analogue à celui de la démonstration du théorème 4.3.8, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 = X_0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"'] & \cdots \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{n-1}"] & X_n = X \arrow[d, "\pi"] \\ & 0 = X_1' \arrow[r] & X_2' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{n-1}' \arrow[r] & X_n' = X' \end{tikzcd}$$

où les lignes sont des monomorphismes admissibles et le flèches verticales sont des épimorphismes admissibles. De plus, pour tout entier $1 \le i \le n-1$, on a un isomorphisme naturel φ_i de

X_{i+1}/X_i vers X'_{i+1}/X'_i. On désigne par f_i (resp. f'_i) le morphisme canonique de X_i (resp. X'_i) vers X (resp. X'). On désigne par h_i (resp. h'_i) la structure arithmétique induite sur X_i (resp. X'_i). On a d'après l'axiome (**A**5) $\pi_{i*}(h_i) = \pi_{i*}f_i^*(h) = f_i'^*\pi_*(h) = h'_i$. Par conséquent, φ_{i*} envoie la structure arithmétique quotient sur X_{i+1}/X_i vers celle sur X'_{i+1}/X'_i. L'objet arithmétique $\overline{X_{i+1}/X_i}$ est donc semi-stable et on a l'égalité $\widehat{\mu}(\overline{X_{i+1}/X_i}) = \widehat{\mu}(\overline{X'_{i+1}/X'_i})$. Enfin, on a

$$\widehat{\mu}(\overline{X_2/X_1}) = \frac{\mathrm{rg}(X_2)\widehat{\mu}(\overline{X}_2) - \mathrm{rg}(X_1)\widehat{\mu}(\overline{X}_1)}{\mathrm{rg}(X_2) - \mathrm{rg}(X_1)} < \widehat{\mu}(\overline{X}_1)$$

puisque $\overline{X}_1 = \overline{X}_{\mathrm{des}}$. Par conséquent, la suite

$$0 = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n = X$$

satisfait aux conditions.

On démontre ensuite l'unicité de la suite (4.9). Par récurrence, il suffit de montrer que $\overline{X}_1 \cong \overline{X}_{\mathrm{des}}$. Soit i le premier indice tel que le morphisme canonique $X_{\mathrm{des}} \to X$ se factorise par X_{i+1}. Le morphisme composé $X_{\mathrm{des}} \to X_{i+1} \to X_{i+1}/X_i$ est non-nul. Comme $\overline{X}_{\mathrm{des}}$ et $\overline{X_{i+1}/X_i}$ sont semi-stables on a $\widehat{\mu}(\overline{X}_{\mathrm{des}}) \le \widehat{\mu}(\overline{X_{i+1}/X_i})$. Cela montre que $i = 0$ et $\widehat{\mu}(\overline{X}_{\mathrm{des}}) = \widehat{\mu}(\overline{X}_1)$. Donc le morphisme $X_1 \to X$ se factorise par X_{des}. Par conséquent, $X_{\mathrm{des}} \cong X_1$. □

Définition 4.3.32 Avec les notations du théorème 4.3.31, la suite (4.9) est appelée la suite de Harder-Narasimhan de l'objet arithmétique (X, h). On la note parfois

$$0 = \overline{X}_0 \longrightarrow \overline{X}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{X}_{n-1} \longrightarrow \overline{X}_n = \overline{X}$$

pour souligner les structures arithmétiques. La valeur $\widehat{\mu}(\overline{X}_1)$ (resp. $\widehat{\mu}(\overline{X/X_{n-1}})$) est appelée la *pente maximale* (resp. *pente minimale*) de $\overline{X}$, notée $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{X})$ (resp. $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{X})$).

Proposition 4.3.33 *On suppose que dans la catégorie exacte $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, tout épimorphisme admette un noyau dans $\mathcal{C}$. Soient (X, h_X) et (Z, h_Z) deux objets arithmétiques, (Y, h_Y) un quotient arithmétique admissible de (X, h_X), et $f : Y \to Z$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. Soit $\pi : X \to Y$ l'épimorphisme admissible canonique. Le morphisme f est compatible aux structures arithmétiques si et seulement si $f\pi$ l'est.*

Démonstration. Comme π est compatible aux structures arithmétiques on obtient que si f est compatible aux structures arithmétiques, il en est de même de $f\pi$. Il suffit donc démontrer que la compatibilité aux structures arithmétiques de $f\pi$ entraîne celle de f. D'après la remarque 4.3.26 4), il existe un objet arithmétique (W, h_W) et une décomposition $X \overset{i}{\rightarrowtail} W \overset{p}{\twoheadrightarrow} Z$ de πh tels que $i^*h_W = h_X$ et que $p_*h_W = h_Z$. Soit T le produit cofibré de i et π et soient $j : Y \to T$ et $q : W \to T$ les morphismes canoniques. D'après l'axiome (**Ex**5), j est un monomorphisme admissible. Soit $\tau : U \rightarrowtail X$ le noyau de π, on a $q = \mathrm{Coker}(i\tau)$. En effet, on a $qi\tau = j\pi\tau = 0$. D'autre part, si $\alpha : W \to V$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que $\alpha i\tau = 0$, alors il existe un unique morphisme $\beta : Y \to V$ tel que $\beta\pi = \alpha i$ puisque π est le conoyau de τ. Par conséquent, il existe un unique morphisme $\gamma : T \to V$ tel que $\gamma q = \alpha$. Par conséquent, q est le conoyau de $i\tau$, donc est un épimorphisme admissible. Les morphismes $p : W \twoheadrightarrow Z$ et $f : Y \to Z$

induissent un morphisme $g : T \to Z$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, tail, "\tau"'] & & \\ X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & W \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "p"] & \\ Y \arrow[r, tail, "j"'] & T \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Comme g est un épimorphisme, par l'hypothèse il a un noyau dans $\mathcal{C}$. Donc c'est un épimorphisme admissible d'après l'axiome (**Ex**7). Enfin, si on désigne par h_T la structure arithmétique q_*h_W sur T, on a $g_*(h_T) = p_*(h_W) = h_Z$ et $j^*(h_T) = \pi_*(i^*h_W) = \pi_*(h_X) = h_Y$. □

Corollaire 4.3.34 *Soit* $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, A, \widehat{\deg}, \mathrm{rg})$ *une catégorie de Harder-Narasimhan arithmétique. On suppose que tout épimorphisme dans* $\mathcal{C}$ *admette un noyau dans* $\mathcal{C}$*. Si* $\overline{X}$ *et* $\overline{Y}$ *sont deux objets arithmétiques et si* $f : \overline{X} \to \overline{Y}$ *est un morphisme non-nul compatible aux structures arithmétiques, alors* $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{X}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{Y})$.

Démonstration. Soit

$$0 = \overline{X}_0 \longrightarrow \overline{X}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{X}_{n-1} \longrightarrow \overline{X}_n = \overline{X}$$

la suite de Harder-Narasimhan de $\overline{X}$. Pour tout entier $0 \leq i \leq n$ soit $h_i : \overline{X}_i \to \overline{X}$ le monomorphisme canonique. Soit $1 \leq j \leq n$ le premier indice tel que fh_j soit non-nul. Comme $fh_{j-1} = 0$, le morphisme fh_j se factorise par X_j/X_{j-1}, d'où on a un morphisme non-nul g de X_j/X_{j-1} vers Y. D'après la proposition 4.3.33, g est compatible aux structures arithmétiques. Soit

$$0 = \overline{Y}_0 \longrightarrow \overline{Y}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{Y}_{m-1} \longrightarrow \overline{Y}_m$$

la suite de Harder-Narasimhan de $\overline{Y}$. Soit $1 \leq k \leq n$ le premier indice tel que g se factorise par Y_k. Si $\pi : Y_k \to Y_k/Y_{k-1}$ est le morphisme canonique, alors πg est non-nul puisque g ne se factorise pas par Y_{k-1}. De plus, il est compatible aux structure arithmétiques. Par conséquent, on a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{X}) \leq \widehat{\mu}(\overline{X}_j/\overline{X}_{j-1}) \leq \widehat{\mu}(\overline{Y}_k/\overline{Y}_{k-1}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{Y}).$$

□

Filtration et polygone de Harder-Narasimhan

On fixe dans toute la suite du sous-paragraphe une catégorie de Harder-Narasimhan arithmétique $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, A, \widehat{\deg}, \mathrm{rg})$.

Proposition 4.3.35 *Soient* $\overline{X}$ *un objet arithmétique non-nul et*

$$0 = \overline{X}_0^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \overline{X}_1^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{X}_{n-1}^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \overline{X}_n^{\mathrm{HN}} = \overline{X}$$

sa suite de Harder-Narasimhan. Si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ *on pose (avec* $\max \emptyset = 0$ *par convention)*

$$i_{\overline{X}}(\lambda) = \max\{1 \leq i \leq n \mid \widehat{\mu}(\overline{X}_i^{\mathrm{HN}}/\overline{X}_{i-1}^{\mathrm{HN}}) \geq \lambda\}$$

et $\overline{X}_\lambda = \overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)}$*, alors* $(\overline{X}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *est une* $\mathbb{R}$*-filtration continue à gauche de l'objet* $\overline{X}$ *dans* $\mathcal{C}_A$*. De plus, cette filtration est séparée, exhaustive et de longueur finie.*

Démonstration. Si $\lambda > \lambda'$, on a $i_{\overline{X}}(\lambda) \le i_{\overline{X}}(\lambda')$, donc $(\overline{X}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est bien une $\mathbb{R}$-filtration de $\overline{X}$. D'autre part, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{X}_\lambda \in \{\overline{X}^{\mathrm{HN}}_0, \cdots, \overline{X}^{\mathrm{HN}}_n\}$, donc cette filtration est de longueur finie. Quand $\lambda > \widehat{\mu}_{\max}(\overline{X})$, $i_{\overline{X}}(\lambda) = 0$, donc $\overline{X}_\lambda = \overline{X}^{\mathrm{HN}}_0 = 0$ est l'objet nul, donc la filtration est séparée. Lorsque $\lambda < \widehat{\mu}_{\min}(\overline{X})$, $i_{\overline{X}}(\lambda) = n$, donc $\overline{X}_\lambda = \overline{X}$, i.e., la filtration est exhaustive. Enfin, pour démontrer la continuité à gauche de cette filtration il suffit de vérifier que la fonction $\lambda \mapsto i_{\overline{X}}(\lambda)$ est continue à gauche. En fait, cette fonction est même localement constante à gauche : si $i_{\overline{X}}(\lambda) = 0$, alors pour tout entier $1 \le i \le n$ on a $\widehat{\mu}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_i/\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i-1}) < \lambda$, donc il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ on ait $\widehat{\mu}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_i/\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i-1}) < \lambda - \varepsilon$, i.e., $i_{\overline{X}}(\lambda - \varepsilon) = 0$; si $i_{\overline{X}}(\lambda) = n$, alors pour tout entier $1 \le i \le n$ et tout $\varepsilon \ge 0$ on a $\widehat{\mu}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_i/\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i-1}) \ge \lambda \ge \lambda - \varepsilon$, d'où $i_{\overline{X}}(\lambda - \varepsilon) = n$; enfin si $1 \le i_{\overline{X}}(\lambda) \le n - 1$, alors on a $\widehat{\mu}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)}/\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)-1}) \ge \lambda$ et $\widehat{\mu}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)+1}/\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)}) < \lambda$, donc il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ on ait $\widehat{\mu}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)}/\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)-1}) \ge \lambda - \varepsilon$ et $\widehat{\mu}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)+1}/\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)}) < \lambda - \varepsilon$, i.e., $i_{\overline{X}}(\lambda - \varepsilon) = i_{\overline{X}}(\lambda)$. □

Définition 4.3.36 Avec les notations de la proposition 4.3.35, la filtration $(\overline{X}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est appelée la *filtration de Harder-Narasimhan* de X. La *filtration de Harder-Narasimhan* de l'objet nul est par définition le foncteur constant qui associe à chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ l'objet nul.

Proposition 4.3.37 *Avec les notations de la proposition 4.3.35, tout morphisme dans* $\mathcal{C}_A$ *est compatible avec les filtrations de Harder-Narasimhan de sa source et de son but.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ un morphisme compatible aux structures arithmétiques. Le cas où X ou Y est nul est trivial. On supposera X et Y non-nuls. Soient

$$0 = \overline{X}^{\mathrm{HN}}_0 \longrightarrow \overline{X}^{\mathrm{HN}}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{X}^{\mathrm{HN}}_{n-1} \longrightarrow \overline{X}^{\mathrm{HN}}_n = X$$

la suite de Harder-Narasimhan de $\overline{X}$ et

$$0 = \overline{Y}^{\mathrm{HN}}_0 \longrightarrow \overline{Y}^{\mathrm{HN}}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{Y}^{\mathrm{HN}}_{m-1} \longrightarrow \overline{Y}^{\mathrm{HN}}_m = Y$$

celle de Y. Pour tous entiers $0 \le i < j \le m$ soit $P_{j,i}$ le morphisme canonique de Y^{HN}_j vers $Y^{\mathrm{HN}}_j/Y^{\mathrm{HN}}_i$. Pour tout entier $0 \le i \le n$ soit U_i le monomorphisme canonique de X^{HN}_i vers X. Soit λ un nombre réel. Si $i_{\overline{X}}(\lambda) = 0$ ou si $i_{\overline{Y}}(\lambda) = 0$ on définit F_λ comme le morphisme nul de X_λ vers Y_λ ; si $i_{\overline{Y}}(\lambda) = m$ on a $\overline{Y}_\lambda = \overline{Y}$ et on définit F_λ comme le composé $fU_{i_X(\lambda)}$; sinon on a $\widehat{\mu}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)}/\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)-1}) \ge \lambda$ et $\widehat{\mu}(\overline{Y}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{Y}}(\lambda)}/\overline{Y}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{Y}}(\lambda)-1}) \ge \lambda$, mais $\widehat{\mu}(\overline{Y}^{\mathrm{HN}}_j/\overline{Y}^{\mathrm{HN}}_{j-1}) < \lambda$ pour tout $j > i_{\overline{Y}}(\lambda)$. On démontre par récurrence que le morphisme $fU_{i_{\overline{X}}(\lambda)}$ se factorise par $Y^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{Y}}(\lambda)}$. D'abord le morphisme $fU_{i_{\overline{X}}(\lambda)}$ se factorise certainement par $Y^{\mathrm{HN}}_m = Y$. S'il se factorise par $\varphi_j : X^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)} \to Y^{\mathrm{HN}}_j$, où $j > i_{\overline{Y}}(\lambda)$, alors le morphisme composé $P_{j,j-1}\varphi_j$ est forcément nul car (cf le corollaire 4.3.34)

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{Y}^{\mathrm{HN}}_j/\overline{Y}^{\mathrm{HN}}_{j-1}) < \lambda \le \widehat{\mu}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)}/\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)-1}) = \widehat{\mu}_{\min}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i_{\overline{X}}(\lambda)}).$$

Donc le morphisme $fU_{i_{\overline{X}}(\lambda)}$ se factorise par Y^{HN}_{j-1}. Par la méthode de récurrence on obtient que $fU_{i_{\overline{X}}(\lambda)}$ se factorise (de façon unique) par $F_\lambda : X_{i_{\overline{X}}(\lambda)} \to Y_{i_{\overline{Y}}(\lambda)}$. Enfin, la famille de morphismes

$F = (F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est un morphisme de foncteurs tel que (F, f) soit un morphisme de filtrations. □

Remarque 4.3.38 Avec les notations de la proposition 4.3.35, on a un foncteur HN de la catégorie $\mathcal{C}_A$ vers la catégorie $\mathbf{Fil}^g_f(\mathcal{C}_A)$ qui envoie chaque objet arithmétique $\overline{X}$ de $\mathcal{C}$ vers sa filtration de Harder-Narasimhan, appelé le foncteur de Harder-Narasimhan de $\mathcal{C}_A$. On remarque que pour tout objet arithmétique $\overline{X}$ de $\mathcal{C}$, $\mathrm{HN}(\overline{X})$ est une filtration séparée, exhaustive, continue à gauche et de longueur finie de X. De plus, si $f : \overline{X} \to \overline{Y}$ est un morphisme compatible aux structures arithmétiques, alors $\mathrm{HN}(f)(-\infty) = f$.

Proposition 4.3.39 *Soient $\overline{X}$ un objet arithmétique non-nul, $\overline{Y}$ un sous-objet arithmétique admissible de $\overline{X}$, et λ un nombre réel. Si $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{Y}) \geq \lambda$, alors le monomorphisme canonique $f : Y \rightarrowtail X$ se factorise par X_λ.*

Démonstration. Comme f est compatible aux structures arithmétiques, la restriction de f sur Y_λ se factorise par X_λ. Comme $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{Y}) \geq \lambda$, on a $Y_\lambda = Y$, donc f se factorise par X_λ. □

Soient $\overline{X}$ un objet arithmétique non-nul dans $\mathcal{C}_A$ et

$$0 = \overline{X}^{\mathrm{HN}}_0 \longrightarrow \overline{X}^{\mathrm{HN}}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{X}^{\mathrm{HN}}_{n-1} \longrightarrow \overline{X}^{\mathrm{HN}}_n = X$$

sa suite de Harder-Narasimhan. Pour tout $0 \leq i \leq n$ on note $t_i = \operatorname{rg} X^{\mathrm{HN}}_i / \operatorname{rg} X$. Pour tout $0 \leq i \leq n-1$, on note $\widehat{\lambda}_i = \widehat{\mu}(\overline{X}^{\mathrm{HN}}_{i+1}/\overline{X}^{\mathrm{HN}}_i)$. Alors la fonction

$$P_{\overline{X}}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\widehat{\deg} \overline{X}^{\mathrm{HN}}_i}{\operatorname{rg} X} + \widehat{\lambda}_i (t - t_i) \right) 1\!\!1_{[t_i, t_{i+1}]}(t).$$

est un polygone, appelé le *polygone de Harder-Narasimhan* de $\overline{X}$.

La mesure de probabilté

$$\nu_{\overline{X}} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{rg}(X^{\mathrm{HN}}_i) - \operatorname{rg}(X^{\mathrm{HN}}_{i-1})}{\operatorname{rg} X} \delta_{\widehat{\lambda}_i}$$

est appelée la *mesure de Harder-Narasimhan* de $\overline{X}$. On définit la mesure de Harder-Narasimhan d'un objet arithmétique nul comme la mesure nulle sur $\mathbb{R}$.

Si $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Vec}_K$ est un foncteur exact, alors il induit un homomorphisme de groupes : $\widehat{K}_0(F) : \widehat{K}_0(\mathcal{C}, \mathcal{E}, A) \to K_0(\mathbf{Vec}_K)$ et un foncteur $\widehat{F} : \mathcal{C}_A \to \mathbf{Vec}_K$ qui envoie un objet arithmétique $\overline{X}$ en $F(X)$. Le foncteur $\widehat{F}$ induit un foncteur $\widetilde{F} : \mathbf{Fil}^g_f(\mathcal{C}_A) \to \mathbf{Fil}^g_f(\mathbf{Vec}_K)$. Si $\overline{X}$ est un objet arithmétique dans $\mathcal{C}_A$, alors $\widetilde{F} \circ \mathrm{HN}(\overline{X})$ est une $\mathbb{R}$-filtration de l'espace vectoriel $F(X)$.

Proposition 4.3.40 *On suppose que F respecte l'homomorphisme de rang, à savoir*

$$\operatorname{rg}_{\mathbf{Vec}_K} \circ K_0(F) = \operatorname{rg}_{\mathcal{C}}.$$

Alors pour tout objet arithmétique non-nul $\overline{X}$ dans $\mathcal{C}_A$, le polygone associé à la filtration $\widetilde{F} \circ \mathrm{HN}(\overline{X})$ est égale au polygone de Harder-Narasimhan de $\overline{X}$, la mesure de probabilité associée à $\widetilde{F} \circ \mathrm{HN}(\overline{X})$ s'identifie à la mesure de Harder-Narasimhan de $\overline{X}$.

Démonstration. Soit

$$0 = \overline{X}_0^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \overline{X}_1^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{X}_{n-1}^{\mathrm{HN}} \longrightarrow \overline{X}_n^{\mathrm{HN}} = \overline{X}$$

la suite de Harder-Narasimhan de $\overline{X}$. La dérivée de la fonction $P_{\overline{X}}(t)$ existe presque partout. Si on note $t_i = \operatorname{rg} X_i^{\mathrm{HN}} / \operatorname{rg} X$ pour $0 \le i \le n$ et $\widehat{\lambda}_i = \widehat{\mu}(\overline{X}_{i+1}^{\mathrm{HN}} / \overline{X}_i^{\mathrm{HN}})$ pour tout $0 \le i \le n-1$, alors on a

$$P'_{\overline{X}}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{\lambda}_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t).$$

Soit ν la mesure de probabilité associée à la filtration $\widetilde{F} \circ \mathrm{HN}(\overline{X})$. On a

$$\nu = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \delta_{\widehat{\lambda}_i} = \nu_{\overline{X}}.$$

Si on définit

$$f(x) = \nu(]x, +\infty[) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[\widehat{\lambda}_{i+1}, \widehat{\lambda}_i[}(x) t_{i+1},$$

où par convention $\widehat{\lambda}_n = +\infty$. On trouve immédiatement $f^* = P'_{\overline{X}}$. Par conséquent, le polygone associé à la filtration $\widetilde{F} \circ \mathrm{HN}(\overline{X})$ s'identifie à $P_{\overline{X}}$. □

4.4 Quelques exemples de catégories de Harder-Narasimhan ordinaires ou arithmétiques

4.4.1 Exemples de catégories de Harder-Narasimhan

La catégorie des faisceaux localement libres sur une courbe non-singulière

Soient k un corps, C une courbe projective non-singulière sur k, η le point générique de C et K le corps des fonctions méromorphes sur C. On désigne par $\mathbf{Coh}(C)$ (resp. $\mathbf{Vec}(C)$) la catégorie des $\mathcal{O}_C$-modules cohérents (resp. localement libres de rang fini). La catégorie $\mathbf{Coh}(C)$ est abélienne. D'après [76], on sait que $\mathbf{Vec}(C)$ est une sous-catégorie exacte de $\mathbf{Coh}(C)$. Dans la section 1.3 on a associé à chaque $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini E deux entiers $\deg(E)$ et $\operatorname{rg}(E)$. La proposition 1.3.2 1) montre que, si on désigne par $\mathcal{E}$ la classe des suites exactes dans $\mathbf{Vec}(C)$, alors deg et rg induisent des homomorphisme de $K_0(\mathbf{Vec}(C), \mathcal{E})$ vers $\mathbb{Z}$. D'autre part, pour tout $\mathcal{O}_C$-module localement libre E, $\operatorname{rg} E \ge 0$. La proposition 1.3.6 implique que l'axiom (**HN**1) est vérifié. Enfin, si E et F sont deux $\mathcal{O}_C$-modules localement libres semi-stables et si $\varphi : E \to F$ est un homomorphisme, alors l'image G de φ dans F est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre, et

$$\mu(E) = \mu_{\min}(E) \le \mu(G) \le \mu_{\max}(F) = \mu(F).$$

Donc l'axiome (**HN**2) est aussi vérifié. Par conséquent, $(\mathbf{Vec}(C), \mathcal{E}, \deg, \operatorname{rg})$ est une catégorie de Harder-Narasimhan. Enfin on remarque que le foncteur $E \mapsto E_K$ est un foncteur de $\mathbf{Vec}(C)$ vers la catégorie des espaces vectoriels sur K qui préserve rg.

La catégorie des faisceaux sans torsion sur une variété polarizée

Soient X un schéma projectif et géométriquement normal sur le spectre d'un corps K et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample. Soit d la dimension de X. On suppose que $d \geq 1$. On désigne par $\mathbf{FST}(X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents sans torsion. Si

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents et si E' et E'' sont sans torsion, alors il en est de même de E. Par conséquent, $\mathbf{FST}(X)$ est une sous-catégorie exacte de $\mathbf{Coh}(X)$ — la catégorie abélienne des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents. Si E est un $\mathcal{O}_X$-module sans torsion, le degré de E est par définition le nombre d'intersection $\deg E := c_1(L)^{d-1}c_1(E)$. Si E est non-nul, on désigne par $\mu(E)$ le quotient $\deg E/\operatorname{rg} E$. D'après [69] (voir aussi [83]), si on désigne par $\mathcal{E}$ la classe des suites exactes

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

dans $\mathbf{Coh}(X)$ telles que E', E et E'' sont tous sans torsion, alors $(\mathbf{FST}(X), \mathcal{E}, \deg, \operatorname{rg})$ est une catégorie de Harder-Narasimhan.

4.4.2 Exemples de catégories de Harder-Narasimhan arithmétiques

La catégorie des fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$

Proposition 4.4.1 *Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire d'espaces vectoriels hermitiens. Si $\|\varphi\| \leq 1$, alors il existe une structure hermitienne sur $E \oplus F$ telle que dans la décomposition $E \xrightarrow{(\mathrm{Id},\varphi)} E \oplus F \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} F$ de φ, (Id, φ) soit une inclusion[8] et pr_2 soit une projection orthogonale.*

Démonstration. Comme $\|\varphi\| \leq 1$, on obtient $\|\varphi^*\| \leq 1$. Par conséquent, on a $\|\varphi^*\varphi\| \leq 1$ et $\|\varphi\varphi^*\| \leq 1$. Donc $\mathrm{Id}_E - \varphi^*\varphi$ et $\mathrm{Id}_F - \varphi\varphi^*$ sont des matrices hermitiennes à valeurs propres positives. Par conséquent, il existe deux endomorphismes hermitiens à valeurs propres positives P et Q de E et F respectivement tels que $P^2 = \mathrm{Id}_E - \varphi^*\varphi$ et $Q^2 = \mathrm{Id}_F - \varphi\varphi^*$.

Si x est un vecteur propre de $\varphi\varphi^*$ de valeur propre λ, alors φ^*x est un vecteur propre de $\varphi^*\varphi$ de même valeur propre. Par conséquent, $\varphi^*Qx = \sqrt{1-\lambda}\varphi^*x = P\varphi^*x$. Comme F est engendré par les vecteurs propres de $\varphi\varphi^*$, on a $\varphi^*Q = P\varphi^*$. D'après la même raison on a $Q\varphi = \varphi P$. Soit $R = \begin{pmatrix} P & \varphi^* \\ \varphi & -Q \end{pmatrix}$. Alors R est hermitienne, et

$$R^2 = \begin{pmatrix} P^2 + \varphi^*\varphi & P\varphi^* - \varphi^*Q \\ \varphi P - Q\varphi & \varphi\varphi^* + Q^2 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{E\oplus F}.$$

Par conséquent, R est une isométrie. Soit $i : E \rightarrow E \oplus F$ l'application d'inclusion qui envoie x en $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & F \\ E \oplus F \arrow[r, "R"'] & E \oplus F \arrow[u, "\mathrm{pr}_2"'] \end{tikzcd}$$

[8] à savoir, l'image réciproque de la structure hermitienne sur $E \oplus F$ par (Id, φ) et la structure hermitienne sur E coïncident.

est commutatif. Comme $\varphi^*\varphi$ est auto-adjointe, il existe une base orthonormée $(x_i)_{1\le i\le n}$ de E telle que $\varphi^*\varphi x_i = \lambda_i x_i$. On suppose que $0 \le \lambda_j < 1$ pour tout $1 \le j \le k$ et $\lambda_j = 1$ pour tout $k < j \le n$. Soit $B : E \to E$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire telle que $B(x_i) = \sqrt{1-\lambda_i}x_i$ pour $1 \le i \le k$ et telle que $B(x_j) = x_j$ pour $j > k$ et soit $S = \begin{pmatrix} B & \varphi^* \\ 0 & \mathrm{Id}_F \end{pmatrix} : E \oplus F \to E \oplus F$. Comme $Ri = \begin{pmatrix} P \\ \varphi \end{pmatrix}$ et comme

$$(BP + \varphi^*\varphi)(x_i) = \sqrt{1-\lambda_i}Bx_i + \lambda_i x_i = \begin{cases} (1-\lambda_i)x_i + \lambda_i x_i = x_i, & 1 \le i \le k, \\ 0Bx_i + x_i = x_i, & i > k, \end{cases}$$

on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & E \oplus F \arrow[dd, "S"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\ E \arrow[ur, "Ri"] \arrow[dr, "\tau"'] & & F \\ & E \oplus F \arrow[ur, "\mathrm{pr}_2"'] & \end{tikzcd}$$

où $\tau = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_E \\ \varphi \end{pmatrix}$. On munit $E \oplus F$ du produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ tel que pour tout $(x, y) \in (E \oplus F)^2$ on ait

$$\langle x, y \rangle_0 = \left\langle S^{-1}x, S^{-1}y \right\rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit hermitien la somme directe orthogonale. Alors pour tout $(u, v) \in E \times E$,

$$\langle \tau(u), \tau(v) \rangle_0 = \langle SRi(u), SRi(v) \rangle_0 = \langle Ri(u), Ri(v) \rangle = \langle i(u), i(v) \rangle = \langle u, v \rangle .$$

Enfin, le noyau de pr_2 est stable par S, donc les images directes de $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ et de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par pr_2 sont les mêmes. $\square$

Soit K un corps de nombres. On désigne par $\mathbf{Vec}(\mathcal{O}_K)$ la catégorie des $\mathcal{O}_K$-module localement libre de rang fini. Si on désigne par $\mathcal{E}$ la classe des suites exactes courtes de $\mathcal{O}_K$-modules dans $\mathbf{Vec}(\mathcal{O}_K)$, alors $(\mathbf{Vec}(\mathcal{O}_K), \mathcal{E})$ est une catégorie exacte. Pour tout $\mathcal{O}_K$-module localement libre de rang fini E, on désigne par $A(E)$ l'ensemble des métriques hermitiennes sur $E(\mathbb{C})$. Si $i : F \to E$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module saturé de E on a une application $i^* : A(E) \to A(F)$ qui envoie une métrique hermitienne h sur $E(\mathbb{C})$ vers la restriction de h sur $F(\mathbb{C})$. Si $\pi : E \to G$ est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_K$-modules localement libres, on a une application $\pi_* : A(E) \to A(G)$ qui envoie une métrique hermitienne h sur $E(\mathbb{C})$ vers la métrique quotient de h sur $G(\mathbb{C})$. Le triplet $(\mathbf{Vec}(\mathcal{O}_K), \mathcal{E}, A)$ satisfait aux axiomes dans la définition 4.3.23, donc est une catégorie exacte arithmétique. Les objets arithmétiques dans cette catégorie exacte arithmétique sont les fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.

Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels hermitiens. Si $\varphi : E \to F$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}_K$-module compatible aux structures arithmétiques, alors pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$ on a $\|\varphi\|_\sigma \le 1$. Réciproquement soit $\varphi : E \to F$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_K$-modules tel que pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$ on ait $\|\varphi\|_\sigma \le 1$. Soient $j = (\mathrm{Id}, \varphi) : E \to E \oplus F$ et $\pi : E \oplus F \to F$ la deuxième projection. D'après la proposition 4.4.1, pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$, il existe un produit scalaire hermitien sur $(E \oplus F)_\sigma$ tel que $j_\sigma : E_\sigma \to (E \oplus F)_\sigma$ soit un sous-espace hermitien et tel que $\pi_\sigma : (E \oplus F)_\sigma \to F_\sigma$ soit un quotient hermitien. Cette construction est stable par la conjugaison complexe car les métriques hermitiennes sur $E(\mathbb{C})$ et sur $F(\mathbb{C})$ le sont. On a donc trouvé une métrique hermitienne h sur $(E \oplus F)(\mathbb{C})$ telle que

$(E \oplus F, h)$ soit un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ de telle sorte que $j : \overline{E} \to (E \oplus F, h)$ soit un sous-fibré vectoriel hermtien et que $\pi : (E \oplus F, h) \to \overline{F}$ soit un fibré vectoriel hermitien quotient. Par conséquent, φ est compatible aux structures arithmétiques.

Si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont deux fibrés vectoriels hermtiens sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, $\varphi : E \to F$ un homomorphisme non-nul compatible aux structures arithmétiques. D'après l'inégalité de pentes, on a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\mathfrak{p} \in \Sigma_f} \log \|\varphi\|_{\mathfrak{p}} + \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in \Sigma_\infty} \log \|\varphi\|_\sigma \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}).$$

En particulier, si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont semi-stables et si $\widehat{\mu}(\overline{E}) > \widehat{\mu}(\overline{F})$, il n'y a pas d'homomorphisme non-nul de E vers F qui soit compatible aux structures arithmétiques. Ainsi on a construit une catégorie de Harder-Narasimhan arithmétique $(\mathbf{Vec}(\mathcal{O}_K), \mathcal{E}, A, \widehat{\deg}, \mathrm{rg})$. D'autre part, on a un foncteur de $\mathbf{Vec}(\mathcal{O}_K)$ vers la catégorie des espace vectoriel de rang fini sur K qui envoie $\overline{E}$ en E_K. De plus, ce foncteur préserve la fonction de rang.

Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on sait définir le polygone de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$ (cf. le sous-paragraphe 4.3.3).

Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, $\varphi : E_K \to F_K$ un homomorphisme non-nul d'espaces vectoriels sur K. On rappelle que la hauteur de φ est par définition la valeur

$$h(\varphi) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\mathfrak{p} \in \Sigma_f} \log \|\varphi\|_{\mathfrak{p}} + \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in \Sigma_\infty} \log \|\varphi\|_\sigma.$$

Le lemme du produit montre que, si $a \in K$ est un élément non-nul, alors $h(\varphi) = h(a\varphi)$. En fait, il existe un élément non-nul $a \in \mathcal{O}_K$ tel que $a\varphi$ admette un relèvement $\Phi : E \to F$. Soit $(\overline{E}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ (resp. $(\overline{F}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$) la filtration de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$ (resp. $\overline{F}$). Soit E'_λ l'image de E_λ dans F par Φ. D'après l'inégalité de pentes on a $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_\lambda) \leq \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}'_\lambda) + h(\varphi)$. Par conséquent, on a $\widehat{\mu}_{\min}(E'_\lambda) \geq \lambda - h(\varphi)$, et donc la restriction de φ sur $E_{\lambda,K}$ se factorise par $F_{\lambda - h(\varphi),K}$.

Chapitre 5

Pente maximale du produit tensoriel de fibrés vectoriels hermitiens

5.1 Énoncé du théorème principal

Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers algébriques. Si $(\overline{E}_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de fibrés vectoriels hermitiens non-nuls sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, alors on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_1\otimes\cdots\otimes\overline{E}_n)\geq\sum_{i=1}^n\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) \tag{5.1}$$

En effet, pour chaque entier $1\leq i\leq n$, il existe un sous-$\mathcal{O}_K$-module F_i de E_i tel que $\widehat{\mu}(\overline{F}_i)=\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i)$. D'autre part, $F_1\otimes\cdots\otimes F_n$ est un sous-$\mathcal{O}_K$-module de $E_1\otimes\cdots\otimes E_n$. On a donc la comparaison

$$\sum_{i=1}^n\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i)=\sum_{i=1}^n\widehat{\mu}(\overline{F}_i)=\widehat{\mu}(\overline{F}_1\otimes\cdots\otimes\overline{F}_n)\leq\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_1\otimes\cdots\otimes E_n). \tag{5.2}$$

J.-B. Bost a conjecturé que l'on a l'égalité (cf. [9])

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_1\otimes\cdots\otimes\overline{E}_n)=\sum_{i=1}^n\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i).$$

Ceci est aussi équivalent à dire que le produit tensoriel d'un nombre fini de fibrés vectoriels hermitiens semi-stables est encore semi-stable. D'après (5.2), il suffit de démontrer l'inégalité inverse qui reste encore ouverte. Certains cas particuliers ont été démontrés, et des résultats sont connus pour l'inégalité inverse de (5.2) à des termes d'erreurs (qui dépendent des $\operatorname{rg}E_i$) près. Notamment :

1) De Shalit et Parzan [25] ont démontré récemment que si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont deux fibrés vectoriels hermitiens semi-stables sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, et si $\operatorname{rg}E+\operatorname{rg}F\leq 5$, alors $\overline{E}\otimes\overline{F}$ est encore semi-stable.
2) Dans [8] (voir aussi [40]), en utilisant la comparaison d'un fibré vectoriel hermitien à la somme directe de fibrés inversibles hermitiens, J.-B. Bost a démontré que

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_1\otimes\cdots\otimes\overline{E}_n)\leq\sum_{i=1}^n\Big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i)+3\operatorname{rg}E_i\log(\operatorname{rg}E_i)\Big).$$

3) Dans le cas où il ne s'agit que le produit tensoriel de deux fibrés vectoriels non-nuls sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, Bost et Künnemann [14] ont démontré que

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}\otimes\overline{F})\leq\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})+\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F})+\frac{1}{2}(\log\operatorname{rg}E+\log\operatorname{rg}F)+\frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]},\tag{5.3}$$

où Δ_K est le discriminant de K.

Remarque 5.1.1 L'inégalité (5.3) entraîne par récurrence que si $(\overline{E}_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des fibrés vectoriels hermitiens non-nuls sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, alors

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_1\otimes\cdots\otimes\overline{E}_n)\leq\sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{\mu}(\overline{E}_i)+\frac{\lceil\log_2 n\rceil}{2}\log(\operatorname{rg}E_i)\Big)+2^{\lceil\log_2 n\rceil}\frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.\tag{5.4}$$

On énonce ici le théorème principal du chapitre :

Théorème 5.1.2 *Soient $\overline{E}_1,\cdots,\overline{E}_n$ une famille finie de fibrés vectoriels hermitiens non-nuls sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, alors*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_1\otimes\cdots\otimes\overline{E}_n)\leq\sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i)+\log(\operatorname{rg}E_i)\Big).\tag{5.5}$$

On résume d'ici les étapes principaux de la démonstration :

1) Majoration du degré d'Arakelov d'un sous-fibré inversible sous des hypothèses de semi-stabilité (au sens de la théorie geométrique des invariants). L'idée remonte à un article de J.-B. Bost [7], inspiré par Bogomolov [80], Gieseker [36] et Cornalba-Harris [23]. On utilisera la théorie des invariants "classique" qui fournit des polynômes invariants définis sur $\mathbb{Z}$ et de normes archimédiennes contrôlées.
2) La technique de Ramanan-Ramanathan [77] (reformulée par Totaro [86]), qui est une variante de la construction de Kempf [61], permet d'enlever l'hypothèse de semi-stabilité dans l'étape 1).
3) La comparaison de la pente maximale et du plus grand degré de sous-fibré inversible developpée dans [14] implique une inégalité qui est un peu plus faible que (5.5).
4) Enfin, un astuce de "passage à la limite" permet de conclure.

Remarque 5.1.3 Dans le cas où il ne s'agit que le produit tensoriel de deux fibrés vectoriels hermitiens et où $K=\mathbb{Q}$, l'inégalité (5.3) est plus forte que (5.5).

Si on applique le théorème 5.1.2 à $(\overline{E}_i^{\vee})_{1\leq i\leq n}$ on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5.1.4 *Soit $(\overline{E}_i)_{1\leq i\leq n}$ une collection de fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Si on note $\overline{E}=\overline{E}_1\otimes\cdots\otimes\overline{E}_n$, alors*

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})\geq\sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_i)-\log(\operatorname{rg}(E_i))\Big).$$

5.2 Rappels sur la théorie des invariants

5.2.1 Rappels sur la théorie géométrique des invariants

Dans ce sous-paragraphe, on rappelle quelques résultats dans la théorie géométrique des invariants. Les références sont [72] et [77].

Modules inversibles G-linéaires, sous-groupes à un paramètre, et invariants de Mumford

Soient K un corps, G un groupe algébrique réductif sur $\operatorname{Spec} K$ et X un schéma sur $\operatorname{Spec} K$. On suppose que G agisse à gauche sur X et on désigne par $\sigma : G \times_K X \to X$ l'action du groupe. On désigne par $m : G \times_K G \to G$ la loi du groupe. Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On rappelle qu'une *G-linéarisation* de L est par définition un isomorphisme $\phi : \sigma^* L \to \operatorname{pr}_2^* L$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
{[\operatorname{pr}_2 \circ (\operatorname{Id}_G \times \sigma)]^* L} \arrow[rr, equal] & & {[\sigma \circ \operatorname{pr}_{23}]^* L} \arrow[d, "\operatorname{pr}_{23}^* \phi"] \\
{[\sigma \circ (\operatorname{Id}_G \times \sigma)]^* L} \arrow[u, "(\operatorname{Id}_G \times \sigma)^* \phi"] \arrow[d, equal] & & {[\operatorname{pr}_2 \circ \operatorname{pr}_{23}]^* L} \arrow[d, equal] \\
{[\sigma \circ (m \times \operatorname{Id}_X)]^* L} \arrow[rr, "(m \times \operatorname{Id}_X)^* \phi"'] & & {[\operatorname{pr}_2 \circ (m \times \operatorname{Id}_X)]^* L}
\end{tikzcd}$$

commute, où l'on a désigné par pr_2 et pr_{23} les projections sur les derniers facteurs :

$$\operatorname{pr}_2 : G \times_K X \longrightarrow X, \text{ et } \operatorname{pr}_{23} : G \times_K G \times_K X \longrightarrow G \times_K X.$$

Le couple (L, ϕ) est appelé un $\mathcal{O}_X$-module inversible *G-linéaire*. Si ϕ est une G-linéarisation de L, alors $\phi^\vee : \sigma^* L^\vee \to \operatorname{pr}_2^* L^\vee$ est une G-linéarisation de $L^\vee$. Si (L_1, ϕ_1) et (L_2, ϕ_2) sont deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles G-linéaires, alors $\phi_1 \otimes \phi_2$ est une G-linéarisation de $L_1 \otimes L_2$. Par conséquent, les classes d'isomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles G-linéaires forment un groupe, noté $\operatorname{Pic}^G(X)$.

On appelle *sous-groupe à un paramètre* de G tout morphisme de K-schémas en groupes de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$ vers G. Soit $h : \mathbb{G}_{\mathrm{m},K} \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G. Si $j : x \to X$ est un point rationnel de X, alors h et x induisent un morphisme de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$ vers X :

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m},K} \xrightarrow{h} G \xrightarrow{\sim} G \times_K x \xrightarrow{\operatorname{Id} \times j} G \times_K X \xrightarrow{\sigma} X.$$

D'après [50] I.8.2.12 (qui est essentiellement une conséquence du critère valuatif de propreté), si X est propre sur K, ce morphisme se prolonge en un morphisme $f_{h,x}$ de $\mathbb{A}^1_K$ vers X. Le point $f_{h,x}(0)$ est un point rationnel de X et est invariant par l'action du groupe $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$ (via λ). Par conséquent, si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible G-linéaire, l'action de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$ sur $L|_{f_{h,x}(0)}$ définit un caractère de la forme $t \mapsto t^{\mu(x,h,L)}$ de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$, où $\mu(x,h,L) \in \mathbb{Z}$. De plus, si on fixe x et h, alors $\mu(x,h,\cdot) : \operatorname{Pic}^G(X) \to \mathbb{Z}$ est un homomorphisme de groupes.

Si $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$ agit (à gauche) sur un espace vectoriel V de rang fini sur K (i.e., si l'on se donne un morphisme de groupes algébriques sur K de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$ vers $\mathbb{GL}_K(V)$), on a une décomposition de V en somme directe de sous-espaces stables par l'action de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V(i),$$

où l'action de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$ sur $V(i)$ est

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m},K} \times_K V(i) \xrightarrow{(t \mapsto t^i) \times \operatorname{Id}} \mathbb{G}_{\mathrm{m},K} \times_K V(i) \longrightarrow V(i) \ ,$$

la seconde flèche étant l'action naturelle par multiplication. Cette décomposition induit une $\mathbb{R}$-filtration décroissante continue à gauche sur V :

$$V_\lambda := \bigoplus_{i\geq\lambda} V(i) \text{ pour tout } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Clairement, $\mathcal{F}^h$ peut être aussi considérée comme une $\mathbb{Z}$-filtration.

En particulier, si G est un groupe algébrique agissant à gauche sur V, tout sous-groupe à un paramètre $h:\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}\to G$ définit une telle filtration, noté $\mathcal{F}^h$. Si l'action de G se factorise par $\mathbb{SL}_K(V)$, alors $\mathbb{E}[\mathcal{F}^h]=0$ (voir (4.4) pour la notation).

On suppose que V soit un espace vectoriel de rang fini sur K. Soient $\mathbf{m}=(m_i)_{1\leq i\leq d+1}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que $m_1=0$ et $m_{d+1}=\mathrm{rg}_K(V)$, X le fibré de drapeaux de $V^\vee$ de type $\mathbf{m}$. Soient $\pi:X\to\operatorname{Spec}K$ le morphisme canonique et $(E_i)_{1\leq i\leq d+1}$ le drapeau universel. C'est un drapeau de type $\mathbf{m}$ de $E:=\pi^*(V^\vee)$. Par définition E_i est un quotient de rang m_i de E et pour tout entier $1\leq i\leq d$, l'homomorphisme canonique $E\to E_i$ se factorise par E_{i+1}. Pour tout entier $1\leq i\leq d$ on note

$$L_i=\text{dét}\,[\mathrm{Ker}(E_{i+1}\to E_i)].$$

Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ est engendré par les $[L_i]$, et on a un isomorphisme de faiseaux inversibles G-linéaires sur X :

$$L_1\otimes\cdots\otimes L_d\cong\pi^*(\text{dét}\,V)^\vee.$$

On notera que ce faisceau inversible est isomorphe à $\mathcal{O}_X$ comme $\mathcal{O}_X$-module, mais pas comme faisceau inversible G-linéaire sur X si l'action de G sur V ne se factorise pas par $\mathbb{SL}_K(V)$.

Si $\mathbf{a}=(a_i)_{1\leq i\leq d}$ est un élément dans $\mathbb{Z}^d$, on note $L^{\mathbf{a}}=(L_1^{\otimes a_1}\otimes\cdots\otimes L_d^{\otimes a_d})^\vee$. Alors $L^{\mathbf{a}}$ est ample lorsque $\mathbf{a}$ est une suite strictement croissante.

Si x est un point rationnel de X, il détermine une chaîne décroissante de sous-espaces de V :

$$V=V_1\supsetneq V_2\supsetneq\cdots\supsetneq V_{d+1}=0.$$

Pour toute suite strictement croissante $\mathbf{a}=(a_i)_{1\leq i\leq d}$, on définit une $\mathbb{R}$-filtration décroissante et continue à gauche $\mathcal{F}^{\mathbf{a},x}$ sur V telle que

$$\mathcal{F}^{\mathbf{a},x}_\lambda V=\bigcup_{\lambda\leq a_i} V_i.$$

Théorème 5.2.1 (Mumford, voir [24] et [86]) *Avec les notation ci-dessus, si G est un groupe réductif qui agit linéairement sur V, alors l'action de G sur V induit une action de G sur X. D'autre part, pour tout $\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^d$, on a une G-linéarisation naturelle sur $L^{\mathbf{a}}$. Si de plus $L^{\mathbf{a}}$ est ample, alors pour tout sous-groupe à un paramètre h de G et tout point $x\in X(K)$, on a*[1]

$$\mu(x,h,L^{\mathbf{a}})=\left\langle\mathcal{F}^h,\mathcal{F}^{\mathbf{a},x}\right\rangle.$$

En particulier, si l'action de G sur V se factorise par $\mathbb{SL}_K(V)$, on a

$$\mu(x,h,L^{\mathbf{a}})=\mathrm{cov}(\mathcal{F}^h,\mathcal{F}^{\mathbf{a},x}).$$

[1] Voir (4.5) et (4.6) pour les définitions de $\langle\ ,\ \rangle$ et de $\mathrm{cov}(\ ,\ )$.

Semi-stabilité au sens de la théorie géométrique des invariants

Soient K un corps et $\pi : X \to K$ un K-schéma projectif. Soit (L, ϕ) un $\mathcal{O}_X$-module inversible G-linéaire. On dit qu'un point rationnel x de X est *semi-stable* pour l'action de G relativement à (L, ϕ) s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une section $s \in H^0(X, L^{\otimes n})$ qui est invariante par l'action de G telle que $x \in X_s$, où X_s est le sous-schéma ouvert de X des points y tels que $s(y) \neq 0$. D'après la définition on sait immédiatement que, pour tout entier strictement positif n, x est semi-stable pour l'action de G relativement à (L, ϕ) si et seulement s'il est semi-stable pour l'action de G relativement à la puissance tensorielle $(L^{\otimes n}, \phi^{\otimes n})$. Cette remarque nous permet d'utiliser les puissances tensorielles rationnelles lorsqu'on étudie la semi-stabilité d'un point rationnel.

Par exemple, si X est de la forme $\mathbb{P}(V^\vee)$, où V est un espace vectoriel de rang $0 < d < +\infty$ sur K, alors $\mathbb{GL}_K(V)$ et $\mathbb{SL}_K(V)$ opèrent naturellement sur X. Soit M un sous-espace de rang 1 de V, c'est un point rationnel dans X. Le faisceau inversible $\mathcal{O}_{V^\vee}(1)$ sur $\mathbb{P}(V^\vee)$ admet une $\mathbb{GL}_K(V)$-linéairisation définie par "transport de structure". Cette $\mathbb{GL}_K(V)$-linéairisation détermine par restriction une $\mathbb{SL}_K(V)$-linéarisation sur $\mathcal{O}_{V^\vee}(1)$. D'autre part, il y a des actions non-triviales de $\mathbb{GL}_K(V)$ sur le faisceau trivial de $\mathbb{P}(V^\vee)$. Ce sont des images réciproques d'un espace vectoriel de rang 1 sur K où l'action de $\mathbb{GL}_K(V)$ est donnée par un caractère (à savoir, un K-morphisme de K-schéma en groupes de $\mathbb{GL}_K(V)$ vers $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$). On rappelle que les seuls caractères de $\mathbb{GL}_K(V)$ sont des puissances tensorielles du déterminant. Si χ est un caractère de $\mathbb{GL}_K(V)$, on désigne par $\mathcal{O}_\chi$ le faisceau trivial sur $\mathbb{P}(V^\vee)$ où la $\mathbb{GL}_K(V)$-linéarisation est induite par le caractère χ.

Résultats de Kempf et de Ramanan-Ramanathan

Le théorème suivant dû à Hilbert et Mumford donne un critère numérique pour la semi-stabilité d'un point rationnel x (cf. [72] Theorem 2.1).

Théorème 5.2.2 (Hilbert-Mumford) *Soient G un groupe réductif qui agit sur un schéma X qui est propre sur le spectre d'un corps K de caractéristique 0, $L \in \mathrm{Pic}^G(X)$ dont le $\mathcal{O}_X$-module inversible sous-jacent est ample et $x \in X(K)$. Alors x est semi-stable relativement à L si et seulement si $\mu(x, h, L) \geq 0$ pour tout sous-groupe à un paramètre de G.*

D'après le théorème de Hilbert-Mumford, on obtient que, si $x \in X(K)$ n'est pas semi-stable relativement à L, alors il existe au moins un sous-groupe à un paramètre de G tel que $\mu(x, h, L) < 0$. Kempf [61] et Rousseau [81] ont généralisé indépendamment le théorème de Hilbert-Mumford en les variétés propres sur le spectre d'un corps parfait, en démontrant que lorsque x n'est pas semi-stable, alors il existe un (presque unique) sous-groupe à un paramètre h_0 de G (dit de Kempf) qui minimise certaine fonction. Le théorème a été d'abord démontré pour le cas où K est algébriquement clos. Le cas général résulte de l'unicité du sous-groupe à un paramètre de Kempf par la technique de descente. En s'appuyant sur les résultats de Kempf, Ramanan et Ramanathan ont démontré dans [77] que dans le cas où K est de caractéristique 0, tout fibré associé à un fibré principal semi-stable est encore semi-stable. En particulier, si C est une courbe projective non-singulière sur un corps caractéristique 0, alors le produit tensoriel de deux fibrés semi-stables sur C est encore semi-stable.

En utilisant les résultats de Kempf et de Ramanan-Ramanathan (reformulés en language des filtrations), Totaro [86] a proposé une nouvelle démonstration d'une conjecture de Fontaine qui a été d'abord démontrée par Faltings [29] que le produit tensoriel de deux isocristaux filtrés faiblement admissibles semi-stables est encore semi-stable (voir aussi le note de de Shalit [24]).

Les résultats de Kempf et de Ramanan-Ramanathan peuvent aussi être utilisés dans l'étude de la pente maximale arithmétique du produit tensoriel de fibrés vectoriels hermitiens. On résume leur résultats dans la suite :

Soit V un espace vectoriel de rang fini sur un corps K qui est de caractéristique 0. On suppose que G soit un groupe réductif qui agit linéairement (à gauche) sur V (donc on a une G-linéarisation naturelle sur $\mathcal{O}_V(1)$). D'après Kempf, on sait associer à chaque groupe à un paramètre h de G un nombre $\|h\| > 0$ (cf. [77] §1). Si $x \in \mathbb{P}(V)(K)$ est un point qui n'est pas semi-stable pour l'action de G relativement à $\mathcal{O}(1)$, alors il existe un sous-groupe à un paramètre (dit de Kempf) h_x qui minimise la fonction

$$h \longmapsto \frac{\mu(x, h, \mathcal{O}(1))}{\|h\|}. \tag{5.6}$$

La valeur minimale est strictement négative. D'autre part, à chaque sous-groupe à un paramètre h on peut associer un sous-groupe parabolique $P(h)$ de G qui est engendré par un tore maximal contenant h et les groupes de racines U_α correspondant aux racines α telle que $\alpha(h) \geq 0$. Le radical nilpotent $U(h)$ de $P(h)$ est donc engendré par les U_α avec $\alpha(h) > 0$. On considère $\mathcal{F}^{h_x}$ comme une $\mathbb{Z}$-filtration. Le groupe réductif $P(h_x)/U(h_x)$ agit naturellement sur $\displaystyle\bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_q^{h_x} V/\mathcal{F}_{q+1}^{h_x} V$.

Théorème 5.2.3 ([77] Proposition 1.12) *Avec les notations ci-dessus, si on désigne par j le plus grand indice tel que $x \in \mathcal{F}_j^{h_x} V$, alors il existe un entier positif r et un caractère χ sur $P(h_x)$ tels que l'image canonique de x dans $\mathcal{F}_j^{h_x} V/\mathcal{F}_{j+1}^{h_x} V = \mathbb{P}(\mathcal{F}_j^{h_x} V/\mathcal{F}_{j+1}^{h_x} V)(K)$ soit semi-stable pour l'action de $P(h_x)/U(h_x)$ relativement à $\mathcal{O}(r) \otimes \mathcal{O}_{\chi^{-1}}$, où $\mathcal{O}_{\chi^{-1}}$ est le faisceau trivial dont la $P(h_x)/U(h_x)$-linéarisation est induite par le caractère χ^{-1}.*

5.2.2 Le théorème du bicommutant

On rappelle dans ce sous-paragraphe le théorème du bicommutant. Les références sont [75], [65] et [59].

Soit R un anneau commutatif et unifère. Contrairement à la convention générale, les R-algèbres dans ce sous-paragraphe peuvent être non-commutatives (mais associatives et unifères quand même).

Soit A une R-algèbre. On dit qu'un A-module à gauche (resp. à droite) M est *simple* si M est non-nul et si les seuls sous-A-modules de M sont 0 et M. On dit qu'un A-module à gauche (resp. à droite) est *semi-simple* s'il est une somme directe de A-modules simples. Cette propriété est satisfaite si et seulement si, pour tout sous-module N de M, il existe un sous-module N' tel que $M = N \oplus N'$.

On dit que A est une *algèbre semi-simple* si elle est semi-simple comme module à gauche sur A.

Remarque 5.2.4 Soit A une R-algèbre. Clairement, il existe une version "à droite" de la semi-simplicité de A. Toutefois, elle coïncide avec la précédente : d'après le théorème de Wedderburn (cf. [75] 3.5), la semi-simplicité de A est équivalente au fait que A est semi-simple comme module à droite sur A. En outre, si A est semi-simple, alors tous les A-modules (à gauche ou à droite) sont semi-simples.

Exemple 5.2.5 On suppose que R soit un corps. Si G est un groupe fini de cardinal n, alors $R[G]$ est une algèbre de rang fini sur R. D'après le théorème de Maschke (cf. [75] 3.6 ou [65] XVIII §1 Theorem 1.2), si n est inversible dans R, alors $R[G]$ est une R-algèbre semi-simple.

Soit A une algèbre sur R. On dit que A est *simple* si les seuls idéaux bilatères de A sont 0 et A. Il n'est pas vrai en général que la simplicité de A implique la semi-simplicité de A. C'est le cas lorsque A est artinien à gauche (cette condition est aussi nécessaire pour qu'une R-algèbre simple soit semi-simple). En particulier, si R est un corps et si A est une R-algèbre simple qui est de rang fini sur R, alors elle est semi-simple.

Exemple 5.2.6 On suppose que R soit un corps. Si E est un espace vectoriel de rang fini sur R, alors $A = \mathrm{End}_R(E)$ est une R-algèbre simple. De plus, l'espace vectoriel E est simple comme A-module (cf. [65] XVII §5 Theorem 5.5).

Soient A une R-algèbre et X un sous-ensemble de A. On appelle *commutant* de X la sous-R-algèbre

$$X' = \{a \in A \mid \forall x \in X, \quad ax = xa\}$$

de A. La sous-R-algèbre X'' de A est appelée le *bicommutant* de X. On appelle *centre* de A la sous-R-algèbre A' de A. On dit que la R-algèbre A est *centrale* si $A' = R$. Il est clair que pour tout sous-ensemble X de A on a $X \subset X''$, donc X'' contient la sous-R-algèbre de A engendrée par X. Dans l'autre côté on a le théorème suivant (voir [59] 4.10 pour la démonstration) :

Théorème 5.2.7 *On suppose que R soit un corps et que A soit une algèbre centrale et simple qui est de rang fini sur R. Si B est une sous-algèbre semi-simple de A, alors $B'' = B$.*

5.2.3 Rappels sur la théorie classique des invariants

On rappelle dans ce sous-paragraphe le “premier théorème principal” de la théorie classique des invariants due à Weyl ([90] Chapter III, voir aussi [4] Appendix 1). Dans ce sous-paragraphe K désigne un corps de caractéristique 0.

Le cas d'un seul espace vectoriel

Pour tout espace vectoriel de rang fini V sur K et tout entier strictement positif n on dispose d'une appilication K-linéaire Ψ de $\mathrm{End}_K(V)^{\otimes n} \to \mathrm{End}_K(V^{\otimes n})$ qui associe au produit tensoriel $T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$ de n éléments de $\mathrm{End}_K(V)$ leur produit tensoriel comme endomorphisme de $V^{\otimes n}$. C'est un isomorphisme de K-algèbres. En effet, il est clair que cette application K-linéaire est un homomorphisme de K-algèbres. En tant qu'homomorphisme d'espaces vectoriels sur K, cette application se décompose en des isomorphismes naturels,

$$\mathrm{End}_K(V)^{\otimes n} \longrightarrow (V^\vee \otimes V)^{\otimes n} \longrightarrow (V^\vee)^{\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \longrightarrow (V^{\otimes n})^\vee \otimes V^{\otimes n} \longrightarrow \mathrm{End}_K(V^{\otimes n}) ,$$

donc est elle-même un isomorphisme. En outre, on a une action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $V^{\otimes n}$ par permutation des facteurs. Cette représentation de $\mathfrak{S}_n$ définit un homomorphisme de l'algèbre de groupes $R[\mathfrak{S}_n]$ dans $\mathrm{End}_K(V^{\otimes n})$. Les éléments dans $\mathfrak{S}_n$ agissent par conjugaison sur $\mathrm{End}_K(V^{\otimes n})$. Si on identifie $\mathrm{End}_K(V^{\otimes n})$ à $\mathrm{End}_K(V)^{\otimes n}$ par l'isomorphisme Ψ, alors l'action de $\mathfrak{S}_n$ correspondant est la permutation des facteurs dans le produit tensoriel. Enfin, le groupe $\mathrm{GL}_K(V)$ agit naturellement sur $V^{\otimes n}$.

Lemme 5.2.8 *Si on désigne par $\pi : \mathrm{GL}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V^{\otimes n})$ la représentation naturelle de $\mathrm{GL}_K(V)$ sur $V^{\otimes n}$, alors $\mathrm{End}_K(V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ s'identifie à la sous-algèbre de $\mathrm{End}_K(V^{\otimes n})$ engendrée par l'image de π.*

Démonstration. Il est clair que $\mathrm{End}_K(V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ est une sous-algèbre de $\mathrm{End}_K(V^{\otimes n})$. D'autre part, l'action d'un élément arbitraire dans $\mathfrak{S}_n$ par premutation sur $V^{\otimes n}$ et l'action via π d'un élément quelconque dans $\mathrm{GL}_K(V)$ sur $V^{\otimes n}$ commutent. Par conséquent $\mathrm{End}_K(V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ contient la sous-algèbre de $\mathrm{End}_K(V^{\otimes n})$ engendrée par l'image de π. Il suffit donc de démontrer l'inclusion inverse. Comme K est de caractéristique 0, $\mathrm{End}_K(V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \cong (\mathrm{End}_K(V)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \cong S^n \mathrm{End}_K(V)$. Comme $S^n \mathrm{End}_K(V)$ est engendré comme K-espace vectoriel par les éléments de la forme $g^{\otimes n}$ où $g \in \mathrm{End}_K(V)$, il est aussi engendré comme K-espace vectoriel par les $g^{\otimes n}$ où $g \in \mathrm{GL}_K(V)$, car $\mathrm{GL}_K(V)$ est Zariski dense dans $\mathrm{End}_K(V)$ (K est de caractéristique 0). □

On rappelle maintenant le “premier théorème principal” de la théorie classique des invariants :

Théorème 5.2.9 *Soient V un espace vectoriel de rang fini sur K et $n, m \geq 1$ deux entiers. Si T est un élément non-nul dans $V^{\otimes n} \otimes V^{\vee \otimes m}$ qui est invariant pour l'action de* $\mathrm{GL}_K(V)$*, alors $n = m$, et T est une combinaison linéaire de permutations (ici on identifie $V^{\otimes n} \otimes V^{\vee\otimes n}$ à* $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$*).*

Démonstration. Soient $a \in K^{\times}$ un élément qui n'est pas racine de l'unité (cela est toujours possible car K est de caractéristique 0) et $g = a\,\mathrm{Id}_V \in \mathrm{GL}_K(V)$. L'action de g sur $V^{\otimes n} \otimes V^{\vee \otimes m}$ est $a^{n-m}\,\mathrm{Id}$. S'il existe un vecteur non-nul dans $V^{\otimes n} \otimes V^{\vee\otimes m}$ invariant par l'action de $\mathrm{GL}_K(V)$, alors $a^{n-m} = 1$. Par conséquent, on a $n = m$ puisque a n'est pas racine de l'unité.

Soient $A = \mathrm{End}_K(V^{\otimes n})$ et B la sous-K-algèbre de A image de $K[\mathfrak{S}_n]$ dans A par la représentation de permutations. La K-algèbre A est simple, centrale et de rang fini sur K. La sous-K-algèbre B est semi-stable. D'après le lemme 5.2.8, $B' = \mathrm{End}_K(V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ est la sous-algèbre de A engendrée par l'image de la représentation $\pi : \mathrm{GL}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V^{\otimes n})$. Compte tenu du théorème 5.2.7, on a $B'' = B$. Donc les endomorphismes de $V^{\otimes n}$ invariants par l'action de $\mathrm{GL}_K(V)$ appartiennent à B, c'est-à-dire, sont des combinaisons linéaires des permutations. □

Le cas de plusieurs espaces vectoriels

Soient $(V_i)_{1 \leq i \leq r}$ une collection d'espaces vectoriels de rang fini et non-nuls sur K et $\mathbf{n} = (n_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille d'entiers strictement positifs. On désigne par G le groupe $\mathrm{GL}_K(V_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}_K(V_r)$, et par $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}$ le groupe $\mathfrak{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{n_r}$. L'algèbre de groupe $K[\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}]$ est isomorphe à $K[\mathfrak{S}_{n_1}] \otimes_K \cdots \otimes_K K[\mathfrak{S}_{n_r}]$. D'autre part, on a un isomorphisme naturel de K-algèbres de $\mathrm{End}_K(V_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes n_r})$ vers $\mathrm{End}_K(V_1)^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}_K(V_r)^{\otimes n_r}$. Le groupe G agit naturellement sur $V_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes n_r}$. On désigne par $\pi : G \to \mathrm{End}_K(V_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes n_r})$ la représentation correspondante. Enfin, le groupe $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}$ agit sur $V_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes n_r}$ par permutation des facteurs dans le produit tensoriel, comme dans le cas où il s'agit d'un seul espace vectoriel.

Lemme 5.2.10 *L'algèbre* $\mathrm{End}_K(V_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes n_r})^{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}$ *est engendrée par l'image de π.*

Démonstration. Pour tout entier $1 \leq i \leq r$ on désigne par C_i l'image canonique de $K[\mathfrak{S}_{n_i}]$ dans $\mathrm{End}_K(V_i^{\otimes n_i})$. L'algèbre $\mathrm{End}_K(V_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes n_r})^{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}}$ est le commutant de l'image canonique de $K[\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}]$ dans $\mathrm{End}_K(V_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes n_r}) \cong \mathrm{End}_K(V_1^{\otimes n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}_K(V_r^{\otimes n_r})$ qui s'identifie à $C_1 \otimes \cdots \otimes C_r$. Comme le commutant du produit tensoriel est égal au produit tensoriel des commutants, on a

$$\mathrm{End}_K(V_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes n_r})^{\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}} \cong C_1' \otimes \cdots \otimes C_r'.$$

D'après le lemme 5.2.8, la sous-K-algèbre C_i' de $\mathrm{End}_K(V_i^{\otimes n_i})$ est engendrée par l'image de $\mathrm{GL}_K(V_i^{\otimes n_i})$. Par conséquent, $C_1' \otimes \cdots \otimes C_r'$ est engendrée par l'image de G. □

On propose ci-dessous une généralisation du "premier théorème principal" de la théorie classique des invariants :

Théorème 5.2.11 *Avec les notations ci-dessus, si* $\mathbf{m} = (m_i)_{1 \le i \le r}$ *est une famille de nombres strictement positifs et si* T *est un élément non-nul dans* $W = V_1^{\otimes n_1} \otimes V_1^{\vee \otimes m_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes n_r} \otimes V_r^{\vee \otimes m_r}$ *qui est invariant par l'action de* G*, alors* $\mathbf{n} = \mathbf{m}$*, et* T *est une combinaison linéaire d'éléments dans* $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}$.

Démonstration. Soit $a \in K^\times$ un élément qui n'est pas racine de l'unité. Pour tout entier $1 \le i \le r$, l'action de $U_{i,a} = \mathrm{Id}_{V_1} \times \cdots \times \mathrm{Id}_{V_{i-1}} \times a\,\mathrm{Id}_{V_i} \times \mathrm{Id}_{V_{i+1}} \times \cdots \times \mathrm{Id}_{V_r}$ sur W est l'homothétie par $a^{n_i - m_i}$. Comme W a un vecteur invariant par G, on a $a^{n_i - m_i} = 1$ et donc $m_i = n_i$. On peut alors identifier l'espace vectoriel W à l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre $A = \mathrm{End}_K(V_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots V_r^{\otimes n_r})$. Soit B la sous-K-algèbre de A image canonique de $K[\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}]$ par la représentation des permutations. L'algèbre A est simple, centrale, et de rang fini sur K. La sous-algèbre B de A est semi-simple puisqu'elle est quotient de l'algèbre d'un groupe fini. D'après le théorème du bicommutant (le théorème 5.2.7), on a $B'' = B$. Par conséquent, les endomorphismes de $V_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes n_r}$ invariants par l'action de G appartiennent à B, donc sont des combinaisons linéaires des éléments dans $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}}$. □

5.3 Majoration du degré d'Arakelov d'une droite semi-stable

5.3.1 Application de la théorie classique des invariants dans l'étude de la semi-stabilité (au sens de la théorie géométrique des invariants)

Dans ce sous-paragraphe, le symbole K désigne un corps de caractéristique 0.

Proposition 5.3.1 *Soit* V *un espace vectoriel de rang* $0 < d < +\infty$ *sur* K.

1) *Pour que* $\mathbb{P}(V^\vee)$ *ait un point rationnel semi-stable pour l'action de* $\mathbb{GL}_K(V)$ *relativement à* $\mathcal{O}(D) \otimes \pi^*(\det V)^{\otimes n}$*, il faut que* $D = dn$.
2) *Si* M *est un point rationnel de* $\mathbb{P}(V^\vee)$ *qui est semi-stable pour l'action de* $\mathbb{GL}_K(V)$ *relativement à* $\mathcal{O}(d) \otimes \pi^*(\det V)$*, alors il existe un entier* $n \ge 1$ *et une permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_{nd}$ *telle que l'homomorphisme composé*

$$\begin{array}{ccccc} M^{\otimes nd} \otimes \mathrm{d\acute{e}t}\, V^{\vee \otimes n} & \longrightarrow & V^{\otimes nd} \otimes \mathrm{d\acute{e}t}\, V^{\vee \otimes n} & & \\ & & \Big\downarrow {\scriptstyle \sigma \otimes \mathrm{Id}} & & \\ & & V^{\otimes nd} \otimes \mathrm{d\acute{e}t}\, V^{\vee \otimes n} & \xrightarrow{\mathrm{d\acute{e}t}^{\otimes n} \otimes \mathrm{Id}} & \mathrm{d\acute{e}t}\, V^{\otimes n} \otimes \mathrm{d\acute{e}t}\, V^{\vee \otimes n} \cong K \end{array}$$

soit non-nul.

3) *Un point rationnel* M *de* $\mathbb{P}(V^\vee)$ *est semi-stable pour l'action de* $\mathbb{SL}_K(V)$ *relativement à* $\mathcal{O}(1)$ *si et seulement s'il est semi-stable pour l'action de* $\mathbb{GL}_K(V)$ *relativement à* $\mathcal{O}(d) \otimes \pi^*(\det V)^\vee$.

Démonstration. 1) On suppose que M soit un point rationnel de $\mathbb{P}(V^\vee)$ semi-stable pour l'action de $\mathbb{GL}_K(V)$ relativement à $\mathcal{O}(D)\otimes\pi^*(\text{dét}\,V)^{\vee\otimes n}$, alors il existe un entier $m>0$ et une section non-nulle s dans

$$H^0(\mathbb{P}(V^\vee),\mathcal{O}(mD)\otimes\pi^*(\text{dét}\,V)^{\otimes nm})=S^{mD}(V^\vee)\otimes(\text{dét}\,V)^{\otimes nm}$$

qui est invariante par $\mathrm{GL}_K(V)$ et telle que $M\in\mathbb{P}(V^\vee)_s$. En tant que $\mathrm{GL}_K(V)$-module, $S^{mD}V^\vee$ (resp. Λ^dV) est un facteur direct de $V^{\vee\otimes md}$ (resp. $V^{\otimes d}$) (cf. [33] Lecture 6). Par conséquent, il existe un relèvement $\widetilde{s}$ de s dans $V^{\vee\otimes mD}\otimes V^{\otimes nmd}$ qui est invariant par $\mathrm{GL}_K(V)$. D'après le théorème 5.2.11 on a $mD=nmd$, donc $D=nd$.

2) D'après l'argument dans la démonstration de 1) on obtient que, si M est un point rationnel (considéré comme sous-espace de rang 1 de V) de $\mathbb{P}(V^\vee)$ qui est semi-stable pour l'action de $\mathbb{GL}_K(V)$ relativement à $\mathcal{O}(d)\otimes\pi^*(\text{dét}\,V)$, alors il existe un entier $n\geq1$ et un élément $s\in S^{nd}V^\vee\otimes\text{dét}\,V^{\otimes n}$ qui est invariant par l'action de $\mathrm{GL}_K(V)$ et tel que l'homomorphisme composé

$$M^{\otimes nd}\otimes\text{dét}\,V^{\vee\otimes n}\longrightarrow\Gamma^{nd}V\otimes\text{dét}\,V^{\vee\otimes n}\xrightarrow{\ s\ }K$$

soit non-nul. D'autre part, s se relève en un élément $\widetilde{s}\in V^{\vee\otimes nd}\otimes V^{\otimes nd}$ qui est aussi invariant par l'action de $\mathrm{GL}(V)$. D'après le théorème 5.2.9, l'élément $\widetilde{s}$ est une combinaison linéaire de permutations. Par conséquent, il existe une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_{nd}$ telle que l'homomorphisme composé

$$\begin{tikzcd}
M^{\otimes nd}\otimes\text{dét}\,V^{\vee\otimes n} \arrow[r] & V^{\otimes nd}\otimes\text{dét}\,V^{\vee\otimes n} \arrow[d, "\sigma\otimes\mathrm{Id}"'] & \\
& V^{\otimes nd}\otimes\text{dét}\,V^{\vee\otimes n} \arrow[r, "\text{dét}^{\otimes n}\otimes\mathrm{Id}"] & \text{dét}\,V^{\otimes n}\otimes\text{dét}\,V^{\vee\otimes n}\cong K
\end{tikzcd}$$

soit non-nul.

3) On suppose que $n\geq1$ soit un entier. Si un élément $s\in V^{\vee\otimes n}$ est invariant par l'action de $\mathrm{SL}_K(V)$, alors le sous-espace M engendré par s est invariant par l'action de $\mathrm{GL}_K(V)$. L'action de $\mathrm{GL}_K(V)$ sur M est un caractère, i.e., une puissance tensorielle du déterminant. Par conséquent, il existe un entier m tel que, si on désigne par x un générateur de $(\text{dét}\,V)^{\otimes m}$, alors l'élément $s\otimes x\in V^{\vee\otimes n}\otimes(\text{dét}\,V)^{\otimes m}$ soit invariant par l'action de $\mathrm{GL}_K(V)$. On a donc $d|n$ et $m=n/d$. Réciproquement si un élément dans $V^{\vee\otimes n}\otimes(\text{dét}\,V)^{\otimes m}$ est invariant par l'action de $\mathrm{GL}_K(V)$, alors il est invariant par l'action de $\mathrm{SL}_K(V)$ si on le considère comme un élément de $V^{\vee\otimes n}$ (l'action de $\mathrm{SL}_K(V)$ sur $\text{dét}\,V$ est trivial, donc $\text{dét}\,V\cong K$ comme $\mathrm{SL}_K(V)$-module). L'assertion 3) s'en déduit immédiatement. □

En utilisant la notion de puissance tensorielle rationnelle on peut aussi dire que $M\in X(K)$ est semi-stable pour l'action de $\mathbb{SL}_K(V)$ relativement à $\mathcal{O}(1)$ si et seulement si $M\otimes(\text{dét}\,V^\vee)^{\otimes\frac{1}{d}}$ (vu comme point rationnel de $\mathbb{P}(V^\vee\otimes(\text{dét}\,V)^{\otimes\frac{1}{d}})$) est semi-stable pour l'action de $\mathbb{GL}_K(V)$.

Il est possible de généraliser la proposition 5.3.1 au cas d'un produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels de rang fini. Notamment on a la proposition suivante :

Proposition 5.3.2 *Soit $(V_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille d'espaces vectoriels de rang fini et non-nuls sur K et $(a_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille d'entiers strictement positifs. Pour tout entier $1\leq i\leq r$ on désigne par d_i le rang de V_i sur K. Soient $W=V_1^{\otimes a_1}\otimes\cdots\otimes V_r^{\otimes a_r}$, $X=\mathbb{P}(W^\vee)$ et $\pi:X\to\operatorname{Spec}K$ le morphisme canonique. Soit $G=\mathbb{GL}(V_1)\times_K\cdots\times_K\mathbb{GL}(V_r)$.*

1) Soit χ un caractère de G. Pour que X ait un point rationnel semi-stable pour l'action de G relativement à $\mathcal{O}_X(D)\otimes\mathcal{O}_\chi$, il faut que $\mathcal{O}_\chi$ soit de la forme

$$\pi^*((\text{dét}\,V_1)^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes(\text{dét}\,V_r)^{\otimes n_r}),$$

où $n_i d_i = Da_i$ *pour tout* $1 \le i \le r$ *;*

2) Si M *est un point rationnel de* X *qui est semi-stable pour l'action de* G *relativement à* $\mathcal{O}_X(D) \otimes \pi^*((\text{dét}\, V_1)^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes (\text{dét}\, V_r)^{\otimes n_r})$*, il existe un entier* $m \ge 1$ *et une permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_{mDa_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{mDa_r}$ *tels que l'homomorphisme composé*

$$\begin{tikzcd} M^{\otimes m} \otimes L^{\vee \otimes m} \arrow[r] & W^{\otimes mD} \otimes L^{\vee \otimes m} \arrow[r, "\sigma \otimes \mathrm{Id}"] & W^{\otimes mD} \otimes L^{\vee \otimes m} \arrow[d, "\text{dét}_{V_1}^{\otimes mn_1} \otimes \cdots \otimes \text{dét}_{V_r}^{\otimes mn_r} \otimes \mathrm{Id}"'] \\ & & L^{\otimes m} \otimes L^{\vee \otimes m} \cong K \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

soit non-nul, où $L = (\text{dét}\, V_1)^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes (\text{dét}\, V_r)^{\otimes n_r}$.

3) Un point rationnel M *de* X *est semi-stable pour l'action de* $\mathbb{SL}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{SL}(V_r)$ *relativement à* $\mathcal{O}_X(1)$ *si et seulement s'il est semi-stable pour l'action de* G *relativement à* $\mathcal{O}_X(1) \otimes \pi^*(\text{dét}\, V_1^{\otimes \frac{a_1}{d_1}} \otimes \cdots \otimes \text{dét}\, V_r^{\otimes \frac{a_r}{d_r}})$.

Démonstration. 1) Comme G est le produit des schémas en groupes $\mathbb{GL}_K(V_i)$ $(i = 1, \cdots, r)$, tout caractère de G est un produit tensoriel de caractères de $\mathbb{GL}_K(V_i)$. Donc $\mathcal{O}_\chi$ est de la forme $\pi^*((\text{dét}\, V_1)^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes (\text{dét}\, V_r)^{\otimes n_r})$.

On suppose que M soit un point rationnel de X qui est semi-stable pour l'action de G relativement à $\mathcal{O}_X(D) \otimes L$, où $L = \pi^*((\text{dét}\, V_1)^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes (\text{dét}\, V_r)^{\otimes n_r})$. Il existe alors un entier $m > 0$ et une section non-nulle s de

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(mD) \otimes L^{\otimes m}) = S^{mD}(V_1^{\vee \otimes a_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\vee \otimes a_r}) \otimes (\text{dét}\, V_1)^{\otimes mn_1} \otimes \cdots \otimes (\text{dét}\, V_r)^{\otimes mn_r}$$

invariante par l'action de $G(K)$ tels que $M \in X_s$. D'après la semi-simplicité de l'algèbre de groupe $K[G(K)]$, il existe un relèvement $\widetilde{s}$ de s dans

$$V_1^{\vee \otimes mDa_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\vee \otimes mDa_r} \otimes V_1^{\otimes mn_1 d_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes mn_r d_r}$$

qui est invariant par l'action de $G(K)$. D'après le théorème 5.2.11 on a $mDa_i = mn_i d_i$ (i.e., $Da_i = n_i d_i$) pour tout $1 \le i \le r$.

2) Si $M \in X(K)$ est un point rationnel (considéré comme un sous-espace de rang 1 de W) qui est semi-stable pour l'action de G relativement à $\mathcal{O}_X(D) \otimes \pi^* L$, alors il existe un entier $m > 0$ et un élément $s \in S^m(W^\vee) \otimes L^{\otimes m}$ invariant par l'action de $G(K)$ tels que l'homomorphisme composé

$$M^{\otimes mD} \otimes L^{\vee \otimes m} \longrightarrow \Gamma^m(W) \otimes L^{\vee \otimes m} \xrightarrow{\ s\ } K$$

soit non-nul. D'autre part, on a $Da_i = n_i d_i$ pour tout $1 \le i \le r$. L'élément s admet un relèvement dans

$$V_1^{\vee \otimes mDa_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\vee \otimes mDa_r} \otimes V_1^{\otimes mDa_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes mDa_r}$$

qui est invariant par l'action de $G(K)$. D'après le théorème 5.2.11, $\widetilde{s}$ est une combinaison linéaire de permutations dans $\mathfrak{S}_{mDa_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{mDa_r}$. Par conséquent, il existe un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_{mDa_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{mDa_r}$ tel que l'homomorphisme composé (5.7) soit non-nul.

3) Si $D \ge 1$ est un entier, et si un élément $s \in W^{\vee \otimes D}$ est invariant par l'action de $\mathrm{SL}_K(V_1) \times \cdots \times \mathrm{SL}_K(V_r)$, alors le sous-espace M engendré par s est invariant par $G(K)$. L'action de $G(K)$ sur M est un caratère de $G(K)$. Par conséquent, il existe une famille d'entiers $(n_i)_{1 \le i \le r}$ telle que, si on désigne par x un générateur de $(\text{dét}\, V_1)^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes (\text{dét}\, V_r)^{\otimes n_r}$,

alors $s\otimes x \in W^{\vee\otimes D}\otimes(\det V_1)^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes(\det V_r)^{\otimes n_r}$ soit invariant par l'action de $G(K)$. D'après 1) on a $Da_i = n_i d_i$ pour tout $1\le i\le n$. Réciproquement si un élément dans $W^{\vee D}\otimes(\det V_1)^{\frac{Da_1}{d_1}}\otimes\cdots\otimes(\det V_r)^{\frac{Da_r}{d_r}}$ est invariant par l'action de $G(K)$, alors il est invariant par l'action de $\mathrm{SL}_K(V_1)\times\cdots\times\mathrm{SL}_K(V_r)$ si on le considère comme un élément dans $W^{\vee D}$ car $(\det V_1)^{\frac{Da_1}{d_1}}\otimes\cdots\otimes(\det V_r)^{\frac{Da_r}{d_r}}$ est trivial comme module sur $\mathrm{SL}_K(V_1)\times\cdots\times\mathrm{SL}_K(V_r)$. □

Proposition 5.3.3 *Soient $(V_i)_{1\le i\le r}$ une famille d'espaces vectoriels de rang fini et non-nuls sur K, Ξ une famille finie d'applications de $\{1,\cdots,r\}$ vers $\mathbb{Z}_{>0}$ et $(b_i)_{1\le i\le r}$ une famille de nombres rationnels strictement positifs. On désigne par*

i) W l'espace

$$\bigoplus_{\alpha\in\Xi}\bigotimes_{i=1}^{r} V_i^{\otimes\alpha(i)},$$

ii) G le groupe algébrique $\mathbb{GL}_K(V_1)\times_K\cdots\times_K\mathbb{GL}_K(V_r)$ qui agit naturellement sur W,

iii) L le $G(K)$-module $(\det V_1)^{\otimes b_1}\otimes\cdots\otimes(\det V_r)^{\otimes b_r}$,

iv) pour tout entier $D\ge 1$ et tout $\alpha=(\alpha_j)_{1\le j\le D}\in\Xi^D$,

$$\mathrm{pr}_\alpha : W^{\otimes D}\to V_1^{\otimes(\alpha_1(1)+\cdots+\alpha_D(1))}\otimes\cdots\otimes V_r^{\otimes(\alpha_1(r)+\cdots+\alpha_D(r))}$$

la projection canonique,

v) pour tout entier $1\le i\le r$, d_i le rang de V_i sur K.

Si M est un sous-espace de rang 1 de W (vu comme point rationnel de $\mathbb{P}(W^\vee)$) qui est semi-stable pour l'action de G relativement à $\mathcal{O}_{W^\vee}(1)\otimes\pi^*L$, où $\pi:\mathbb{P}(W^\vee)\to\operatorname{Spec}K$ est le morphisme canonique, alors il existe un entier $D\ge1$, et une famille $\alpha=(\alpha_j)_{1\le j\le D}$ d'éléments dans Ξ tels que, si on note $a=\alpha_1+\cdots+\alpha_D$, alors $a(i)=Db_id_i$. De plus, il existe un élément $\sigma\in\mathfrak{S}_{a(1)}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{a(r)}$ tel que l'homomorphisme composé

$$\begin{array}{c}
M^{\otimes D}\otimes L^{\vee\otimes D}\longrightarrow W^{\otimes D}\otimes L^{\vee\otimes D}\xrightarrow{\mathrm{pr}_\alpha\otimes\mathrm{Id}} V_1^{\otimes a(1)}\otimes\cdots\otimes V_r^{\otimes a(r)}\otimes L^{\vee\otimes D}\\
\Big\downarrow{\scriptstyle \sigma\otimes\mathrm{Id}}\\
V_1^{\otimes a(1)}\otimes\cdots\otimes V_r^{\otimes a(r)}\otimes L^{\vee\otimes D}\\
\Big\downarrow{\scriptstyle \det_{V_1}^{\otimes Db_1}\otimes\cdots\otimes\det_{V_r}^{\otimes Db_r}\otimes\mathrm{Id}}\\
L^{\otimes D}\otimes L^{\vee\otimes D}\cong K
\end{array}$$

soit non-nul, où la première flèche est induite par l'inclusion canonique de $M^{\otimes D}$ dans $W^{\otimes D}$.

Démonstration. Comme M est semi-stable pour l'action de G relativement à $\mathcal{O}_{W^\vee}(1)\otimes\pi^*L$, il existe un entier $D\ge1$ et un élément non-nul $s\in S^D(W^\vee)\otimes L^{\otimes D}$ invariant par l'action de $G(K)$ tels que l'homomorphisme composé

$$M^{\otimes D}\otimes L^{\vee\otimes D}\longrightarrow\Gamma^D(W)\otimes L^{\vee\otimes D}\xrightarrow{s}K$$

soit non-nul. Soit s' un relèvement de s dans $W^{\vee\otimes D}\otimes L^{\otimes D}$ qui est invariant par l'action de $G(K)$. Il existe donc $\alpha=(\alpha_j)_{1\le j\le D}\in\Xi^D$ tel que l'homomorphisme composé

$$M^{\otimes D}\otimes L^{\vee\otimes D}\longrightarrow W^{\otimes D}\otimes L^{\vee\otimes D}\xrightarrow{\mathrm{pr}_\alpha\otimes\mathrm{Id}}V_1^{\otimes a(1)}\otimes\cdots\otimes V_r^{\otimes a(r)}\otimes L^{\vee\otimes D}\xrightarrow{s'_\alpha}K$$

soit non-nul, où $a = \alpha_1 + \cdots + \alpha_D$, et s'_α est la composante d'indice α de s'. Soit s_α un relèvement de s'_α dans $V_1^{\vee\otimes a(1)} \otimes \cdots \vee \otimes V_r^{\otimes a(r)} \otimes V_1^{\otimes Db_1d_1} \otimes \cdots \otimes V_r^{\otimes Db_rd_r}$ invariant par $G(K)$. D'après le théorème 5.2.11 on obtient que $a(i) = Db_id_i$, et que s_α est une combinaison linéaire de permutations. La proposition est donc démontrée. □

5.3.2 La majoration

Dans ce sous-paragraphe, on fixe un corps de nombre K. Soient $(\overline{E}_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille de fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, Ξ une famille finie d'applications de $\{1, \cdots, r\}$ dans $\mathbb{Z}_{>0}$ et

$$\overline{E} = \bigoplus_{\alpha\in\Xi} \overline{E}_1^{\otimes\alpha(1)} \otimes \cdots \otimes \overline{E}_r^{\otimes\alpha(r)}.$$

Pour tout entier $1 \leq i \leq r$ soient d_i le rang de E_i et $\overline{L}_i$ le fibré inversible hermitien $\Lambda^{d_i}\overline{E}_i$. On suppose que $(b_i)_{1\leq i\leq r}$ soit une famille d'entiers strictement positifs telle que d_i divise b_i pour tout $1 \leq i \leq r$. Soit $\overline{L} = \overline{L}_1^{\otimes b_1/d_1} \otimes \cdots \otimes \overline{L}_r^{\otimes b_r/d_r}$.

Lemme 5.3.4 *Soit V un espace vectoriel hermitien de rang $m > 0$. La norme de l'application linéaire* dét $: V^{\otimes m} \to \Lambda^m V$ *est égale à $\sqrt{m!}$.*

Démonstration. En effet, dét peut s'écrire comme $m!$ vecteurs orthogonaux et de norme 1 dans $V^{\vee\otimes m}$. Par conséquent, la norme de dét est $\sqrt{m!}$. □

Théorème 5.3.5 *Avec les notations ci-dessus, on désigne par $\pi : \mathbb{P}(E_K^\vee) \to \operatorname{Spec} K$ le morphisme canonique. Si $n \geq 1$ est un entier et si M est un sous-$\mathcal{O}_K$-module inversible de E tels que M_K (vu comme point rationnel de $\mathbb{P}(E_K^\vee)$) soit semi-stable pour l'action de $\mathbb{GL}(E_{1,K}) \times_K \cdots \times_K \mathbb{GL}(E_{r,K})$ relativement à $\mathcal{O}_{E_K^\vee}(n) \otimes \pi^*L$, alors*

$$\widehat{\deg}(\overline{M}) \leq \frac{1}{n}\widehat{\deg}(\overline{L}) + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^r b_i \log(\operatorname{rg} E_i) = \sum_{i=1}^r \frac{b_i}{n}\Big(\widehat{\mu}(\overline{E}_i) + \frac{1}{2}\log(\operatorname{rg} E_i)\Big).$$

Démonstration. D'après la proposition 5.3.3, il existe un entier $D \geq 1$, une famille $\alpha = (\alpha_j)_{1\leq j\leq nD} \in \Xi^{nD}$ et un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_{a(1)} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{a(r)}$ (où $a = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{nD}$) tels que $a(i) = Db_i$, et que l'homomorphisme composé

$$\begin{tikzcd}
M_K^{\otimes nD} \otimes L_K^{\vee\otimes D} \arrow[r] & E_K^{\otimes nD} \otimes L_K^{\vee\otimes D} \arrow[r, "\mathrm{pr}_\alpha\otimes\mathrm{Id}"] & E_{1,K}^{\otimes a(1)} \otimes \cdots \otimes E_{r,K}^{\otimes a(r)} \otimes L_K^{\vee\otimes D} \arrow[d, "\sigma\otimes\mathrm{Id}"'] \\
& & E_{1,K}^{\otimes a(1)} \otimes \cdots \otimes E_{r,K}^{\otimes a(r)} \otimes L_K^{\vee\otimes D} \arrow[d, "\mathrm{d\acute{e}t}_{E_{1,K}}^{\otimes a(1)/d_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d\acute{e}t}_{E_{r,K}}^{\otimes a(r)/d_r}\otimes\mathrm{Id}"'] \\
& & L_K^{\otimes D} \otimes L_K^{\vee\otimes D} \cong K
\end{tikzcd}$$

soit non-nul. D'après l'inégalité de pentes, ainsi que le lemme 5.3.4, on obtient que

$$nD\widehat{\deg}(\overline{M}) - D\widehat{\deg}(\overline{L}) = nD\widehat{\deg}(\overline{M}) - \sum_{i=1}^r Db_i\mu(\overline{E}_i) \leq \sum_{i=1}^r \frac{a(i)}{d_i}\frac{1}{2}\log(d_i!) = \sum_{i=1}^r D\frac{b_i}{d_i}\frac{\log(d_i!)}{2}.$$

Par conséquent,

$$\widehat{\deg}(\overline{M}) \leq \frac{1}{n}\widehat{\deg}(\overline{L}) + \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i \log(d_i!)}{2nd_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{n}\Big(\widehat{\mu}(\overline{E}_i) + \frac{\log(d_i!)}{2d_i}\Big).$$

Comme pour tout entier $m \geq 1$ on a $\log(m!) \leq \log(m^m) = m\log m$, on obtient que

$$\widehat{\deg}(\overline{M}) \leq \frac{1}{n}\widehat{\deg}(\overline{L}) + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{r} b_i \log(d_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{n}\Big(\widehat{\mu}(\overline{E}_i) + \frac{\log(d_i)}{2}\Big)$$

□

5.4 La démonstration du théorème principal

5.4.1 Un critère de semi-stabilité

Dans ce sous-paragraphe, on rappelle un critère de semi-stabilité (de fibrés vectoriels hermitiens) dû à Bogomolov dans le cas géométrique. (voir [80]).

Soient K un corps de nombres, $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien de rang r sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, et $V = E_K$. On désigne par G le groupe $\mathbb{GL}_K(V)$. On rappelle que tout sous-groupe parabolique P de G correspond à une chaîne décroissante

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_d = 0,$$

qui induit une chaîne décroissante de sous-$\mathcal{O}_K$-modules localement libres saturés

$$\mathscr{D} : E = E_0 \supsetneq E_1 \supsetneq \cdots \supsetneq E_d = 0$$

de E. Pour tout entier $1 \leq i \leq d$ soient $\overline{F}_i = \overline{E}_i \otimes (\Lambda^r \overline{E}^\vee)^{\otimes \frac{1}{r}}$ et $\overline{\mathscr{L}}_{i,\mathscr{D}} = \operatorname{dét}(\overline{F}_{i-1}/\overline{F}_i)^\vee$. Si $\mathbf{a} = (a_i)_{1\leq i\leq d}$ est un élément dans $\mathbb{Z}^d$, on note $\overline{\mathscr{L}}_{\mathscr{D}}^{\mathbf{a}} = \Big(\bigotimes_{i=1}^{d} \overline{\mathscr{L}}_{i,\mathscr{D}}^{\otimes a_i}\Big)$. La fibre générique $\mathscr{L}_{\mathscr{D},K}^{\mathbf{a}}$ est ample lorsque $\mathbf{a} = (a_i)_{1\leq i\leq d}$ est une suite strictement croissante.

Proposition 5.4.1 *Le fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout entier $d \geq 1$, toute chaîne décroissante $\mathscr{D}$ de longueur d de sous-$\mathcal{O}_K$-modules saturés de E, et toute suite strictement croissante $\mathbf{a} = (a_i)_{1\leq i\leq d}$ d'entiers, on a $\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}_{\mathscr{D}}^{\mathbf{a}}) \geq 0$ (resp. $\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}_{\mathscr{D}}^{\mathbf{a}}) > 0$).*

Démonstration. "$\Longrightarrow$" : En effet, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}_{\mathscr{D}}^{\mathbf{a}}) &= \sum_{i=1}^{d} a_i \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}_{i,\mathscr{D}}) \\
&= -\sum_{i=1}^{d} a_i \Big[-\frac{\operatorname{rg}(E_{i-1}) - \operatorname{rg}(E_i)}{r}\widehat{\deg}(\overline{E}) + \widehat{\deg}(\overline{E}_{i-1}) - \widehat{\deg}(\overline{E}_i)\Big] \\
&= -\sum_{i=1}^{d} a_i \Big[\operatorname{rg}(E_{i-1})(\widehat{\mu}(\overline{E}_{i-1}) - \widehat{\mu}(\overline{E})) - \operatorname{rg}(E_i)(\widehat{\mu}(\overline{E}_i) - \widehat{\mu}(\overline{E}))\Big] \\
&= -\sum_{i=1}^{d-1} (a_{i+1} - a_i)\operatorname{rg}(E_i)(\widehat{\mu}(\overline{E}_i) - \widehat{\mu}(\overline{E})).
\end{aligned}$$

Si $\overline{E}$ est semi-stable (resp. stable), alors pour tout $1 \leq i < d$, on a $\widehat{\mu}(\overline{E}_i) \leq \widehat{\mu}(\overline{E})$ (resp. $\widehat{\mu}(\overline{E}_i) < \widehat{\mu}(\overline{E})$). Par conséquent, on a $\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}^{\mathbf{a}}_{\mathscr{D}}) \geq 0$ (resp. $\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}^{\mathbf{a}}_{\mathscr{D}}) > 0$).

"$\Longleftarrow$" : Soit E_1 un sous-$\mathcal{O}_K$-module saturé de E. On considère la suite $\mathscr{D} : E = E_0 \supsetneq E_1 \supsetneq E_2 = 0$ et la suite d'entiers $\mathbf{a} = (0, 1)$. On a

$$\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}^{\mathbf{a}}_{\mathscr{D}}) = \mathrm{rg}(E_1)(\widehat{\mu}(\overline{E}) - \widehat{\mu}(\overline{E}_1)) \geq 0 \quad (\text{resp. } \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}^{\mathbf{a}}_{\mathscr{D}}) = \mathrm{rg}(E_1)(\widehat{\mu}(\overline{E}) - \widehat{\mu}(\overline{E}_1)) > 0),$$

donc $\widehat{\mu}(\overline{E}_1) \leq \widehat{\mu}(\overline{E})$ (resp. $\widehat{\mu}(\overline{E}_1) < \widehat{\mu}(\overline{E})$). Comme E_1 est arbitraire, le fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ est semi-stable (resp. stable). □

5.4.2 Majoration du degré d'Arakelov d'une droite dans un produit tensoriel

Soit $(\overline{E}^{(j)})_{1 \leq j \leq n}$ une collection de fibrés vectoriels hermitiens non-nuls sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Pour tout entier $1 \leq j \leq n$ soit $r^{(j)}$ le rang de $E^{(j)}$. On note $V = E_K^{(1)} \otimes \cdots \otimes E_K^{(n)}$. Soient G le groupe algébrique $\mathbb{GL}(E_K^{(1)}) \times \cdots \times \mathbb{GL}(E_K^{(n)})$, H le sous-groupe algébrique $\mathbb{SL}(E_K^{(1)}) \times \cdots \times \mathbb{SL}(E_K^{(n)})$ de G. Soit $\overline{M}$ un sous-fibré inversible de $\overline{E}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \overline{E}^{(n)}$, muni de la métrique hermitienne induite. On a une action canonique de G (ou H) sur $\mathbb{P}(V^\vee)$. Soit $\pi : \mathbb{P}(V^\vee) \to \operatorname{Spec} K$ le morphisme canonique. On considère M_K comme un point rationnel de $\mathbb{P}(V^\vee)$. D'après la proposition 5.3.2 3), le point $M_K \in \mathbb{P}(V^\vee)(K)$ est semi-stable pour l'action de H relativement à $\mathcal{O}(1)$ si et seulement s'il est semi-stalbe pour l'action de G relativement à

$$\mathcal{O}(1) \otimes \bigotimes_{j=1}^{n} \pi^*(\Lambda^{r^{(j)}} E_K^{(j)})^{\vee \otimes \frac{1}{r^{(j)}}}.$$

Si on note $\overline{L} = \displaystyle\bigotimes_{j=1}^{n} (\Lambda^{r^{(j)}} \overline{E}^{(j)})^{\otimes \frac{1}{r^{(j)}}}$, ceci est aussi équivalent à dire que $M_K \otimes L_K^\vee$, vu comme point rationnel de $\mathbb{P}(V^\vee \otimes L_K)$, est semi-stable pour l'action de G relativement à $\mathcal{O}(1)$. Dans ce cas-là, on a, d'après le théorème 5.3.5,

$$\widehat{\deg}(\overline{M}) \leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\widehat{\mu}(\overline{E}^{(j)}) + \frac{1}{2} \log(r^{(j)}) \Big). \tag{5.8}$$

Si M_K n'est pas stable pour l'action de H, d'après un résultat de Kempf [61], reformulé par Ramanan et Ramanathan ([77] Proposition 1.12), il existe deux entiers strictement positifs α, u et pour tout $1 \leq j \leq n$,

i) une suite décroissantes de sous-$\mathcal{O}_K$-modules saturés de $E^{(j)}$:

$$\mathscr{D}^{(j)} : E^{(j)} = E_0^{(j)} \supsetneq E_1^{(j)} \supsetneq \cdots \supsetneq E_{d^{(j)}}^{(j)} = 0,$$

ii) une suite strictement croissante d'entiers $\mathbf{a}^{(j)} = (a_i^{(j)})_{1 \leq i \leq d^{(i)}}$,

iii) une suite strictement décroissante d'entiers $\lambda^{(j)} = (\lambda_i^{(j)})_{0 \leq i < d^{(i)}}$

tels que

1) l'homomorphisme d'inclusion de M vers $E^{(1)} \otimes \cdots \otimes E^{(n)}$ se factorise par

$$\sum_{\lambda_{i_1}^{(1)} + \cdots + \lambda_{i_n}^{(n)} \geq \alpha} E_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes E_{i_n}^{(n)},$$

2) l'image canonique de $M_K \otimes L_K^\vee$ dans

$$\sum_{\lambda_{i_1}^{(1)}+\cdots+\lambda_{i_n}^{(n)}\geq\alpha} (E_{i_1,K}^{(1)} \otimes \cdots \otimes E_{i_n,K}^{(n)}) \otimes L_K^\vee \Big/ \sum_{\lambda_{i_1}^{(1)}+\cdots+\lambda_{i_n}^{(n)}>\alpha} (E_{i_1,K}^{(1)} \otimes \cdots \otimes E_{i_n,K}^{(n)}) \otimes L_K^\vee$$

$$\cong \Bigg(\bigoplus_{\lambda_{i_1}^{(1)}+\cdots+\lambda_{i_n}^{(n)}=\alpha} \bigotimes_{j=1}^{n} (E_{i_j,K}^{(j)}/E_{i_j+1,K}^{(j)}) \Bigg) \otimes L_K^\vee =: W_K \otimes L_K^\vee$$

est semi-stable pour l'action du groupe

$$\widetilde{G} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{d^{(j)}} \mathbb{GL}(E_{i-1,K}^{(j)}/E_{i,K}^{(j)})$$

relativement à $\mathcal{O}_{W^\vee \otimes L_K}(1) \otimes \bigotimes_{j=1}^n (\pi^* \mathscr{L}_{\mathscr{D}^{(j)},K}^{\mathbf{a}^{(j)}})^{\vee \otimes \frac{1}{u}}$, où $\pi : \mathbb{P}(W^\vee \otimes L_K) \to \operatorname{Spec} K$ est le morphisme canonique et l'action de $\widetilde{G}$ sur L_K est donnée par l'isomorphisme canonique

$$L_K \cong \bigotimes_{j=1}^{n} \bigotimes_{i=1}^{d^{(j)}} \operatorname{dét}(E_{i-1,K}^{(j)}/E_{i,K}^{(j)})^{\otimes \frac{1}{r^{(j)}}}.$$

On peut aussi dire que l'image de M_K dans

$$W_K = \bigoplus_{\lambda_{i_1}^{(1)}+\cdots+\lambda_{i_n}^{(n)}=\alpha} \bigotimes_{j=1}^{n} (E_{i_j,K}^{(j)}/E_{i_j+1,K}^{(j)})$$

est semi-stable pour l'action de $\widetilde{G}$ relativement à $\mathcal{O}_{W^\vee}(1) \otimes \pi^* L_K \otimes \bigotimes_{j=1}^n (\pi^* \mathscr{L}_{\mathscr{D}^{(j)},K}^{\mathbf{a}^{(j)}})^{\vee \otimes \frac{1}{u}}$. Pour tout $1 \leq j \leq n$ et tout $1 \leq i \leq d^{(j)}$ on note $r_i^{(j)} = \operatorname{rg}(E_{i-1}^{(j)}/E_i^{(j)})$. Par définition on obtient que

$$L_K \otimes \bigotimes_{j=1}^{n} (\mathscr{L}_{\mathscr{D}^{(j)},K}^{\mathbf{a}^{(j)}})^{\vee \otimes \frac{1}{u}} \cong \bigotimes_{j=1}^{n} \bigotimes_{i=1}^{d^{(j)}} \operatorname{dét}(E_{i-1,K}^{(j)}/E_{i,K}^{(j)})^{\otimes \frac{s_i^{(j)}}{r_i^{(j)}}},$$

$$\text{où} \quad s_i^{(j)} = \frac{r_i^{(j)}}{r^{(j)}} - \frac{r_i^{(j)}}{ur^{(j)}} \sum_{k=1}^{d^{(j)}} a_k^{(j)} r_k^{(j)} + \frac{a_i^{(j)} r_i^{(j)}}{u} \geq 0.$$

On a pour tout entier $1 \leq j \leq n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{d^{(j)}} s_i^{(j)} = 1$. D'après le théorème 5.3.5, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg}(\overline{M}) &\leq \widehat{\deg}(\overline{L}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{u} \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}_{\mathscr{D}^{(j)}}^{\mathbf{a}^{(j)}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d^{(j)}} s_i^{(j)} \log(r_i^{(j)}) \\
&\leq \widehat{\deg}(\overline{L}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{u} \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}_{\mathscr{D}^{(j)}}^{\mathbf{a}^{(j)}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d^{(j)}} s_i^{(j)} \log(r^{(j)}) \\
&= \widehat{\deg}(\overline{L}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{u} \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}_{\mathscr{D}^{(j)}}^{\mathbf{a}^{(j)}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \log(r^{(j)}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(\widehat{\mu}(\overline{E}^{(j)}) + \frac{1}{2} \log(r^{(j)}) - \frac{1}{u} \widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}_{\mathscr{D}^{(j)}}^{\mathbf{a}^{(j)}}) \Big).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Si on suppose de plus que les fibrés vectoriels hermitiens $\overline{E}^{(j)}$ soient semi-stables, alors $\widehat{\deg}(\overline{\mathscr{L}}^{\mathbf{a}^{(j)}}_{\mathscr{D}^{(j)}}) \geq 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$ (cf. la proposition 5.4.1). L'inégalité (5.9) implique que

$$\widehat{\deg}(\overline{M}) \leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\widehat{\mu}(\overline{E}^{(j)}) + \frac{1}{2}\log(r^{(j)})\Big). \tag{5.10}$$

Ceci nous permet donc de démontrer la proposition suivante :

Proposition 5.4.2 *Soit* $(\overline{E}^{(j)})_{1 \leq j \leq n}$ *une collection de fibrés vectoriels hermitiens semi-stables sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. *Si on note* $\overline{E} = \overline{E}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \overline{E}^{(n)}$, *alors*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\widehat{\mu}(\overline{E}^{(j)}) + \log(\operatorname{rg}(E^{(j)}))\Big) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. On désigne par $\widehat{\operatorname{udeg}}(\overline{E})$ le plus grand degré de sous-$\mathcal{O}_K$-module inversible de E (muni de la métrique induite). Les discussions ci-dessus montrent que

$$\widehat{\operatorname{udeg}}(\overline{E}) \leq \sum_{j=1}^{n} \widehat{\mu}(\overline{E}^{(j)}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \log(\operatorname{rg}(E^{(j)})).$$

D'après [14], on a

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) &\leq \widehat{\operatorname{udeg}}(\overline{E}) + \frac{1}{2}\log(\operatorname{rg}(E)) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}\\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \widehat{\mu}(\overline{E}^{(j)}) + \sum_{j=1}^{n} \log(\operatorname{rg}(E^{(j)})) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}\end{aligned}$$

□

Corollaire 5.4.3 *Soit* $(\overline{E}^{(j)})_{1 \leq j \leq n}$ *une collection de fibrés vectoriels hermitiens non-nuls sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. *Si on note* $\overline{E} = \overline{E}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \overline{E}^{(n)}$, *alors*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \sum_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^{(j)}) + \sum_{j=1}^{n} \log(\operatorname{rg}(E^{(j)})) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}. \tag{5.11}$$

Démonstration. Soit M un sous-$\mathcal{O}_K$-module de E. En prenant les suites de Harder-Narasimhan des $\overline{E}^{(j)}$ on obtient qu'il existe pour tout $1 \leq j \leq n$ un sous-quotient semi-stable $\overline{F}^{(j)}/\overline{G}^{(j)}$ de $\overline{E}^{(j)}$ tel que

1) $\widehat{\mu}(\overline{F}^{(j)}/\overline{G}^{(j)}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^{(j)})$,
2) l'homomorphisme d'inclusion de M vers E se factorise par $F^{(1)} \otimes \cdots \otimes F^{(n)}$,
3) l'image canonique de M dans $(F^{(1)}/G^{(1)}) \otimes \cdots \otimes (F^{(n)}/G^{(n)})$ est non-nulle.

En combinant le théorème précédent et l'inégalité de pentes on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(\overline{M}) &\leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\widehat{\mu}(\overline{E}^{(j)}) + \log(\operatorname{rg}(F^{(j)}/G^{(j)}))\Big) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}\\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\widehat{\mu}(\overline{E}^{(j)}) + \log(\operatorname{rg}(E^{(j)}))\Big) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.\end{aligned}$$

Comme M est arbitraire on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \sum_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^{(j)}) + \sum_{j=1}^{n} \log(\mathrm{rg}(E^{(j)})) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.$$

□

5.4.3 Fin de la démonstration

Soient $(\overline{E}_i)_{1\leq i\leq n}$ une collection de fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ et $\overline{E} = \overline{E}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{E}_n$. Si $N \geq 1$ est un entier, d'après le corollaire 5.4.3 on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^{\otimes N}) \leq \sum_{i=1}^{n} N\Big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) + \log(\mathrm{rg}\, E_i)\Big) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.$$

D'autre part, on a d'après (5.1)

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^{\otimes N}) \geq N\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}).$$

Par conséquent, on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \sum_{i=1}^{n} \Big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) + \log(\mathrm{rg}\, E_i)\Big) + \frac{\log|\Delta_K|}{2N[K:\mathbb{Q}]}.$$

Comme N est arbitraire, par passage à la limite, on obtient

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \sum_{i=1}^{n} \Big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) + \log(\mathrm{rg}\, E_i)\Big).$$

Le théorème 5.1.2 est donc démontré.

Chapitre 6

Polygones de Harder-Narasimhan asymptotiques

6.1 Algèbres graduées quasi-filtrées

Dans ce paragraphe, on fixe un corps commutatif K. On rappelle qu'une K-algèbre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-*graduée* est une somme directe $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ d'espaces vectoriels sur K indexés par $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ munie d'une structure d'anneau unifère (compatible[1] à sa structure d'espace vectoriel sur K) telle que $B_n B_m \subset B_{n+m}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$. On appelle *élément homogène de degré n* tout élément de B_n. Il est clair que l'élément unité de B est homogène de degré 0. Dans toute la suite du paragraphe, l'expression "K-algèbre graduée" désignera une K-algèbre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduée. Si B est une K-algèbre graduée, on appelle *B-module gradué* tout B-module M muni d'une décomposition $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ en somme directe de sous-espaces vectoriels sur K telle que $B_n M_m \subset M_{n+m}$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}$. Les éléments dans M_m sont appelés les *éléments homogènes de degré m* de M.

6.1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 6.1.1 Soient $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ une K-algèbre graduée et $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application. On dit que la K-algèbre B est *graduée f-quasi-filtrée* si chaque B_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration décroissante $(B_{n,s})_{s\in\mathbb{R}}$ telle qu'il existe un entier $n_0 \geq 0$ qui satisfait à la condition suivante : pour tout entier $r > 0$, tout $(n_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}^r$ et tout $(s_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathbb{R}^r$,

$$\prod_{i=1}^r B_{n_i,s_i} \subset B_{N,S}, \qquad \text{où } N = \sum_{i=1}^r n_i, \quad S = \sum_{i=1}^r \big(s_i - f(n_i)\big).$$

Si B est une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée. On dit qu'un B-module gradué $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ est *gradué f-quasi-filtré* si pour tout entier n, M_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration décroissante telle qu'il existe un entier $n_0 \geq 0$ qui satisfait à la condition suivante : pour

[1] i.e., pour tout couple (x, y) d'éléments dans B et tout élément $a \in K$, on a $a(xy) = (ax)y = x(ay)$.

tout $(n_i)_{1\le i\le r+1}\in\mathbb{Z}_{\ge n_0}^{r+1}$ et tout $(s_i)_{1\le i\le r+1}\in\mathbb{R}^{r+1}$, en posant

$$N=\sum_{i=1}^{r+1}n_i,\quad S=\sum_{i=1}^{r+1}\big(s_i-f(n_i)\big),$$

on a $\Big(\prod_{i=1}^{r}B_{n_i,s_i}\Big)M_{n_{r+1},s_{r+1}}\subset M_{N,S}$.

Si $f\equiv 0$ est la fonction identiquement nulle, une K-algèbre graduée 0-quasi-filtrée A est appelée une K-algèbre *graduée filtrée* ; un A-module gradué 0-quasi-filtrée est appelé un module *gradué filtré*.

Remarque 6.1.2 Soient B une K-algèbre $\mathbb{Z}_{\ge 0}$-graduée et M un B-module $\mathbb{Z}$-gradué. On suppose que, pour tout entier $n\ge 0$, B_n (resp. M_n) soit muni d'une $\mathbb{R}$-filtration décroissante. Soient f et g deux fonctions sur $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_{\ge 0}$ telles que $f(n)\le g(n)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$. Si B (resp. M) est graduée f-quasi-filtrée (resp. gradué f-quasi-filtré), alors B (resp. M) est graduée g-quasi-filtrée (resp. gradué g-quasi-filtré).

Proposition 6.1.3 *Soient B une K-algèbre $\mathbb{Z}_{\ge 0}$-graduée et $f:\mathbb{Z}_{\ge 0}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ une fonction. On suppose que, pour chaque $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, B_n soit muni d'une $\mathbb{R}$-filtration exhaustive et continue à gauche et on note $\lambda: B_n\to]-\infty,+\infty]$ la fonction indice associée. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) l'algèbre B est graduée f-quasi-filtrée,

2) il existe un entier $n_0>0$ tel que, pour tous les éléments homogènes $a_1,\cdots,a_r$ de degré $\ge n_0$ de B, si on note $a=\prod_{i=1}^{r}a_i$, on ait

$$\lambda(a)\ge\sum_{i=1}^{r}\Big(\lambda(a_i)-f(\deg(a_i))\Big).\tag{6.1}$$

Démonstration. Les filtrations étant exhaustives, la somme à droite de l'égalité (6.1) est bien définie et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

“1)$\Longrightarrow$2)” : Comme les filtrations sont continues à gauche, on a $a_i\in\mathcal{F}_{\lambda(a_i)}B_{\deg(a_i)}$. Soient

$$d=\sum_{i=1}^{r}\deg(a_i)\text{ et }\eta=\sum_{i=1}^{r}\Big(\lambda(a_i)-f(\deg(a_i))\Big).$$

Comme B est graduée f-quasi-filtrée, on obtient que $a\in\mathcal{F}_\eta B_d$, d'où $\lambda(a)\ge\eta$.

“2)$\Longrightarrow$1)” : Supposons que $a_1,\cdots,a_r$ soient des éléments homogènes de degré $\ge n_0$ de B. Pour tout entier $1\le i\le r$ soit $d_i=\deg(a_i)$. Soit $a=\prod_{i=1}^{r}a_i$. Si pour tout $1\le i\le r$ on a $a_i\in\mathcal{F}_{t_i}B_{d_i}$, alors on a $\lambda(a_i)\ge t_i$. Par conséquent,

$$\lambda(a)\ge\sum_{i=1}^{r}\Big(t_i-f(d_i)\Big).$$

Donc $a\in\mathcal{F}_{t_1+\cdots+t_r-f(d_1)-\cdots-f(d_r)}B_{d_1+\cdots+d_r}$. □

Corollaire 6.1.4 *Soient $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction et B une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée. On suppose que pour chaque $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, la filtration sur B_n soit exhaustive et continue à gauche.*

1) Soit A une sous-K-algèbre de B engendrée par des éléments homogènes, munie de la graduation induite. Si pour chaque $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, l'espace A_n est muni de la filtration image réciproque, alors A est une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée.

2) Soient I un idéal homogène de B et $C = B/I$, muni de la graduation quotient. Si pour chaque $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, C_n est muni de la filtration image directe forte, alors C est une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée.

Démonstration. 1) D'après la proposition 4.2.8, la filtration sur A est exhaustive. Si a est un élément homogène de A, alors $\deg_A(a) = \deg_B(a)$. D'autre part, comme les filtrations sur les A_n sont des filtrations images réciproques, on obtient $\lambda_A(a) = \lambda_B(a)$. Donc pour toute famille $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'éléments homogènes de degré $\geq n_0$ dans A avec $a = \prod_{i=1}^r a_i$, on a

$$\lambda_A(a) = \lambda_B(a) \geq \sum_{i=1}^r \Big(\lambda_B(a_i) - f(\deg_B(a_i))\Big) = \sum_{i=1}^r \Big(\lambda_A(a_i) - f(\deg_A(a_i))\Big).$$

Donc l'algèbre A est graduée f-quasi-filtrée.

2) D'après la proposition 4.2.8, la filtration sur C est exhaustive. Soit $\pi : B \to C$ l'homomorphisme canonique. Supposons que $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ soit une famille d'éléments homogènes de degré $\geq n_0$ dans C. Pour tout $1 \leq i \leq r$ soit $d_i = \deg(a_i)$ et $t_i = \lambda_C(a_i)$. D'après la proposition 4.2.9 2), pour tout $1 \leq i \leq r$ il existe une suite $(\alpha_j^{(i)})_{j \geq 1}$ dans B_{d_i} telle que $\pi(\alpha_j^{(i)}) = a_i$ pour tout $j \geq 1$ et telle que la suite $(\lambda_B(\alpha_j^{(i)}))_{j \geq 1}$ soit croissante et converge vers t_i. Soit $a = \prod_{i=1}^r a_i$ et pour tout $j \geq 1$ soit $\alpha_j = \prod_{i=1}^r \alpha_j^{(i)}$. On a évidemment $a = \pi(\alpha_j)$ pour tout $j \geq 1$. Par conséquent, $\lambda_C(a) \geq \lambda_B(\alpha_j)$. D'autre part,

$$\lambda_B(\alpha_j) \geq \sum_{i=1}^r \Big(\lambda_B(\alpha_j^{(i)}) - f(d_i)\Big).$$

Donc

$$\lambda_C(a) \geq \sum_{i=1}^r \Big(\lambda_B(\alpha_j^{(i)}) - f(d_i)\Big).$$

Par passage à la limite en prenant $j \to +\infty$ on obtient

$$\lambda_C(a) \geq \sum_{i=1}^r (t_i - f(d_i)).$$

□

Proposition 6.1.5 *Soient $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application, B une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée et M un B-module gradué. On suppose que pour tout entier n, M_n soit muni d'une $\mathbb{R}$-filtration exhaustive et continue à gauche. On suppose que pour tout entier $n \geq 0$, la filtration sur B_n soit exhaustive et continue à gauche. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *le B-module gradué M est gradué f-quasi-filtré ;*
2) *il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que, pour toute famille $(a_i)_{1\leq i\leq r}$ d'éléments homogènes de degré $\geq n_0$ de B et tout élément homogène x de degré $\geq n_0$ de M, si on note $y = (a_1 \cdots a_r)x$, alors*
$$\lambda(y) \geq \sum_{i=1}^{r} \Big(\lambda(a_i) - f(\deg(a_i))\Big) + \lambda(x) - f(\deg(x)).$$

Démonstration. "$\Longrightarrow$" : On note $d_i = \deg(a_i)$, $d = \deg(x)$, $s_i = \lambda(a_i)$, $s = \lambda(x)$,
$$m = d + \sum_{i=1}^{r} d_i, \quad \eta = s - f(d) + \sum_{i=1}^{r} \Big(s_i - f(d_i)\Big).$$
Comme les filtrations sont continues à gauche on a
$$a_i \in \mathcal{F}_{s_i} B_{d_i}, \quad x \in \mathcal{F}_s(M_d).$$
Pusique M est gradué f-quasi-filtré, on a $y \in \mathcal{F}_\eta M_m$, donc $\lambda(y) \geq \eta$.

"$\Longleftarrow$" : Soient $(a_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille d'éléments homogènes de degré > 0 de B et x un élément homogène de degré > 0 de M. Pour tout $1 \leq i \leq r$ soit $d_i = \deg(a_i)$. Soit $d = \deg(x)$. Supposons que $a_i \in \mathcal{F}_{t_i} B_{d_i}$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et $a \in \mathcal{F}_t M_d$. On a alors que $\lambda(a_i) \geq t_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et que $\lambda(a) \geq t$. Soient
$$m = d + \sum_{i=1}^{r} d_i, \quad \eta = t - f(d) + \sum_{i=1}^{r} \Big(t_i - f(d_i)\Big), \quad y = \Big(\prod_{i=1}^{r} a_i\Big)x.$$
On a $\lambda(y) \geq \eta$ par hypothèse, donc $y \in \mathcal{F}_\eta M_m$ puisque la filtration est continue à gauche. □

Corollaire 6.1.6 *Soient $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application, B une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée et M un B-module gradué f-quasi-filtré. On suppose que pour tout entier $n \geq 0$, la filtration sur B_n (resp. M_n) soit exhaustive et continue à gauche.*
1) *Soit M' un sous-B-module gradué. Si chaque M'_n est muni de la filtration image réciproque, alors M' est un B-module gradué f-quasi-filtré.*
2) *Soient M' un sous-B-module homogène de M et $M'' = M/M'$. Si chaque M''_n est muni de la filtration image directe forte, alors M'' est un B-module gradué f-quasi-filtré.*

Démonstration. 1) D'abord pour tout entier n, la filtration image réciproque sur M_n est exhaustive et continue à gauche. Si x est un élément homogène de degré > 0 dans M', on a $\deg_{M'}(x) = \deg_M(x)$ et $\lambda_{M'}(x) = \lambda_M(x)$. Si $(a_i)_{1\leq i\leq r}$ est une famille d'éléments homogènes de degré > 0 dans B et si $y = \Big(\prod_{i=1}^{r} a_i\Big)x$, alors
$$\begin{aligned}\lambda_{M'}(y) = \lambda_M(y) &\geq \lambda_M(x) - f(\deg_M(x)) + \sum_{i=1}^{r} \Big(\lambda(a_i) - f(\deg(a_i))\Big)\\ &= \lambda_{M'}(x) - f(\deg_{M'}(x)) + \sum_{i=1}^{r} \Big(\lambda(a_i) - f(\deg(a_i))\Big).\end{aligned}$$

2) D'abord pour tout entier n, la filtration sur M''_n est exhaustive. Soit $\pi : M \to M''$ l'application canonique. Supposons que x soit un élément homogène de degré > 0 de M'' et

que $(a_i)_{1\le i\le r}$ soit une famille d'éléments homogène de degré >0 de B. Soient $d=\deg(x)$ et $t=\lambda(x)$. Pour tout entier $1\le i\le r$ soient $d_i=\deg(a_i)$ et $t_i=\lambda(a_i)$. D'après la proposition 4.2.9 2), il exite une suite $(x_j)_{j\ge 1}$ d'éléments dans M_d telle que $\pi(x_j)=x$ pour tout $j\ge 1$ et que la suite $(\lambda_M(x_j))_{j\ge 1}$ soit croissante et converge vers $\lambda_{M''}(x)$. Soit $a=\displaystyle\prod_{i=1}^r a_i$ et pour tout entier $j\ge 1$ soit $y_j=ax_j$. Puisque M est gradué f-quasi-filtré on a

$$\lambda_M(y_j)\ge\lambda_M(x_j)-f(d)+\sum_{i=1}^r\Big(t_i-f(d_i)\Big).$$

Comme $\pi(y_j)=\pi(ax_j)=a\pi(x_j)=ax$, on obtient

$$\lambda_{M''}(ax)\ge\lambda_M(x_j)-f(d)+\sum_{i=1}^r\Big(t_i-f(d_i)\Big).$$

Par passage à la limite on en déduit

$$\lambda_{M''}(ax)\ge t-f(d)+\sum_{i=1}^r\Big(t_i-f(d_i)\Big).$$

□

Par un raisonnement analogue, on démontre aussi :

Corollaire 6.1.7 *Soient $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ une fonction, B une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée, et M un B-module gradué f-quasi-filtré. On suppose que pour tout entier positif (resp. tout entier) n, la filtration sur B_n (resp. M_n) soit exhaustive et continue à gauche.*

1) Soit A une sous-K-algèbre de B engendrée par des éléments homogènes, munie de la graduation induite. Si chaque espace vectoriel A_n est muni de la filtration image réciproque, alors M est un A-module gradué f-quasi-filtré.

2) Soient I un idéal homogène de B contenu dans $\operatorname{ann}(M)$, *$C=B/I$, muni de la graduation quotient. Si chaque C_n est muni de la filtration image directe forte, alors M est un C-module gradué f-quasi-filtré.*

6.1.2 Filtrations sur l'algèbre symétrique d'un espace vectoriel de rang fini

Pour tout couple d'entiers (n,d) tel que $n\ge 0$ et que $d\ge 1$, soit $\Delta_n^{(d)}$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{\ge 0}^d$ formé des décompositions de n en somme de d entiers positifs ou nuls. On introduit la relation d'ordre lexicographique sur $\Delta_n^{(d)}$:

$$(a_1,\cdots,a_d)\ge(b_1,\cdots,b_d)$$

si et seulement s'il existe $1\le i\le d$ tel que $a_j=b_j$ pour tout $1\le j\le i$ et que $a_{i+1}>b_{i+1}$ si $i<d$. L'ensemble $\Delta_n^{(d)}$ est totalement ordonné par cette relation d'ordre. D'autre part, pour tout $\mathbf{n}=(n_i)_{1\le i\le r}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^r$, on a une application de $\Delta_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times\Delta_{n_r}^{(d)}$ vers $\Delta_{n_1+\cdots+n_r}^{(d)}$. qui envoie $(\alpha_i)_{1\le i\le r}$ vers $\alpha_1+\cdots+\alpha_r$ (l'addition étant celle de $\mathbb{Z}^d$). Cette application n'est pas injective

en général mais est toujours surjective. En outre, si $(\alpha_i)_{1\le i\le r}$ et $(\beta_i)_{1\le i\le r}$ sont deux éléments de $\Delta_{n_1}^{(d)}\times\cdots\Delta_{n_r}^{(d)}$ tels que $\alpha_i\ge\beta_i$ pour tout $1\le i\le r$, alors

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_r\ge\beta_1+\cdots+\beta_r.$$

Pour tout $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ on désigne par $\Gamma_n^{(d)}$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{\ge 0}^{d-1}$ formé des éléments $(a_i)_{1\le i\le d-1}$ tels que $0\le a_1+\cdots+a_{d-1}\le n$. On a une application naturelle $p_n^{(d)}:\Delta_n^{(d)}\to\Gamma_n^{(d)}$ définie par la projection sur les $d-1$ premiers facteurs. L'application $p_n^{(d)}$ est en fait une bijection ; son inverse est l'application qui envoie $(a_i)_{1\le i\le d-1}$ en

$$(a_1,\cdots,a_{d-1},n-a_1-\cdots-a_{d-1}).$$

Pour tout $\mathbf{n}=(n_i)_{1\le i\le r}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^r$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times\Delta_{n_r}^{(d)} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "p_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times p_{n_r}^{(d)}"'] & \Delta_{|\mathbf{n}|}^{(d)} \arrow[d, "p_N^{(d)}"] \\
\Gamma_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times\Gamma_{n_r}^{(d)} \arrow[r, "+"'] & \Gamma_{|\mathbf{n}|}^{(d)}
\end{tikzcd} \tag{6.2}$$

où $|\mathbf{n}|=n_1+\cdots+n_r$ et où les applications "+" sont définies par l'addition dans les monoïdes $\mathbb{Z}_{\ge 0}^d$ et $\mathbb{Z}_{\ge 0}^{d-1}$, respectivement.

Théorème 6.1.8 *Soient $r\ge 2$ et $d\ge 1$ deux entiers. Pour tout $\mathbf{n}=(n_i)_{1\le i\le r}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^r$, il existe une mesure de probabilité $\nu_{\mathbf{n}}$ sur $\Delta_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times\Delta_{n_r}^{(d)}$ telle que l'image directe de $\nu_{\mathbf{n}}$ par chacune des r projections sur $\Delta_{n_1}^{(d)},\cdots,\Delta_{n_r}^{(d)}$ soit une mesure équiprobable, ainsi que son image directe par l'application "+" à valeurs dans $\Delta_{|\mathbf{n}|}^{(d)}$.*

Démonstration. Le théorème est trivial lorsque $d=1$ car alors, pour tout $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $\Delta_k^{(d)}$ est le singleton $\{k\}$. Dans la suite de la démonstration, on suppose $d\ge 2$. D'après (6.2) il suffit de construire une mesure de probabilité $\mu_{\mathbf{n}}$ sur $\Gamma_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times\Gamma_{n_r}^{(d)}$ telle que l'image directe de $\mu_{\mathbf{n}}$ par chacune des r projections sur $\Gamma_{n_1}^{(d)},\cdots,\Gamma_{n_r}^{d}$ soit une mesure équiprobable, ainsi que son image directe par l'application "+" à valeurs dans $\Gamma_{|\mathbf{n}|}^{(d)}$.

Pour tout $\alpha=(a_i)_{1\le i\le d-1}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^{d-1}$, on définit $|\alpha|=a_1+\cdots+a_{d-1}$. L'ensemble $\Gamma_n^{(d)}$ s'écrit sous la forme $\Gamma_n^{(d)}=\{\alpha\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^{d-1}\mid|\alpha|\le n\}$. Si $\alpha=(a_i)_{1\le i\le d-1}$ est un élément de $\mathbb{Z}_{\ge 0}^{d-1}$, on note $\alpha!=a_1!\times\cdots\times a_{d-1}!$.

On considère l'anneau des séries formelles de rd variables $R=\mathbb{Z}[\![\mathbf{t},\mathbf{X}]\!]$, où $\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_r)$, $\mathbf{X}=(X_{i,j})_{\substack{1\le i\le r,\\ 1\le j\le d-1}}$. Si $\alpha=(a_1,\cdots,a_{d-1})\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^{d-1}$ et si $1\le i\le r$, on désigne par X_i^α le produit $X_{i,1}^{a_1}\times\cdots\times X_{i,d-1}^{a_{d-1}}$. Si $\mathbf{n}=(n_i)_{1\le i\le r}$ est un élément de $\mathbb{Z}_{\ge 0}^r$, on désigne par $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}$ le produit $t_1^{n_1}\times\cdots\times t_r^{n_r}$. Soit $H(\mathbf{t},\mathbf{X})$ la série formelle à coefficients entiers positifs

$$\sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^r}\mathbf{t}^{\mathbf{n}}\sum_{\substack{(\alpha_i)\in(\mathbb{Z}_{\ge 0}^{d-1})^r\\ |\alpha_i|\le n_i}}\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\frac{(n_1+\cdots+n_r-|\alpha_1+\cdots+\alpha_r|)!}{(n_1-|\alpha_1|)!\cdots(n_r-|\alpha_r|)!}\prod_{j=1}^r X_j^{\alpha_j}.$$

En faisant le changement d'indices $m_i = n_i - |\alpha_i|$ et en permutant les sommations, puis en posant $(\beta_1, \cdots, \beta_{d-1}) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ et $m = m_1 + \cdots + m_r$, on obtient l'égalité dans $\mathbb{Z}[\![\mathbf{t}, \mathbf{X}]\!]$:

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{t}, \mathbf{X}) &= \sum_{(\alpha_i) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1})^r} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} \prod_{j=1}^{r} t_j^{|\alpha_j|} X_j^{\alpha_j} \sum_{\mathbf{m}=(m_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} \frac{(m_1 + \cdots + m_r)!}{m_1! \cdots m_r!} \mathbf{t}^{\mathbf{m}} \\
&= \sum_{(\beta_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} (t_1 X_{1,i} + \cdots + t_r X_{r,i})^{\beta_i} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (t_1 + \cdots + t_r)^m \\
&= (1 - (t_1 + \cdots + t_r))^{-1} \prod_{i=1}^{d-1} (1 - (t_1 X_{1,i} + \cdots + t_r X_{r,i}))^{-1}.
\end{aligned}$$

Ce calcul montre aussi (cf. [56] chap. II §2.4) que le domaine de convergence absolue de Reinhardt de $H(\mathbf{t}, \mathbf{X})$ dans $\mathbb{C}^{rd}$ est défini par les conditions

$$\sum_{j=1}^{r} |t_j| < 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{r} |t_j||X_{j,i}| < 1.$$

Cette observation nous autorise à substituer le vecteur $\mathbb{1} = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{d-1 \text{ copies}})$ à certaines des variables X_i sans avoir à examiner de questions de convergence (qui en fait sont anodines).

On effectue le changement de variables $m_i = n_i - |\alpha_i|$ pour $2 \leq i \leq r$, et on obtient

$$\begin{aligned}
&H(\mathbf{t}, \mathbf{X})|_{X_2 = \cdots = X_r = \mathbb{1}} \\
&= \sum_{n_1 \geq 0} t_1^{n_1} \sum_{|\alpha_1| \leq n_1} X_1^{\alpha_1} \sum_{\substack{(\alpha_i)_{i=2}^r \in (\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1})^{r-1} \\ (m_i)_{i=2}^r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r-1}}} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} \frac{(n_1 + m_2 + \cdots + m_r - |\alpha_1|)!}{(n_1 - |\alpha_1|)! m_2! \cdots m_r!} \prod_{j=2}^{r} t_j^{m_j + |\alpha_j|} \\
&= \sum_{n_1 \geq 0} t_1^{n_1} \sum_{|\alpha_1| \leq n_1} X_1^{\alpha_1} \sum_{(\alpha_i)_{i=2}^r \in (\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1})^{r-1}} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} \prod_{j=2}^{r} t_j^{|\alpha_j|} \\
&\qquad \sum_{(m_i)_{i=2}^r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{r-1}} \frac{(n_1 + m_2 + \cdots + m_r - |\alpha_1|)!}{(n_1 - |\alpha_1|)! m_2! \cdots m_r!} \prod_{j=2}^{r} t_j^{m_j}.
\end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on a

$$\sum_{b \geq 0} \frac{(a+b)!}{a! b!} t^b = (1-t)^{-a-1},$$

on en déduit donc

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(\alpha_i)_{i=2}^r\in(\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1})^{r-1}}\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{|\alpha_j|}\\
&=\sum_{(\alpha_i)_{i=2}^r\in(\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1})^{r-1}}\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!(\alpha_2+\cdots+\alpha_r!)}\frac{(\alpha_2+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{|\alpha_j|}\\
&=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1}}\frac{(\alpha_1+\alpha)!}{\alpha_1!\alpha!}\sum_{\substack{(\alpha_i)_{i=2}^r\in(\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1})^{r-1}\\ \alpha_2+\cdots+\alpha_r=\alpha}}\frac{(\alpha_2+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{|\alpha_j|}\\
&=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1}}\frac{(\alpha_1+\alpha)!}{\alpha_1!\alpha!}(t_2+\cdots+t_r)^{|\alpha|}=(1-(t_2+\cdots+t_r))^{-|\alpha_1|-d+1},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(m_i)_{i=2}^r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r-1}}\frac{(n_1+m_2+\cdots+m_r-|\alpha_1|)!}{(n_1-|\alpha_1|)!m_2!\cdots m_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{m_j}\\
&=\sum_{(m_i)_{i=2}^r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r-1}}\frac{(n_1+m_2+\cdots+m_r-|\alpha_1|)!}{(n_1-|\alpha_1|)!(m_2+\cdots+m_r)!}\frac{(m_2+\cdots+m_r)!}{m_2!\cdots m_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{m_j}\\
&=\sum_{M\geq 0}\frac{(n_1-|\alpha_1|+M)!}{(n_1-|\alpha_1|)!M!}\sum_{\substack{(m_i)_{i=2}^r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r-1}\\ m_2+\cdots+m_r=M}}\frac{(m_2+\cdots+m_r)!}{m_2!\cdots m_r!}\prod_{j=2}^r t_j^{m_j}\\
&=\sum_{M\geq 0}\frac{(n_1-|\alpha_1|+M)!}{(n_1-|\alpha_1|)!M!}(t_2+\cdots+t_r)^M=(1-(t_2+\cdots+t_r))^{-n_1+|\alpha_1|-1}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
H(\mathbf{t},\mathbf{X})|_{X_2=\cdots=X_r=\mathbb{1}}&=\sum_{n_1\geq 0}t_1^{n_1}(1-(t_2+\cdots+t_r))^{-n_1-d}\sum_{|\alpha_1|\leq n_1}X_1^{\alpha_1}\\
&=\sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r}\mathbf{t}^{\mathbf{n}}\frac{(n_1+\cdots+n_r+d-1)!}{(n_1+d-1)!n_2!\cdots n_r!}\sum_{|\alpha_1|\leq n_1}X_1^{\alpha_1}.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

De même, pour tout $1\leq j\leq r$, on a

$$
\begin{aligned}
&H(\mathbf{t},\mathbf{X})|_{X_1=\cdots=X_{j-1}=X_{j+1}=\cdots=X_r=\mathbb{1}}\\
&=\sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r}\mathbf{t}^{\mathbf{n}}\frac{(n_1+\cdots+n_r+d-1)!}{n_1!\cdots n_{j-1}!(n_j+d-1)!n_{j+1}!\cdots n_r!}\sum_{|\alpha_j|\leq n_j}X_j^{\alpha_j}.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
&H(\mathbf{t},\mathbf{X})|_{X_1=\cdots=X_r=Y}\\
&=\sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r}\mathbf{t}^{\mathbf{n}}\sum_{\substack{(\alpha_i)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1})^r\\ |\alpha_i|\leq n_i}}\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\frac{(n_1+\cdots+n_r-|\alpha_1+\cdots+\alpha_r|)!}{(n_1-|\alpha_1|)!\cdots(n_r-|\alpha_r|)!}Y^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r}.
\end{aligned}
$$

En faisant le changement d'indexation $m_i = n_i - |\alpha_i|$ pour tout $1 \le i \le r$, on obtient

$$\begin{aligned}
&H(\mathbf{t}, \mathbf{X})|_{X_1=\cdots=X_r=Y} \\
&= \sum_{(\alpha_i)\in(\mathbb{Z}_{\ge 0}^{d-1})^r} \frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!} \prod_{j=1}^r t_j^{|\alpha_j|} Y^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r} \sum_{\mathrm{m}=(m_i)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^r} \frac{(m_1+\cdots+m_r)!}{m_1!\cdots m_r!} \mathbf{t}^{\mathbf{m}} \\
&= \sum_{N\ge 0} (t_1+\cdots+t_r)^N \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^{d-1}} Y^\gamma (t_1+\cdots+t_r)^{|\gamma|} = \sum_{M\ge 0} (t_1+\cdots+t_r)^M \sum_{|\gamma|\le M} Y^\gamma,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le changement d'indexation $M = N+|\gamma|$ dans la dernière égalité. Par conséquent, on a

$$H(\mathbf{t}, \mathbf{X})|_{X_1=\cdots=X_r=Y} = \sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^r} \frac{(n_1+\cdots+n_r)!}{n_1!\cdots n_r!} t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r} \sum_{|\gamma|\le n_1+\cdots+n_r} Y^\gamma. \tag{6.5}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
&H(\mathbf{t}, (\mathbb{1}, \cdots \mathbb{1})) = (1-(t_1+\cdots+t_r))^{-d} \\
&= \sum_{N\ge 0} \frac{(N+d-1)!}{N!(d-1)!} \sum_{\substack{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^r \\ n_1+\cdots+n_r=N}} \frac{N!}{n_1!\cdots n_r!} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} \\
&= \sum_{\mathbf{n}=(n_i)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^r} \frac{(n_1+\cdots+n_r+d-1)!}{n_1!\cdots n_r!(d-1)!} \mathbf{t}^{\mathbf{n}}.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Pour tout $\mathbf{n} = (n_i) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^r$, posons

$$\mu_{\mathbf{n}} = \frac{(d-1)!n_1!\cdots n_r!}{(n_1+\cdots+n_r+d-1)!} \sum_{\substack{(\alpha_i)\in(\mathbb{Z}_{\ge 0}^{d-1})^r \\ |\alpha_i|\le n_i}} \left(\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!} \frac{(n_1+\cdots+n_r-|\alpha_1+\cdots+\alpha_r|)!}{(n_1-|\alpha_1|)!\cdots(n_r-|\alpha_r|)!} \right) \delta_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)}.$$

La définition de $H(\mathbf{t}, \mathbf{X})$ et les égalités (6.4), (6.5) et (6.6) montrent que $\mu_{\mathbf{n}}$ vérifie les conditions requises. $\square$

Soit E un espace vectoriel de dimension d sur un corps K. Pour tout entier $n \ge 0$ soit $B_n = \mathrm{Sym}^n E$. Choisissons une base $\mathbf{e} = (e_i)_{1\le i\le d}$ de E. On a alors une application $\varphi_n : \Delta_n^{(d)} \to B_n$ qui envoie $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ en

$$e^\alpha := e_1^{\alpha_1} \cdots e_d^{\alpha_d}.$$

L'image de $\Delta_n^{(d)}$ par φ_n est une base de B_n. Si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, B_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration séparée, exhaustive et continue à gauche, alors (cf. la proposition 4.2.15) il existe pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une base maximale $\mathbf{u}^{(n)} = (u_\alpha)_{\alpha\in\Delta_n^{(d)}}$ de B_n pour cette filtration telle que

$$u_\alpha \in e^\alpha + \sum_{\beta<\alpha} K e^\beta. \tag{6.7}$$

Si $\mathbf{n} = (n_i)_{1\le i\le r} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^r$ et $N = n_1 + \cdots + n_r$, pour tout $\gamma \in \Delta_N^{(d)}$ soit $u_\gamma^{(\mathbf{n})}$ un élément dans

$$\left\{ \prod_{i=1}^r u_{\alpha_i} \;\middle|\; \alpha_i \in \Delta_{n_i}^{(d)},\ \sum_{i=1}^r \alpha_i = \gamma \right\}.$$

tel que

$$\lambda(u_\gamma^{(\mathbf{n})}) = \max_{\substack{\alpha_i \in \Delta_{n_i}^{(d)} \\ \alpha_1+\cdots+\alpha_r=\gamma}} \lambda(u_{\alpha_1}\cdot \cdots \cdot u_{\alpha_r}).$$

De (6.7), on déduit

$$u_\gamma^{(\mathbf{n})} \in e^\gamma + \sum_{\delta<\gamma} Ke^\delta.$$

Donc $\mathbf{u}^{(\mathbf{n})} := (u_\gamma^{(\mathbf{n})})_{\gamma\in\Delta_N^{(d)}}$ est une base de B_N.

Définition 6.1.9 On désigne par $C_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une *mesure de Radon* n'est rien d'autre qu'un forme linéaire positive sur $C_c(\mathbb{R})$. On désigne par $\mathscr{M}_+$ le cône convexe des mesures de Radon sur $\mathbb{R}$. On désigne par $\mathscr{M}_1$ l'ensemble des mesures de probabilité sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Par le théorème de représentation de Riesz, $\mathscr{M}_1$ s'indentifie à l'ensemble des éléments λ de $\mathscr{M}_+$ tel que $\|\lambda\| := \sup\{\lambda(f)\,|\|f \in C_c(\mathbb{R})$ et $\|f\|_{\sup} = 1\} = 1$. C'est une partie convexe de $\mathscr{M}_+$.

Si c est un nombre réel, on désigne par $\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie x en $x + c$. Elle induit un automorphisme de cône convexe $\tau_c : \mathscr{M}_+ \to \mathscr{M}_+$ qui envoie $\mu \in \mathscr{M}_+$ en l'image directe de μ par φ_c. On définit ainsi une action de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{M}_+$ qui laisse $\mathscr{M}_1$ invariant, et qui préserve la realtion "être à droite" $\gg$ entre les mesures (cf. la définition 4.2.12).

Si ε est un nombre réel strictement postif, on désigne par $\gamma_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $x \in \mathbb{R}$ en εx. Cette application induit un automorphisme de cône convexe $T_\varepsilon : \mathscr{M}_+ \to \mathscr{M}_+$ qui laisse $\mathscr{M}_1$ invariant, et qui préserve la relation "être à droite" $\gg$.

Proposition 6.1.10 *Soient $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application et E un espace vectoriel de dimension $0 < d < +\infty$ sur K et, pour tout entier $n \geq 0$, soit $B_n = \operatorname{Sym}^n E$. Soient c un nombre réel positif et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante concave c-lipschitzienne. On suppose que chaque espace vectoriel B_n soit muni d'une $\mathbb{R}$-filtration décroissante séparée exhaustive et continue à gauche telle que $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ soit une algèbre graduée f-quasi-filtrée.*

Si pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} gd\Big(T_{\frac{1}{n}}\mu_{B_n}\Big),$$

alors on a pour tout entier $r \geq 2$ et tout $\mathbf{n} = (n_i) \in \mathbb{Z}^r_{\geq n_0}$ avec $N = n_1 + \cdots + n_r$,

$$NI_N \geq \sum_{i=1}^r \Big(n_i I_{n_i} - cf(n_i)\Big).$$

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 0$ on désigne par ξ_n la mesure équiprobable sur $\Delta_n^{(d)}$, par $\nu_{\mathbf{n}}$ une mesure sur $\Delta_{n_1}^{(d)} \times \cdots \times \Delta_{n_r}^{(d)}$ satisfaisant aux conditions du théorème 6.1.8, et par $\mathbf{u}^{(\mathbf{n})}$ une base de B_N construite comme ci-dessus. On a alors (cf. la définition 4.2.18)

$$\begin{aligned} I_N \geq \int_{\mathbb{R}} gd\Big(T_{\frac{1}{N}}\mu_{\mathbf{u}^{(\mathbf{n})}}\Big) &= \int_{\Delta_N^{(d)}} g\left(\frac{1}{N}\lambda(u_\gamma^{(\mathbf{n})})\right) d\xi_N(\gamma) \\ &= \int_{\Delta_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times\Delta_{n_r}^{(d)}} g\left(\frac{1}{N}\lambda(u^{(\mathbf{n})}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_r})\right) d\nu_{\mathbf{n}}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r). \end{aligned}$$

Comme g est une fonction croissante, d'après la définition de $u_\gamma^{(\mathbf{n})}$, on a

$$I_N \geq \int_{\Delta_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times\Delta_{n_r}^{(d)}} g\left(\frac{1}{N}\lambda(u_{\alpha_1}^{(n_1)}\cdots u_{\alpha_r}^{(n_r)})\right) d\nu_{\mathbf{n}}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n).$$

Comme l'algèbre B est graduée f-quasi-filtrée et comme g est croissante, on en déduit

$$I_N \geq \int_{\Delta_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times\Delta_{n_r}^{(d)}} g\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r}\Big(\lambda(u_{\alpha_i}^{(n_i)})-f(n_i)\Big)\right)d\nu_{\mathbf{n}}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r).$$

Car la fonction g est c-lipschitzienne, on a l'inégalité

$$I_N \geq \int_{\Delta_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times\Delta_{n_r}^{(d)}} \left[g\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r}\lambda(u_{\alpha_i}^{(n_i)})\right)-\frac{c}{N}\sum_{i=1}^{r}f(n_i)\right]d\nu_{\mathbf{n}}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r).$$

Ensuite, la concavité de g implique que

$$I_N \geq \int_{\Delta_{n_1}^{(d)}\times\cdots\times\Delta_{n_r}^{(d)}} \left[\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i}{N}g\left(\frac{\lambda(u_{\alpha_i}^{(n_i)})}{n_i}\right)\right]d\nu_{\mathbf{n}}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)-\frac{c}{N}\sum_{i=1}^{r}f(n_i)$$

Enfin, comme les images directes de $\nu_{\mathbf{n}}$ par les r projections sont des mesures équiprobables, on obtient que

$$I_N \geq \sum_{i=1}^{r}\frac{n_i}{N}I_{n_i}-\frac{c}{N}\sum_{i=1}^{r}f(n_i).$$

□

Corollaire 6.1.11 *Avec les notations de la proposition 6.1.10, si la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est bornée supérieurement (par exemple si g est bornée supérieurement, ou s'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que* $\operatorname{supp}\mu_{B_n}\subset]-\infty,na]$ *pour tout entier n suffisamment grand) et si $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)/n=0$, alors la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ admet une limite lorsque $n\to+\infty$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 6.1.10 et du corollaire 1.5.2. □

6.1.3 Convergence de polygones d'une algèbre graduée quasi-filtrée

Terme principal de la fonction de Hilbert-Samuel d'un module gradué

Soient A un anneau artinien, B une A-algèbre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduée de type fini et engendrée par B_1, et M un B-module gradué de type fini et non-nul. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, M_n est un A-module de type fini, donc de longueur finie. On désigne par H_M la série de Poincaré (cf. [18] chap. VIII §4 n°2) associée à M, i.e., $H_M(X)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\operatorname{long}_A(M_n)X^n\in\mathbb{Z}[\![X]\!]$. La théorie classique des séries de Poincaré affirme qu'il existe un entier $r\geq 0$ tel que $H_M(X)$ s'écrive sous la forme

$$H_M(X)=a_r(X)(1-X)^{-r}+a_{r-1}(X)(1-X)^{-r+1}+\cdots+a_0(X), \tag{6.8}$$

où $a_0,\cdots,a_r$ sont des éléments dans $\mathbb{Z}[X,X^{-1}]$, a_r est à coefficients positifs et non-nul si M est non-nul. D'autre part, les valeurs de r et de $a_r(1)$ ne dépendent pas du choix de $(a_0,\cdots,a_r)$. En effet, r s'identifie à la dimension de M. On note $c(M)=a_r(1)$. Evidemment on a

$$\operatorname{long}_A(M_n)=\frac{c(M)}{(r-1)!}n^{r-1}+o(n^{r-1})$$

lorsque $n \to +\infty$, et il existe un polynôme Q_M à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $Q_M(n) = \mathrm{long}_A(M_n)$ pour n assez grand. Si M est un B-module nul, par convention on note $\dim(M) = -\infty$ et $c(M) = 0$.

Si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de B-module gradué de type fini, on a $H_M = H_{M'} + H_{M''}$. Par conséquent, $\dim M = \max(\dim M', \dim M'')$, et

$$c(M) = c(M')\mathbb{1}_{\dim M' \geq \dim M''} + c(M'')\mathbb{1}_{\dim M'' \geq \dim M'}. \tag{6.9}$$

Quelques résultats de la théorie des mesures

Lemme 6.1.12 *Pour toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R})$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f \circ \gamma_{1+\varepsilon} - f\|_{\sup} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|f \circ \varphi_\varepsilon - f\|_{\sup} = 0.$$

Démonstration. On suppose que $\mathrm{supp}(f) \subset [-K, K]$ $(K > 0)$. Pour tout nombre $-1/2 < \varepsilon < 1/2$,

$$\|f \circ \gamma_{1+\varepsilon} - f\|_{\sup} = \sup_{-2K \leq x \leq 2K} |f(x + \varepsilon x) - f(x)|.$$

Comme f est uniformément continue,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{-2K \leq x \leq 2K} |f(x + \varepsilon x) - f(x)| = 0,$$

donc on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f \circ \gamma_{1+\varepsilon} - f\|_{\sup} = 0.$$

L'autre identité n'est rien d'autre que la définition de la continuité uniforme de f. □

Définition 6.1.13 Si $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est une suite de mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ et si μ est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, on dit que la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ *converge vaguement* ver μ (cf. [15] chap. III, §1 n°9) si pour toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R})$, la suite de nombres $(\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$.

Lemme 6.1.14 *Soient $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ de masse uniformément bornée, μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, et $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels dans $]-1, +\infty[$ qui converge vers 0. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1) la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge vaguement vers μ ;

2) la suite $(T_{1+a_n}\mu_n)_{n \geq 1}$ converge vaguement vers μ ;

3) la suite $(\tau_{a_n}\mu_n)_{n \geq 1}$ converge vaguement vers μ.

Démonstration. Comme $\tau_{a_n}^{-1} = \tau_{-a_n}$ et $T_{1+a_n}^{-1} = T_{(1+a_n)^{-1}} = T_{1-\frac{a_n}{1+a_n}}$, il suffit de vérifier "1)$\Longrightarrow$ 2)" et "1)$\Longrightarrow$3)". Pour tout entier $n \geq 1$ on note $\mu_n' = T_{1+a_n}\mu_n$ et $\mu_n'' = \tau_{a_n}\mu_n$. On suppose que $\sup\limits_{n \geq 1} \|\mu_n\| \leq M$. Si f est une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$, alors

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n' - \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f \circ \gamma_{1+a_n} - f| \, d\mu_n \leq M \, \|f \circ \gamma_{1+a_n} - f\|_{\sup}.$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n'' - \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f \circ \varphi_{a_n} - f| \, d\mu_n \leq M \, \|f \circ \varphi_{a_n} - f\|_{\sup}.$$

Le lemme 6.1.12 montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}} f d\mu'_n - \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}} f d\mu''_n - \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n\right| = 0.$$

Si les μ_n convergent vaguement vers μ, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f d\mu,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f d\mu'_n = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f d\mu''_n = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

□

Lemme 6.1.15 *Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{R}$ qui converge vaguement vers une mesure μ. Si les supports de μ_n sont uniformément bornés, alors μ est aussi une mesure de probabilité.*

Démonstration. Supposons $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}\operatorname{supp}(\mu_n)\subset[m,M]$. Si φ est une fonction continue à support compact qui prend ses valeurs dans $[0,1]$ et telle que $\varphi|_{[m,M]}=1$. On a

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi d\mu_n = 1.$$

Comme φ est arbitraire, on voit que $\mu(\mathbb{R})=1$ d'après le théorème de convergence dominée. □

Convergence vague des mesures associées à une algèbre graduée quasi-filtrée

Définition 6.1.16 Soient B une K-algèbre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduée de type fini, engendrée par B_1, M un B-module $\mathbb{Z}$-gradué de type fini de dimension $d>0$. On suppose que pour chaque entier $n\geq 0$, M_n soit muni d'une $\mathbb{R}$-filtration séparée, exhaustive et continue à gauche. On dit que M satisfait à la *condition de convergence vague* et on note $\mathbf{CV}(M)$ si la suite de mesures de Radon $(T_{\frac{1}{n}}\mu_{M_n})_{n\geq 1}$ converge vaguement. Enfin, si N est un B-module gradué qui est de dimension 0 ou qui est nul, alors par convention N satisfait à la condition de convergence vague[2].

Proposition 6.1.17 *Soient $f:\mathbb{Z}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ une application telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n)/n=0$ et E un espace vectoriel de dimension $0<d<+\infty$ sur K. Pour tout entier $n\geq 0$ soit $B_n=\operatorname{Sym}^n E$. On suppose que chaque B_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration décroissante séparée exhaustive et continue à gauche de telle sorte que $B=\bigoplus_{n\geq 0}B_n$ soit une algèbre graduée f-quasi-filtrée. Alors B satisfait à la condition de convergence vague.*

Démonstration. Soit G l'ensemble des fonctions boréliennes g sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, g soit intégrable par rapport à μ_n et telle que $(\mathbb{E}_{\mu_n}(g))_{n\geq 0}$ soit une suite convergente. Le corollaire 6.1.11 montre que G contient toutes les fonctions croissantes concaves lipschitziennes et bornées supérieurement. Evidemment G est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Supposons que f soit une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $I=[a,b]$ un intervalle qui contient le support de f. Notons que

[2] En fait, on a alors pour tout entier n suffisamment grand, $N_n=0$, donc $T_{\frac{1}{n}}\mu_{N_n}$ est la mesure nulle.

f' et f'' sont aussi des fonctions lisses et le support de f' (resp. f'') est contenu dans I. Par conséquent, f' et f'' sont des fonctions bornées. Soient $C = \|f'\|_{\sup}$ et $C' = \|f''\|_{\sup}/2$. Soit h la fonction

$$h(x) = \begin{cases} C'(b-a)(2x-a-b) + C(x-b), & x \le a, \\ -C'(b-x)^2 + C(x-b), & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

C'est une fonction croissante concave $(2C'(b-a)+C)$-lipschitzienne, bornée supérieurement par 0. Donc $h \in G$. D'autre part, $h + f$ est aussi une fonction croissante concave car, sur $[a, b]$, $h' \ge C$ et $h'' = -2C'$. Elle est de plus $(2C'(b-a)+2C)$-lipschitienne et bornée supérieurement par $\|f\|_{\sup}$. Par conséquent, on a $h + f \in G$. On en déduit que $f \in G$. Enfin, comme $C_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace normé $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$, on a $C_c(\mathbb{R}) \subset G$.

Soit $S : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'opérateur qui associe à chaque fonction continue à support compact g la limite de la suite $(\mathbb{E}_{\mu_n}(g))_{n\ge1}$. C'est un opérateur linéaire. De plus, si g est une fonction positive, alors $\mathbb{E}_{\mu_n}(g) \ge 0$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}_{\ge0}$. Par conséquent, on a $S(g) \ge 0$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}$ (muni de la tribu borélienne) telle que $S(g) = \int_{\mathbb{R}} g d\mu$. Par défintion la suite de mesure $(\mu_n)_{n\ge1}$ converge vaguement vers μ. □

Lemme 6.1.18 *Soit B une K-algèbre graduée de type fini, engendrée par B_1, et soient*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de B-modules gradués de type fini et $f : \mathbb{Z}_{\ge0} \to \mathbb{R}_{\ge0}$ une application telle que $\lim_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$. On note

$$d' = \dim M', \quad d = \dim M, \quad d'' = \dim M'',$$

et on suppose que pour chaque entier $n \ge 0$, B_n (resp. M_n) soit muni d'une $\mathbb{R}$-filtration séparée, exhaustive et continue à gauche de sorte que B soit une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée et que M soit un B-module gradué f-quasi-filtré. On suppose de plus que pour chaque entier $n \ge 0$, M'_n (resp. M''_n) soit muni de la filtration image réciproque (resp. image directe forte), alors

1) si $d' > d''$, $\mathbf{CV}(M') \Longleftrightarrow \mathbf{CV}(M)$;

2) si $d'' > d'$, $\mathbf{CV}(M'') \Longleftrightarrow \mathbf{CV}(M)$;

3) si $d' = d''$, $\mathbf{CV}(M')$ et $\mathbf{CV}(M'') \Longrightarrow \mathbf{CV}(M)$.

Démonstration. Soient

$$\alpha' = c(M'), \quad \alpha = c(M), \quad \alpha'' = c(M'').$$

Si $\dim M' = 0$, alors pour n assez grand, on a $M_n = M''_n$, donc $\mathbf{CV}(M'') \Longleftrightarrow \mathbf{CV}(M)$. Donc la proposition est vraie lorsque $\dim M' = 0$. De même elle est vraie lorsque $\dim M'' = 0$. Dans toute la suite de la démonstration, on supposera $\min(d', d'') \ge 1$. On a $d = \max(d', d'')$. Pour tout entier $n \ge 0$ soient

$$\mu'_n = T_{\frac{1}{n}} \mu_{M'_n}, \quad \mu_n = T_{\frac{1}{n}} \mu_{M_n}, \quad \mu''_n = T_{\frac{1}{n}} \mu_{M''_n}$$
$$r'_n = \operatorname{rg} M'_n, \quad r_n = \operatorname{rg} M_n, \quad r''_n = \operatorname{rg} M''_n.$$

Pour n suffisamment grand, r'_n, r_n et r''_n sont strictement positifs, et

$$\mu_n = \frac{r'_n}{r_n}\mu'_n + \frac{r''_n}{r_n}\mu''_n.$$

(cf. la proposition 4.2.21). Les mesures μ'_n, μ_n et μ''_n sont de masses uniformément bornées. Notons que

$$r'_n = \frac{\alpha'}{(d'-1)!}n^{d'-1} + o(n^{d'-1}), \quad r''_n = \frac{\alpha''}{(d''-1)!}n^{d''-1} + o(n^{d''-1}), \quad r_n = r'_n + r''_n.$$

1) Si $d' > d''$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{r'_n}{r_n} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{r''_n}{r_n} = 0,$$

donc $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement si et seulement si $(\mu'_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement, et si c'est le cas, elles ont la même limite.

2) Si $d'' > d'$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{r'_n}{r_n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{r''_n}{r_n} = 1,$$

donc $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement si et seulement si $(\mu''_n)_{\geq 1}$ converge vaguement, et si c'est le cas, elles ont la même limite.

3) Si $d'' = d'$, alors $\alpha = \alpha' + \alpha''$, et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{r'_n}{r_n} = \frac{\alpha'}{\alpha'+\alpha''}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{r''_n}{r_n} = \frac{\alpha''}{\alpha'+\alpha''},$$

Si $(\mu'_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers μ' et si $(\mu''_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers μ'', alors $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers $\dfrac{\alpha'}{\alpha'+\alpha''}\mu' + \dfrac{\alpha''}{\alpha'+\alpha''}\mu''$. □

Lemme 6.1.19 *Soient E et E' deux espaces vectoriels de rang fini sur K, munis de filtrations séparées et exhaustives, $\varphi : E \to E'$ un isomorphisme de K-espaces vectoriels et c un nombre réel. Si, pour tout élément $x \in E$, on a $\lambda(x) \leq \lambda(\varphi(x)) + c$, alors $\mu_E \ll \tau_c\mu_{E'}$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{e} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base maximale de E. Alors $\mathbf{e}' = (\varphi(e_i))_{1\leq i\leq n}$ est un base de E'. On a

$$\tau_c\mu_{E'} \gg \tau_c\mu_{\mathbf{e}'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\lambda(\varphi(e_i))+c} \gg \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\lambda(e_i)} = \mu_E.$$

□

Théorème 6.1.20 *Soient $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$ et B une K-algèbre graduée, intègre et de type fini sur K, engendrée par B_1 comme K-algèbre. On suppose que*

i) *$d = \dim B$ est strictement positif,*

ii) *pour tout entier positif n, l'espace vectoriel B_n soit muni d'une $\mathbb{R}$-filtration séparée, exhaustive et continue à gauche $\mathcal{F}$ de sorte que B soit une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée,* *iii)* $\limsup_{n\to+\infty}\sup_{0\neq a\in B_n}\dfrac{\lambda(a)}{n}<+\infty$.

Si pour tout entier $n>0$ on note $\mu_n = T_{\frac{1}{n}}\mu_{B_n}$, alors les supports des μ_n $(n\geq 1)$ sont uniformément bornés et la suite de mesures $(\mu_n)_{\geq 1}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour tout entier $n\geq 1$ soient

$$\lambda_n^{\max}=\sup_{0\neq a\in B_n}\lambda(a) \text{ et } \lambda_n^{\min}=\min_{a\in B_n}\lambda(a).$$

Le support de μ_n est contenu dans $[\lambda_n^{\min}/n,\lambda_n^{\max}/n]$. Comme $0<d<+\infty$, pour tout entier $n>0$, B_n est un espace de dimension finie et non-nul, donc $\lambda_n^{\min}\in\mathbb{R}$ puisque la filtration sur B_n est exhaustive. D'autre part, il existe un élément a_n dans B_n tel que $\lambda_n^{\min}=\lambda(a_n)$. Soit

$$W_n=\{b_1\cdot\cdots\cdot b_n \mid b_i\in B_1 \text{ pour tout } 1\leq i\leq n\}.$$

Puisque B est engendrée par B_1, B_n est engendré comme espace vectoriel sur K (même comme groupe commutatif) par W_n. D'après la proposition 4.2.3 2) on peut supposer que $a_n\in W_n$. Evidemment a_n est non-nul pour tout entier $n>1$. Si $\mathbf{n}=(n_i)_{1\leq i\leq r}$ est un multi-indice dans $\mathbb{Z}_{>0}^r$ et si $N=n_1+\cdots+n_r$, on peut écrire a_N comme la produit de r éléments $c_1,\cdots,c_r$, où $c_i\in B_{n_i}\setminus\{0\}$. Par conséquent,

$$\lambda_N^{\min}=\lambda(a_N)\geq\sum_{i=1}^r\Big(\lambda(c_i)-f(n_i)\Big)\geq\sum_{i=1}^r\Big(\lambda_{n_i}^{\min}-f(n_i)\Big). \tag{6.10}$$

La condition iii) implique que $\limsup_{n\to+\infty}\lambda_n^{\min}/n<+\infty$, donc la suite $(\lambda_n^{\min}/n)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ (cf. le corollaire 1.5.2), donc est bornée inférieurement. D'autre part, la condition iii) montre que la suite $(\lambda_n^{\max}/n)_{n\geq 1}$ est bornée supérieurement. Par conséquent, les supports des mesures μ_n $(n\geq 1)$ sont uniformément bornés.

Pour la deuxième assertion du théorème, d'après le lemme 6.1.15, il suffit de vérifier $\mathbf{CV}(B)$. On la démontrera en trois étapes :

Étape 1 : quelque réductions.

D'abord, par extension des scalaires, en introduisant une extension infinie de K on peut supposer que K soit un corps infini.

Si c est une constante réelle, on peut considérer la filtration $\mathcal{F}^c$ sur B telle que $\mathcal{F}_t^cB_n=\mathcal{F}_{t-cn}B_n$. Autrement dit, pour tout élément $a\in B_n$ on a la relation $\lambda_{\mathcal{F}^c}(a)=\lambda_{\mathcal{F}}(a)+cn$. Si $(n_i)_{1\leq i\leq r}\in\mathbb{Z}_{>0}^r$ est un multi-indice et si pour tout i, a_i est un élément dans B_{n_i}, en posant $N=n_1+\cdots+n_r$, $a=a_1\cdots a_r$, on a

$$\lambda_{\mathcal{F}^c}(a)=\lambda_{\mathcal{F}}(a)+cN\geq\sum_{i=1}^r\Big(\lambda_{\mathcal{F}}(a_i)-f(n_i)\Big)+\sum_{i=1}^r cn_i=\sum_{i=1}^r\Big(\lambda_{\mathcal{F}^c}(a_i)-f(n_i)\Big),$$

autrement dit, B est graduée f-quasi-filtrée pour la filtration $\mathcal{F}^c$. D'autre part, si on désigne par $\mu_{B_n}^c$ la probabilité associée à B_n pour la filtration $\mathcal{F}^c$, on a $\mu_{B_n}^c=\tau_{cn}\mu_{B_n}$. Par conséquent, on a $T_{\frac{1}{n}}\mu_{B_n}^c=T_{\frac{1}{n}}\tau_{cn}\mu_{B_n}=\tau_cT_{\frac{1}{n}}\mu_{B_n}$. Autrement dit, B satisfait à la condition de convergence vague pour la filtration $\mathcal{F}$ si et seulement si c'est le cas pour la filtration $\mathcal{F}^c$. D'après la démonstration de la première assertion on obtient que $\lambda_n^{\min}=O(n)$. Comme $f(n)=o(n)$ on obtient que $\lambda_n^{\min}-f(n)=O(n)$. En remplaçant la filtration $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}^c$ où $c\in\mathbb{R}_{>0}$ est suffisamment grand, on est ramené au cas où $\lambda_n^{\min} - f(n) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. En particulier, pour tout élément homogène a de degré n de B, on a $\lambda(a) - f(n) \geq 0$.

Étape 2 : Comme K est un corps infini, par la normalisation de Noether (cf. [28] Théorème 13.3), il existe d éléments $x_1, \cdots, x_d$ dans B_1 tels que

1) l'homomorphisme de l'algèbre de polynômes $K[T_1, \cdots, T_d]$ vers B qui envoie T_i en x_i, soit un isomorphisme de K-algèbres graduées de $K[T_1, \cdots, T_d]$ sur son image.
2) Si on désigne par A cette image, c'est-à-dire la sous-K-algèbre de B engendrée par $x_1, \cdots, x_d$, alors B est un A-module gradué de type fini.

L'algèbre A, munie de la filtration image réciproque de celle de B, est une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée. D'autre part, B est un A-module gradué f-quasi-filtré. La proposition 6.1.17 montre que l'on a $\mathbf{CV}(A)$.

Soit a un élément homogène de A. On munit Aa de la filtration image réciproque. Comme $\dim A/Aa < \dim A$, on a $\mathbf{CV}(Aa)$ compte tenu du lemme 6.1.18. De plus, les suites de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ $(T_{\frac{1}{n}}\mu_{A_n})_{n\geq 1}$ et $(T_{\frac{1}{n}}\mu_{(Aa)_n})_{n\geq 1}$ convergent vaguement vers la même mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Si x est un élément homogène de degré $m > 0$ dans B, alors il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ de degré $p \geq 1$ tel que $P(x) = 0$. On suppose que P soit de degré minimal et s'écrive sous la forme

$$P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0.$$

Comme P est minimal et comme B est un anneau intègre, a_0 est non-nul. Pour tout entier $0 \leq i < p$ soit $\widetilde{a}_i$ la composante de degré $(p-i)m$ de a_i. Si on note

$$\widetilde{P}(X) = X^p + \widetilde{a}_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \widetilde{a}_0,$$

alors on a $\widetilde{P}(x) = 0$ puisque x est homogène de degré m. On peut donc supposer que pour tout $0 \leq i < p$, a_i soit homogène de degré $(p-i)m$. Soit $y = x^{p-1} + a_{p-1}x^{p-2} + \cdots + a_1$. Il est homogène de degré $(p-1)m$. En outre on a $xy + a_0 = 0$. Si u est un élément homogène de degré n de A, alors

$$\lambda(ua_0) = \lambda(uxy) \geq \lambda(ux) - f(n+m) + \lambda(y) - f((p-1)m) \geq \lambda(ux) - f(n+m). \tag{6.11}$$

On en déduit $\lambda(ux) \leq \lambda(ua_0) + f(n+m)$. D'autre part,

$$\lambda(ux) \geq \lambda(u) + \lambda(x) - f(m) - f(n) \geq \lambda(u) - f(n). \tag{6.12}$$

Soient $M = Aa_0$, $M' = Ax$. L'algèbre B étant intègre, pour tout entier $n \geq 1$, l'application $ux \mapsto ua_0$ $(u \in A_n)$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels de M'_{n+m} vers M_{n+mp}. D'après (6.11) et le lemme 6.1.19, on a $\mu_{M'_{n+m}} \ll \tau_{f(n+m)}\mu_{M_{n+mp}}$. D'autre part, l'application $u \mapsto ux$ $(u \in A_n)$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels de A_n vers M'_{n+m}. D'après (6.12) et le lemme 6.1.19, on obtient que $\mu_{A_n} \ll \tau_{f(n)}\mu_{M'_{n+m}}$, ou encore $\tau_{-f(n)}\mu_{A_n} \ll \mu_{M'_{n+m}}$. On a donc l'encadrement

$$\tau_{-f(n)}\mu_{A_n} \ll \mu_{M'_{n+m}} \ll \tau_{f(n+m)}\mu_{M_{n+mp}},$$

et donc

$$T_{\frac{1}{n+m}}\tau_{-f(n)}\mu_{A_n} \ll T_{\frac{1}{n+m}}\mu_{M'_{n+m}} \ll T_{\frac{1}{n+m}}\tau_{f(n+m)}\mu_{M_{n+mp}},$$

ou encore

$$\tau_{-f(n)/(n+m)}T_{\frac{n}{n+m}}T_{\frac{1}{n}}\mu_{A_n} \ll T_{\frac{1}{n+m}}\mu_{M'_{n+m}} \ll \tau_{f(n+m)/(n+m)}T_{\frac{n+mp}{n+m}}T_{\frac{1}{n+mp}}\mu_{M_{n+mp}}. \tag{6.13}$$

Comme observé plus haut, les suites $(T_{\frac{1}{n}}\mu_{A_n})_{n\geq 1}$ et $(T_{\frac{1}{n}}\mu_{M_n})_{n\geq 1}$ convergent vaguement vers une même limite μ. D'après le lemme 6.1.14 et l'encadrement (6.13), on conclut que la suite $(T_{\frac{1}{n}}\mu_{M'_n})_{n\geq 1}$ converge vaguement vers μ.

Étape 3 : Comme B est une algèbre finie sur A, l'algèbre $L\otimes_A B$ est de rang fini sur L, où L est le corps des fractions de A. Le A-module B est engendré par les éléments homogènes, il existe donc des éléments homogènes $x_1,\cdots,x_s$ de B qui forment une base de $L\otimes_A B$ sur L. Si on note $H=Ax_1+\cdots+Ax_s$, alors H est un sous-A-module libre de base $(x_1,\cdots,x_s)$ de B. Soit $H'=B/H$; on a une suite exacte :

$$0\longrightarrow H\xrightarrow{\psi}B\xrightarrow{\pi}H'\longrightarrow 0\,.$$

Comme $1\otimes\psi : L\otimes_A H\rightarrow L\otimes_A B$ est un isomorphisme, on a $L\otimes_A H'=0$, donc H' est un A-module de torsion. On a alors $\dim_A H'<\dim A=\dim_A H=\dim_A B$. D'après l'étape 2 on a $\mathbf{CV}(Ax_i)$ pour tout $1\leq i\leq s$. D'après le lemme 6.1.18, on a $\mathbf{CV}(H)$ et puis $\mathbf{CV}(B)$. □

Remarque 6.1.21 Dans le théorème 6.1.20, si on suppose que l'espace vectoriel B_n soit non-nul pour n suffisamment grand[3], alors la condition que B soit engendrée par B_1 n'est pas nécessaire. En effet, d'après [45] chap II, 2.1.6, il existe un entier $d>0$ tel que $B^{(d)}=\bigoplus_{n\geq 0}B_{nd}$ soit une B_0-algèbre engendrée par $B_1^{(d)}=B_d$. D'autre part, si on désigne par $g:\mathbb{Z}_{\geq 0}\rightarrow\mathbb{R}_{\geq 0}$ l'application telle que $g(n)=f(nd)$, alors $B^{(d)}$ est une K-algèbre graduée g-quasi-filtrée. D'après le théorème 6.1.20, l'algèbre $B^{(d)}$ satisfait à la condition de convergence vague. Ensuite, d'après un argument semblable à l'étape 2 de la démonstration du théorème 6.1.20, pour tout élément homogène non-nul x de B, $B^{(d)}x$ satisfait à la condition de convergence vague, et la suite de probabilité associée à $B^{(d)}x$ converge vers la limite de celle associée à $B^{(d)}$. On suppose que $B_n\neq 0$ pour tout $n\geq m_0$. Alors pour tout entier $m_0\leq k<m_0+d$, le $B^{(d)}$-module $B^{(d,k)}=\bigoplus_{n\geq 0}B_{nd+k}$ est non-nul. D'après un arguement semblable à l'étape 3 de la démonstration du théorème 6.1.20, en utilisant le fait que $B^{(d)}$ est un anneau intègre, on conclut que $B^{(d,k)}$ satisfait à la condition de convergence vague, et que la limite de la suite de probabilités associée à $B^{(d,k)}$ coïncide avec celle de la suite de probabilités associée à $B^{(d)}$. Enfin, en combinant ces suites de probabilités, le lemme 6.1.14 montre que la suite de probabilités associée à B converge vaguement.

Remarque 6.1.22 1) L'assertion du théorème 6.1.20 n'est pas vraie en général pour un module gradué (quasi-)filtré. En effet, soit B l'algèbre $K[X]$ des polynômes à une variable munie de la graduation usuelle et de la filtration $\mathcal{F}$ telle que

$$\mathcal{F}_tB_n=\begin{cases}B_n, & t\leq 0,\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

Evidemment B est une K-algèbre graduée filtrée. Soit M le B-module gradué B. Si $\varphi:\mathbb{Z}_{\geq 0}\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction croissante, on peut définir une filtration $\mathcal{F}^\varphi$ sur M telle que

$$\mathcal{F}_t^\varphi M_n=\begin{cases}M_n, & t\leq\varphi(n),\\ 0, & t>\varphi(n).\end{cases}$$

[3]Cette condition est vérifiée notamment lorsque $B_1\neq 0$.

Alors M est un B-module gradué filtré et, pour tout entier $n \geq 0$, $\mu_{M_n} = \delta_{\varphi(n)}$. Notons que la condition $\mathbf{CV}(M)$ est équivalente au fait que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\varphi(n)}{n}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante telle que la suite $(\varphi(n)/n)_{n \geq 1}$ ait plusieurs points adhérents — par exemple, $\varphi(n) = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$, $\mathbf{CV}(M)$ n'est plus satisfaite. Ce contre-exemple montre l'impossibilité de démontrer le théorème 6.1.20 par la version classique de la technique de dévissage.

2) L'assertion du théorème 6.1.20 n'est pas vraie en général pour une algèbre graduée quasi-filtrée non-intègre. En effet, si B est une algèbre graduée quasi-filtrée sur K et si M est un B-module gradué quasi-filtré. On suppose que la condition $\mathbf{CV}(B)$ soit vérifiée et que la condition $\mathbf{CV}(M)$ ne soit pas satisfaite (cela est possible grâce à 1)). Si on désigne par C l'extension nilpotente de B par M (cf. [70] chap. 9 §25), alors C est une algèbre graduée quasi-filtrée sur K, mais la condition $\mathbf{CV}(C)$ n'est pas vraie.

Convergence uniforme des polygones d'une algèbre graduée quasi-fitrée

Proposition 6.1.23 *Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{R}$ qui converge vaguement vers une mesure μ. On suppose que les supports des μ_n soient uniformément bornés. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $F_n : x \mapsto \mu_n(]-\infty, x])$ la fonction de répartition de μ_n. Soit $F : x \mapsto \mu(]-\infty, x])$ la fonction de répartition de μ. Alors il existe un sous-ensemble dénombrable Z de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout point $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, la suite $(F_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers $F(x)$.*

Démonstration. Soit Z l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mu(\{x\}) \neq 0$. Comme μ est une mesure finie, l'ensemble Z est dénombrable. Si r est un point dans $\mathbb{R} \setminus Z$, l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $\mathbb{1}_{]-\infty, r]}(x)$ est $\{r\}$ qui est μ-négligeable. D'après [15] §5, $n°12$ Proposition 22, la suite $(F_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers $F(x)$. □

Proposition 6.1.24 *Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions décroissantes continues à droite qui prennent valeurs dans $[0, 1]$ telle que*

i) $\sup_{n \geq 1} \inf\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) = 0\} < +\infty$, $\inf_{n \geq 1} \sup\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) = 1\} > -\infty$;

ii) il existe une partie dénombrable Z de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente.

Si $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ est une fonction continue à droite telle que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus Z$ on ait $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$, alors

1) la fonction f est décroissante ;

2) si on note $A := \liminf_{n \to +\infty} \inf\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) = 0\}$, $B := \limsup_{n \to +\infty} \sup\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) = 1\}$, alors $f|_{]A, +\infty[} \equiv 0$, $f|_{]-\infty, B[} \equiv 1$;

3) il existe une partie dénombrable Z' de $]0, 1[$ telle que $f_n^*(t)$ (voir la défintion 4.2.22 pour les notations) converge vers $f^*(t)$ pour tout $t \in]0, 1[\setminus Z'$;

4) la suite de fonction $(\int_0^t f_n^*(s) ds)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction $\int_0^t f^*(s) ds$.

Démonstration. 1) Si $x < y$ sont deux nombres réels, il existe deux suites $(x_m)_{m \geq 1} \subset \mathbb{R} \setminus Z$ et $(y_m)_{m \geq 1} \subset \mathbb{R} \setminus Z$ telles que $x < x_m < y < y_m$ pour tout entier $n \geq 1$ et telles que $\lim_{m \to +\infty} x_m = x$, $\lim_{m \to +\infty} y_m = y$. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}_{>0}^2$ on a $f_n(x_m) \geq f_n(y_m)$ puisque la fonction f_n est décroissante. Par passage à la limite on obtient $f(x_m) \geq f(y_m)$. Enfin, comme f est continue à droite, on a $f(x) = \lim_{m \to +\infty} f(x_m) \geq \lim_{m \to +\infty} f(y_m) = f(y)$.

2) Si $y > A$ (resp. $y < B$), alors il existe un nombre infini d'entiers $n \geq 1$ tel que $y > \inf\{x \mid f_n(x) = 0\}$ (resp. $y < \sup\{x \mid f_n(x) = 1\}$), donc $f_n(y) = 0$ (resp. $f_n(y) = 1$). Par conséquent, pour tout $y \in]A, +\infty[\setminus Z$ (resp. $y \in]-\infty, B[$), $f(y) = 0$ (resp. $f(y) = 1$). Enfin, comme f est continue à droite et comme $]A, +\infty[\setminus Z$ (resp. $]-\infty, B[\setminus Z$) est dense dans $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, B[$), on obtient $f|_{]A,+\infty[} \equiv 0$ (resp. $f|_{]-\infty,B[} \equiv 1$).

3) D'après la condition i), la fonction f_n^* est bien définie pour tout $n \geq 1$. D'après 2), la fonction f^* est bien définie. Si t est un nombre dans $]0, 1[$ et si $y = f^*(t)$, alors il existe une suite strictement croissante $(x_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{R} \setminus Z$ qui converge vers y. Comme $x_m < y$ on a $f(x_m) > t$. Puisque $x_m \in \mathbb{R} \setminus Z$, il existe $N(m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $f_n(x_m) > t$ (i.e., $x_m < f_n^*(t)$) pour tout $n > N(m)$. Cela implique que $\liminf_{n\to+\infty} f_n^*(t) \geq f^*(t)$.

Pour tout entier $n \geq 1$ soit Z'_n l'ensemble des $t \in]0, 1[$ tels que $f_n^{-1}(\{t\})$ ait un point intérieur. Evidemment Z'_n est un ensemble dénombrable. Soit Z'' l'ensemble des $t \in]0, 1[$ tels que $f^{-1}(\{t\})$ ait un point intérieur. Soit Z' l'union des Z'_n et de Z''. C'est aussi une partie dénombrable de $]0, 1[$. Soient t un point dans $]0, 1[\setminus Z'$ et $y = f^*(t)$. On prend une suite strictement décroissante $(x_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}\setminus Z$ qui converge vers y. Comme $y \notin Z''$ on a $f(x_m) < t$. Par conséquent, il existe $N(m) \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour tout $n > N(m)$, $f_n(x_m) < t$ et *a fortiori* $x_m \geq f_n^*(t)$. On a alors $\limsup_{n\to+\infty} f_n^*(t) = f^*(t)$.

4) D'après la proposition 4.2.23 3), la condition i) implique que les fonctions f_n^* sont uniformément bornées. D'autre part, $f_n^* - f$ converge vers la fonction nulle presque partout. D'après le théorème de convergence dominée on obtient que

$$\left|\int_0^t f_n^*(s)ds - \int_0^t f^*(s)ds\right| \leq \int_0^1 |f_n^*(s) - f^*(s)|ds$$

converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. □

Corollaire 6.1.25 *Avec les notations du théorème 6.1.20, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on désigne par P_n le polygone associé à la probabilité μ_n, alors la suite de polygones $(P_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers une fonction concave sur $[0, 1]$. Lorsque $B_n \neq 0$ pour n suffisamment grand, le même résultat restera vrai si on enlève la condition que B soit engendrée comme K-algèbre par B_1.*

6.1.4 Algèbre graduée pseudo-filtrée

Dans ce paragraphe on propose une autre généralisation de la notion d'algèbre graduée filtrée qui est plus faible que celle d'algèbre graduée f-quasi-filtrée. En imposant une condition sur f qui est plus forte que $\lim_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$ on obtient aussi la convergence vague des mesures associées aux filtrations et puis la convergence uniforme des polygones. On fixe un corps K dans ce paragraphe. Tout les espaces vectoriels sont supposés sur K.

Définition 6.1.26 Soient $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ une K-algèbre graduée et $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application. On dit que B est un K-algèbre *graduée f-pseudo-filtrée* si chaque B_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration décroissante telle que pour tous entiers n, m assez grands, on ait

$$B_{n,s}B_{m,t} \subset B_{n+m,s+t-f(n)-f(m)}.$$

Si B est une K-algèbre graduée f-pseudo-filtrée, on dit qu'un B-module gradué $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ est *gradué f-pseudo-filtré* si pour tout entier n, M_n est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration décroissante telle que pour tous entiers n, m assez grands on ait

$$B_{n,s}M_{m,t} \subset M_{n+m,s+t-f(n)-f(m)}.$$

Remarque 6.1.27 Avec les notations de la défition 6.1.26, B est un B-module gradué f-pseudo-filtré. Si $f \equiv 0$, alors B est une K-algèbre graduée filtrée et M est un B-module gradué filtré. Si g est une autre fonction dominant f, alors B est une K-algèbre graduée g-pseudo-filtrée et M est un B-module gradué g-pseudo-filtré.

Les résultats dans §6.1.1 sont vérifiés sans difficulté pour les algèbres graduées pseudo-filtrées ou pour les modules gradués pseudo-filtrées. Notamment les corollaires 6.1.4, 6.1.6 et 6.1.7. Il suffit simplement de remplacer les mots “quasi-filtré(e)” par “pseudo-filtré(e)” dans les énoncés des résultats.

Soient $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction croissante, E un espace vectoriel de dimension $0 < d < +\infty$ sur K, et B l'algèbre symétrique engendrée par E, munie de la graduation usuelle. On suppose que pour tout n, B_n soit muni d'une $\mathbb{R}$-filtration séparée, exhaustive et continue à gauche telle que B soit une K-algèbre graduée f-pseudo-filtrée. Soit g une fonction croissante, concave et c-lipschitienne. Pour tout entier $n \geq 0$ soit $I_n = \int_{\mathbb{R}} g dT_{\frac{1}{n}} \mu_{B_n}$. Alors pour tous les entiers m, n assez grands, on a

$$\begin{aligned}
I_{m+n} &\geq \int_{\mathbb{R}} gd\Big(T_{\frac{1}{m+n}}\mu_{\mathbf{u}^{(m,n)}}\Big) = \int_{\Delta_{m+n}^{(d)}} g\left(\frac{1}{m+n}\lambda(u_\gamma^{(m,n)})\right) d\xi_{m+n}(\gamma) \\
&= \int_{\Delta_m^{(d)}\times\Delta_n^{(d)}} g\left(\frac{1}{m+n}\lambda(u_{\alpha+\beta}^{(m,n)})\right) d\nu_{(m,n)}(\alpha,\beta) \\
&\geq \int_{\Delta_m^{(d)}\times\Delta_n^{(d)}} g\left(\frac{1}{m+n}\lambda(u_\alpha^{(n)}u_\beta^{(m)})\right) d\nu_{(m,n)}(\alpha,\beta) \\
&\geq \int_{\Delta_m^{(d)}\times\Delta_n^{(d)}} g\left(\frac{\lambda(u_\alpha^{(n)})+\lambda(u_\beta^{(m)})-f(n)-f(m)}{m+n}\right) d\nu_{(m,n)}(\alpha,\beta) \\
&\geq \int_{\Delta_m^{(d)}\times\Delta_n^{(d)}} \left[g\left(\frac{\lambda(u_\alpha^{(n)})+\lambda(u_\beta^{(m)})}{m+n}\right) - \frac{c(f(n)+f(m))}{m+n}\right] d\nu_{(m,n)}(\alpha,\beta) \\
&\geq \int_{\Delta_m^{(d)}\times\Delta_n^{(d)}} \left[\frac{n}{m+n}g\left(\frac{\lambda(u_\alpha^{(n)})}{n}\right) + \frac{m}{n+m}g\left(\frac{\lambda(u_\beta^{(m)})}{m}\right)\right] d\nu_{(m,n)}(\alpha,\beta) - \frac{c(f(n)+f(m))}{m+n} \\
&= \frac{n}{n+m}I_n + \frac{m}{n+m}I_m - c\frac{f(n)+f(m)}{m+n}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Si la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est bornée supérieurement et si $\displaystyle\sum_{\alpha\geq 1} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$, alors la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente (cf. le corollaire 1.5.6). Par conséquent, si $\displaystyle\sum_{\alpha\geq 1} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$, la suite de mesures $(T_{\frac{1}{n}}\mu_{B_n})_{n\geq 1}$ converge vaguement. Autrement dit, B satisfait à la condition de convergence vague.

Théorème 6.1.28 *Soient $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction croissante telle que $\displaystyle\sum_{\alpha\geq 0} \frac{f(2^\alpha)}{2^\alpha} < +\infty$, B une K-algèbre graduée intègre, de type fini sur K, et engendrée par B_1. On suppose que*

i) $d = \dim B$ soit strictement positif,

ii) pour tout entier positif n, B_n soit muni d'une $\mathbb{R}$-filtration séparée, exhaustive et continue à gauche $\mathcal{F}$ de sorte que B soit une K-algèbre graduée f-pseudo-filtrée, *iii)* $\limsup_{n\to+\infty} \sup_{0\neq a\in B_n} \dfrac{\lambda(a)}{n} < +\infty.$

Si pour tout entier $n > 0$ on note $\mu_n = T_{\frac{1}{n}}\mu_{B_n}$, alors les supports des μ_n $(n \geq 1)$ sont uniformément bornés et la suite de mesures $(\mu_n)_{\geq 1}$ converge vaguement vers une probabilité de Radon sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On reprend la démonstration du théorème 6.1.20 en précisant quelques modifications. D'abord on remplace l'inégalité (6.10) par

$$\lambda_{m+n}^{\min} = \lambda_n^{\min} + \lambda_m^{\min} - f(n) - f(m)$$

pour m, n assez grands. D'après le corollaire 1.5.6, la suite $(\lambda_n^{\min}/n)_{n\geq 1}$ est convergente, donc est bornée inférieurement.

Pour l'étape 1, comme $\sum_{\alpha\geq 0} f(2^\alpha)/2^\alpha < +\infty$, on a $\lim_{\alpha\to+\infty} f(2^\alpha)/2^\alpha = 0$. Comme f est une fonction croissante, on a $\lim_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$. Par conséquent, l'étape 1 de la démonstration du théorème 6.1.20 reste valable. En outre, l'étape 3 est un argument formel de la condition de convergence vague, donc peut être utilisé sans souci. Il reste à vérifier que pour tout élément homogène x de B, le A-module gradué Ax, muni de la filtration image réciproque, satisfait à la condition de convergence vague. Cela correspond à l'étape 2 de la démonstration du théorème 6.1.20. Enfin, aucun changement de l'étape 2 est nécessaire car dans les inégalités (6.11) et (6.12) il ne s'agit que de la fonction λ du produit de <u>deux</u> éléments homogènes dans B. □

Corollaire 6.1.29 *Avec les notations du théorème 6.1.28, les polygones associés aux probabilités μ_n convergent uniformément vers une fonction concave sur* $[0, 1]$.

Remarque 6.1.30 Au lieu de supposer que B soit engendré par B_1, si on suppose que B_n soit non-nul pour n assez grand, le théorème 6.1.28 reste vrai. On a aussi la convergence uniforme des polygones.

6.2 Convergence des polygones de Harder-Narasimhan

6.2.1 Cas géométrique

Soient k un corps, C une courbe projective non-singulière de genre g sur k, η le point générique de C et K le corps des fonctions rationnelles sur C. On désigne par $\mathbf{Vec}(C)$ la catégorie des $\mathcal{O}_C$-modules localement libres de rang fini sur C. C'est une sous-catégorie exacte de la catégorie $\mathbf{Coh}(C)$ des $\mathcal{O}_C$-modules cohérents. D'après les arguments dans le chapitre 1, notamment la proposition 1.3.9 et la proposition 1.3.11, la catégorie $\mathbf{Vec}(C)$ est une catégorie de Harder-Narasimhan. On désigne par $F : \mathbf{Vec}(C) \to \mathbf{Vec}_K$ le foncteur qui envoie un $\mathcal{O}_C$-module localement libre E en sa fibre générique E_K. On rappelle que dans le sous-paragraphe 4.3.1, on a démontré que le foncteur F induit un foncteur des catégories de filtrations (de longueur finie) $\widetilde{F} : \mathbf{Fil}_f^g(\mathbf{Vec}(C)) \to \mathbf{Fil}_f^g(\mathbf{Vec}_K)$. De plus, pour tout $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini E, le composé du foncteur de Harder-Narasimhan et du foncteur $\widetilde{F}$ donne une filtration sur E_K dont le polygone associé coïncide avec le polygone de Harder-Narasimhan de E. Dans toute la suite, si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini, on suppose que E_K soit muni de la filtration $\widetilde{F}(\mathrm{HN}(E))$.

Proposition 6.2.1 *Soit $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la fonction constante qui envoie tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $a(C)+1$. Soit $\mathscr{B} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{B}_n$ une $\mathcal{O}_C$-algèbre graduée quasi-cohérente. On suppose que pour tout entier $n \geq 0$, $\mathscr{B}_n$ soit un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini. Alors $B = \mathscr{B}_K$ est une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée.*

Démonstration. On désigne par $\mathcal{F}$ les filtrations de Harder-Narasimahan sur les $\mathscr{B}_n$. Comme $\mathscr{B}$ est une $\mathcal{O}_C$-algèbre, pour tout entier $r \geq 2$ et tout $(n_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, on a un homomorphisme φ de $\mathscr{B}_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_{n_r}$ vers $\mathscr{B}_N$, où $N = n_1 + \cdots + n_r$. Si $(t_i)_{1\leq i\leq r}$ est une famille de nombres réels, l'homomorphisme φ induit par restriction un homomorphisme ψ de $\mathcal{F}_{t_1}\mathscr{B}_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_r}\mathscr{B}_{n_r}$ vers $\mathscr{B}_N$. Par définition de la filtration de Harder-Narasimhan on obtient que si les $\mathcal{F}_{t_i}\mathscr{B}_{n_i}$ sont non-nuls, on a $\mu_{\min}(\mathcal{F}_{t_i}\mathscr{B}_{n_i}) \geq t_i$ pour tout i. Compte tenu de la proposition 1.3.22, on a

$$\mu_{\min}(\mathcal{F}_{t_1}\mathscr{B}_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_r}\mathscr{B}_{n_r}) \geq t_1 + \cdots + t_r - (r-1)(a(C)+1).$$

D'après la proposition 4.3.19, ψ est compatible aux filtrations de Harder-Narasimhan, donc ψ se factorise par $\mathcal{F}_{t_1+\cdots+t_r-(r-1)(a(C)+1)}\mathscr{B}_N$. Par conséquent, B est une K-algèbre graduée quasi-filtrée. $\square$

Théorème 6.2.2 *Soit $\mathscr{B} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{B}_n$ une $\mathcal{O}_C$-algèbre graduée quasi-cohérente et de type fini. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

i) pour tout entier n, $\mathscr{B}_n$ est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini ;

ii) il existe une constante $C > 0$ telle que $\mu_{\max}(\mathscr{B}_n) \leq Cn$ pour tout entier $n \geq 1$.

iii) $\mathscr{B}_K$ est un anneau intègre et $\mathscr{B}_n$ est non-nul pour n suffisamment grand ;

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par P_n le polygone de Harder-Narasimhan de $\mathscr{B}_n$. Alors la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Démonstration. Soit f la fonction constante sur $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ avec valeur $a(C)+1$. D'après la proposition 6.2.1, on obtient que $\mathscr{B}_K$ est une K-algèbre graduée quasi-filtrée. Le théorème résulte donc du corollaire 6.1.25. $\square$

Corollaire 6.2.3 *Soient $\pi : X \to C$ un morphisme projectif et surjectif d'une variété algébrique X vers C et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible tel que L_K soit ample. Pour tout entier $n \geq 1$ soit P_n le polygone de Harder-Narasimhan de $\pi_*(L^{\otimes n})$. Alors la suite de polygones $(P_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément.*

6.2.2 Cas arithmétique

Raisonnement à travers une algèbre graduée quasi-filtrée

Soit K un corps de nombre, $(\overline{\mathscr{B}}_n)_{n\geq 0}$ une collection de fibrés vectoriels hermitiens non-nuls sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. On suppose que $B = \bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{B}_{n,K}$ soit muni d'une structure d'algèbre commutative $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduée sur K. Pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on désigne par $\mathcal{F}$ la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathscr{B}_n$. Cette filtration induit une filtration sur $B_n := \mathscr{B}_{n,K}$, notée encore $\mathcal{F}$. Pour tout élément $\mathbf{n} = (n_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathbb{N}^r$ on a un homomorphisme $\varphi_{\mathbf{n}}$ de $B_{n_1} \otimes \cdots \otimes B_{n_r}$ vers $B_{|\mathbf{n}|}$ défini par la structure d'algèbre. Si $(s_i)_{1\leq i\leq r}$ est un élément dans $\mathbb{R}^r$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathscr{B}}_{n_1,s_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathscr{B}}_{n_r,s_r}) &\geq \sum_{i=1}^r \widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathscr{B}}_{n_i,s_i}) - \sum_{i=1}^r \log(\operatorname{rg}(\mathscr{B}_{n_i,s_i})) \\ &\geq \sum_{i=1}^r \Big(s_i - \log(\operatorname{rg}(\mathscr{B}_{n_i}))\Big).\end{aligned}$$

Si $\overline{E}$ est un sous-fibré vectoriel hermitien de $\overline{\mathscr{B}}_{|\mathbf{n}|}$ tel que E_K coïncide avec l'image de $B_{n_1,s_1} \otimes \cdots \otimes B_{n_r,s_r}$ dans $B_{|\mathbf{n}|}$, d'après l'inégalité de pentes, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) &\geq \widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathscr{B}}_{n_1,s_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathscr{B}}_{n_r,s_r}) - h(\varphi_{\mathbf{n}}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{r} \Big(s_i - \log(\operatorname{rg}(\mathscr{B}_{n_i}))\Big) - h(\varphi_{\mathbf{n}}).\end{aligned}$$

On suppose que $g : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ soit une fonction telle que $h(\varphi_{\mathbf{n}}) \leq g(n_1) + \cdots + g(n_r)$. Pour tout entier $n \geq 1$ soit $f(n) = g(n) + \log(\operatorname{rg}(\mathscr{B}_n))$. Alors B est une K-algèbre graduée f-quasi-filtrée.

Théorème 6.2.4 *On prend les notations comme ci-dessus. Pour tout entier $n \geq 0$ on désigne par P_n le polygone de Harder-Narasimhan de $\overline{\mathscr{B}}_n$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$ et que la suite $(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathscr{B}}_n)/n)_{n\geq 1}$ soit bornée. Si B est une K-algèbre intègre de type fini et si $B_n \neq 0$ pour n suffisamment grand, alors la suite de fonctions $(P_n/n)_{n\geq 1}$ converge uniformément.*

Démonstration. D'après la proposition 4.3.40, P_n s'identifie au polygone associé à l'espace filtré B_n. Le théorème résulte donc du théorème 6.1.20. □

Corollaire 6.2.5 *Soient $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un schéma de type fini et plat sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ tel que $\mathscr{X}_K$ soit propre, lisse sur $\operatorname{Spec} K$ et équidimensionnelle de dimension d. On fixe une mesure de probabilité sur $\mathscr{X}(\mathbb{C})$. Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample. Pour tout entier $D \geq 0$ soient E_D le $\mathcal{O}_K$-module projectif $\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes D})$, muni de la métrique L^2 et P_D le polygone de Harder-Narasimhan de $\overline{E}_D$. Alors la suite de polygones $(P_D/D)_{D\geq 1}$ converge uniformément vers une fonction concave sur $[0,1]$.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.7.20, on a pour tout $\mathbf{n} = (n_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 1}$,

$$h(\varphi_{\mathbf{n}}) \leq g(n_1) + \cdots + g(n_r),$$

où $g(n) = \log C + d \log n + \log(\operatorname{rg}(E_n))$. Si on note

$$f(n) = g(n) + \log(\operatorname{rg}(E_n)) = \log C + d \log n + 2\log(\operatorname{rg}(E_n)),$$

on vérifie facilement $\lim_{n\to+\infty} f(n)/n = 0$ puisque $\operatorname{rg}(E_n)$ est polynomial par rapport à n. D'autre part, la suite $(\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}))/n)_{n\geq 1}$ est bornée (elle a même une limite). Donc on est dans la situation du théorème 6.2.4. Par conséquent, la suite de polygones $(P_D/D)_{D\geq 1}$ converge uniformément vers une fonction concave sur $[0,1]$. □

Corollaire 6.2.6 *Avec les notations du corollaire 6.2.5, la suite*

$$\Big(\frac{\widehat{\mu}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes D}))}{D}\Big)_{D\geq 1}$$

admet une limite.

Remarque 6.2.7 Le corollaire 6.2.6 est une version inexplicite du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique dont la version explicite a été démontrée, sous diverses hypothèses par Gillet-Soulé [38], Abbes-Bouche [1], Zhang [91], Randriambololona [79] et par Rumely-Lau-Varley [82] dans un cadre plus général. La méthode de Rumely-Lau-Varley fait appel à une base particulière de l'algèbre graduée considérée qui est similaire à la méthode utilisée dans cette thèse. Il n'est pas exclu qu'une version rafinée de leur méthode peut aussi conduire à un théorème général, sur la convergence des polygones de Harder-Narasimhan.

Variante pseudo-filtrée

Pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ on désigne par $\varphi_{m,n}:B_m\otimes B_n\rightarrow B_{m+n}$ l'homomorphisme canonique. Si s et t sont deux nombres réels, $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, d'après [14], on a

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathscr{B}}_{m,s}\otimes\overline{\mathscr{B}}_{n,t})&\geq\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathscr{B}}_{m,s})+\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathscr{B}}_{n,t})-\frac{1}{2}\log(\mathrm{rg}(\mathscr{B}_{m,s})\,\mathrm{rg}(\mathscr{B}_{n,t}))-\frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}\\&\geq s+t-\frac{1}{2}\log(\mathrm{rg}(\mathscr{B}_m))-\frac{1}{2}\log(\mathrm{rg}(\mathscr{B}_n))-\frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.\end{aligned}$$

Si $\overline{E}$ est un sous-fibré vectoriel hermitien de $\overline{\mathscr{B}}_{m+n}$ tel que E_K coïncide avec l'image de $B_{m,s}\otimes B_{n,t}$ dans B_{m+n}, d'après l'inégalité de pentes, on a

$$\begin{aligned}&\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})\geq\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathscr{B}}_{m,s}\otimes\overline{\mathscr{B}}_{n,t})-h(\varphi_{m,n})\\&\geq s+t-\frac{1}{2}\log(\mathrm{rg}(\mathscr{B}_m))-\frac{1}{2}\log(\mathrm{rg}(\mathscr{B}_n))-\frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}-h(\varphi_{m,n}).\end{aligned}$$

On suppose que $g:\mathbb{Z}_{>0}\rightarrow\mathbb{R}_{\geq 0}$ soit une fonction telle que $h(\varphi_{m,n})\leq g(m)+g(n)$. Pour tout entier $n\geq 1$ soit

$$f(n)=g(n)+\frac{1}{2}\log(\mathrm{rg}(\mathscr{B}_n))+\frac{\log|\Delta_K|}{4[K:\mathbb{Q}]}.$$

Alors B est une K-algèbre graduée f-pseudo-filtrée.

Théorème 6.2.8 *Pour tout entier $n\geq 0$ on désigne par P_n le polygone de Harder-Narasimhan de $\overline{\mathscr{B}}_n$. On suppose que $\sum_{\alpha\geq 0}f(2^\alpha)/2^\alpha<+\infty$. Si B est une K-algèbre intègre de type fini et si $B_n\neq 0$ pour n suffisamment grand, alors la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément.*

6.3 Convergence des polygones d'un module bigradué

On présente dans ce paragraphe un calcul explicite de la limite des polygones lorsque l'algègre bigraduée associée à l'algèbre graduée quasi-filtrée est de type fini. La méthode que l'on utilisera dans ce paragraphe est inspirée par un travail de Faltings et Wüstholz [30].

6.3.1 Algèbres bigraduées et module bigradués

Dans ce sous-paragraphe A désigne un anneau commutatif et unifère. Les références sont [16] chap. II §11 et [18] chap. VIII §4.

Définition 6.3.1 On appelle A-*algèbre bigraduée* toute A-algèbre commutative $\mathbb{N}^2$-graduée. Si B est une A-algèbre bigraduée, on appelle B-*module bigradué* tout B-module M muni d'une $\mathbb{Z}^2$-graduation en A-modules tel que, pour tout $(n,d)\in\mathbb{N}^2$ et tout $(n',d')\in\mathbb{Z}^2$, on ait

$$B_{n,d}M_{n',d'}\subset M_{n+n',d+d'},$$

on appelle *sous-B-module homogène* de M tout sous B-module M' de M tel que

$$M' = \bigoplus_{(n,d)\in\mathbb{Z}^2} M' \cap M_{n,d};$$

M' est donc canoniquement muni d'une structure de B-module gradué. En particulier, si B est une A-algèbre bigraduée, alors B est canoniquement munie d'une structure de B-module bigradué. Les sous-B-modules homogènes de B sont appelés des *idéaux homogènes* de B.

Si B est une A-algèbre bigraduée et M est un B-module bigradué, pour tout $(n,d)\in\mathbb{Z}^2$, on désigne par $M(n,d)$ le B-module bigradué tel que, pour tout $(n',d')\in\mathbb{Z}^2$, on ait

$$M(n,d)_{n',d'} = M_{n+n',d+d'}.$$

Remarque 6.3.2 Si B est une A-algèbre bigraduée, alors

$$B_+ := \bigoplus_{n>0,d>0} B_{n,d}$$

est un idéal homogène.

Exemple 6.3.3 Soit f une application de $\{1,\cdots,n\}$ vers $\mathbb{N}^2$. L'anneau de polynômes $A[T_1,\cdots,T_n]$ est canoniquement muni d'une $\mathbb{N}^2$-graduation telle que T_i soit de bidegré $f(i)$ et qui est compatible avec la structure d'anneaux. On obtient donc une A-algèbre bigraduée, notée $A[f]$.

Remarque 6.3.4 Si B est une A-algèbre bigraduée de type fini, alors B est engendrée par un nombre fini d'éléments homogènes $x_1,\cdots,x_m$. On suppose que x_i soit de bidegré (n_i,d_i). Soit $f:\{1,\cdots,m\}\to\mathbb{N}^2$ la fonction qui envoie i en (n_i,d_i). Alors l'homomorphisme surjectif de A-algèbres de $A[f]\cong A[T_1,\cdots,T_m]$ vers B qui envoie T_i en x_i est compatible aux $\mathbb{N}^2$-graduations. C'est donc un homomorphisme d'algèbres bigraduées. Dans ce cas-là, tout B-module bigradué M peut être considéré comme un $A[f]$-module bigradué, qui est de type fini si M est un B-module de type fini.

Définition 6.3.5 Soient $f=(f_1,f_2)$ une application de $\{1,\cdots,m\}$ vers $\mathbb{N}^2$ et M un $A[f]$-module bigradué de type fini dont toutes les composantes homogènes sont des A-modules de longueur finie. On appelle *série de Poincaré* de M l'élément

$$P_M \in Z[\![X,Y]\!][X^{-1},Y^{-1}]$$

défini par la formule

$$P_M = \sum_{(n,d)\in\mathbb{Z}^2} \operatorname{long}_A(M_{n,d})X^nY^d.$$

On note

$$Q_M = P_M\prod_{i=1}^m(1-X^{f_1(i)}Y^{f_2(i)}).$$

Proposition 6.3.6 *Avec les notations de la définition 6.3.5, on a*

$$Q_M \in \mathbb{Z}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}].$$

Démonstration. Quitte à quotienter A par $\mathrm{ann}_A(M)$ on se ramène au cas où $\mathrm{ann}_A(M) = 0$. Comme M est un $A[f]$-module de type fini, il existe des entiers $a < b$ tels que M soit engendré comme $A[f]$-module par

$$M' = \bigoplus_{(n,d)\in[a,b]^2\cap\mathbb{Z}^2} M_{n,d}.$$

Comme M' est un A-module de longueur finie, et comme $\mathrm{ann}_A(M') = \mathrm{ann}_A(M) = 0$, l'anneau A est artinien, donc est noethérien.

On raisonne par récurrence en m. Si $m = 0$, alors $A[f] = A$. Comme M est un A-module de type fini, on a $P_M \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. Supposons que la proposition ait été démontrée pour $m-1$. Soit f' la restriction de f à $\{1, \cdots, m-1\}$. On note $(n_m, d_m) = f(m)$. L'application

$$T_m : M(-n_m, -d_m) \longrightarrow M$$

est un homomorphisme de $A[f]$-modules bigradués. Soit N son noyau (vu comme sous-$A[f]$-module bigradué de M). On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow N(-n_m, -d_m) \longrightarrow M(-n_m, -d_m) \longrightarrow M \longrightarrow M/T_mM \longrightarrow 0\ .$$

Par conséquent, on a

$$P_M - X^{n_m}Y^{d_m}P_M = P_{M/T_mM} - X^{n_m}Y^{d_m}P_N.$$

Comme M/T_mM et N sont des $A[f'] = A[f]/(T_m)$-modules de type fini, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$Q_M = Q_{M/T_mM} - X^{n_m}Y^{d_m}Q_N \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}].$$

□

Remarque 6.3.7 Soient $f = (f_1, f_2) : \{1, \cdots, m\} \to \mathbb{N}^2$ une application telle que $f_1 \equiv 1$ et M un $A[f]$-module bigradué de type fini dont les composantes homogènes sont des A-modules de longueur finie. L'algèbre $A[f]$, munie de la première graduation, est l'algèbre de polynômes à m variables usuellement graduée. On peut également considérer la première graduation de M pour laquelle la $n^{\text{ème}}$ composante homogène de M est

$$\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_{n,d}.$$

Cette composante homogène est un A-module de longueur finie puisqu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers d tels que $M_{n,d} \neq 0$. Avec cette graduation, M est un module gradué de type fini sur l'algèbre de polynômes $A[T_1, \cdots, T_m]$ (munie de la graduation usuelle). Si on désigne par H_M la série de Poincaré associée à M (pour la première graduation) on a

$$H_M(X) = P_M(X, 1).$$

La théorie classique des séries de Poincaré affirme qu'il existe un entier $m \geq r \geq 0$ tel que $H_M(X)$ s'écrive sous la forme

$$H_M(X) = a_r(X)(1-X)^{-r} + a_{r-1}(X)(1-X)^{-r+1} + \cdots + a_0(X),$$

où $a_0, \cdots, a_r$ sont des éléments dans $\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$, a_r est à coefficients positifs et il est non-nul lorsque M est non-nul. D'autre part, les valeurs de r et de $a_r(1)$ ne dependent pas du choix de $(a_0, \cdots, a_r)$. Si $M \neq 0$, on appelle *dimension* de M la valeur de r, notée $\dim M$. On note $c(M) = a_r(1)$. Enfin, on note par convention $\dim 0 = -\infty$, $c(0) = 0$.

Théorème 6.3.8 *Avec les notations de la remarque 6.3.7, la série P_M s'écrit sous la forme*

$$P_M(X,Y) = \sum_{r=0}^{h} \sum_{\substack{\alpha\subset\{1,\cdots,m\}\\ \#\alpha=r}} I_\alpha(X,Y) \prod_{i\in\alpha}(1-XY^{f_2(i)})^{-1},$$

où

1) $I_\alpha \in \mathbb{Z}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$,

2) si $\#\alpha = h$, I_α *est à coefficients positifs,*

3) si $M \neq 0$, *il existe au moins un* $\alpha \subset \{1,\cdots,m\}$ *de cardinal* h *tel que* $I_\alpha \neq 0$.

Remarque 6.3.9 Avec les notations du théorème 6.3.8, on a

$$H_M(X) = \sum_{r=0}^{h}\left(\sum_{\substack{\alpha\subset\{1,\cdots,m\}\\ \#\alpha=r}} I_\alpha(X,1)\right)(1-X)^{-r}.$$

Par conséquent, si M est non-nul, alors $\dim M = h$ et

$$c(M) = \sum_{\substack{\alpha\subset\{1,\cdots,m\}\\ \#\alpha=h}} I_\alpha(1,1).$$

Pour simplifier la démonstration du théorème 6.3.8, on introduit la notation suivante :

Si M est un $A[f]$-module bigradué satisfaisant à l'assertion du théorème 6.3.8, on dit que M vérifie la condition $\mathbb{P}$, noté $\mathbb{P}(M)$. L'assertion du théorème 6.3.8 devient alors :

$$\text{Pour tout } A[f]\text{-module } M, \text{ on a } \mathbb{P}(M).$$

Définition 6.3.10 Pour tout entier $m > 0$, soit Θ_m l'ensemble

$$\{(i,j)\in\mathbb{Z} \mid 0\le i\le m,\ j>0\}\cup\{(-\infty,0)\}.$$

On le munit de la relation lexicographique "$\le$" comme ci-dessous :

$$(i,j)\le(i',j') \text{ si et seulement si } i<i' \text{ ou si } i=i',\ j\le j'.$$

On vérifie facilement que c'est une relation d'ordre sur Θ_m et que l'ensemble Θ_m est totalement ordonné pour cette relation. On utilisera l'expression "$(i,j)<(i',j')$" pour désigner la condition

$$(i,j)\le(i',j') \text{ mais } (i,j)\neq(i',j').$$

Lemme 6.3.11 *Soit*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de $A[f]$-modules bigradués. Si pour tout $(n,d)\in\mathbb{Z}^2$, $M'_{n,d}$ et $M''_{n,d}$ sont des A-modules de longueur finie, alors il en est de même de M. De plus, on a

1) $\dim M = \max(\dim M', \dim M'')$,

2)

$$c(M) = \begin{cases} c(M')+c(M''), & \dim M' = \dim M'',\\ c(M'), & \dim M' > \dim M'',\\ c(M''), & \dim M'' > \dim M'. \end{cases}$$

3) $\mathbb{P}(M')$ *et* $\mathbb{P}(M'') \Longrightarrow \mathbb{P}(M)$.

Démonstration. En effet, on a $P_M = P_{M'} + P_{M''}$ et $H_M = H_{M'} + H_{M''}$. Par définition on sait que 1) et 2) sont vrais. Enfin, 3) est une conséquence du 1) et du fait que $P_M = P_{M'} + P_{M''}$. □

Démonstration du théorème 6.3.8. D'après le même raisonnement que celle de la démonstration de la proposition 6.3.6, on peut supposer que A soit un anneau artinien. On raisonne par récurrence en m. Montrons d'abord que le théorème est vrai pour le cas où $\dim M \leq 0$. Si M est de dimension ≤ 0, alors la série de Poincaré de M, i.e., $H_M(X) = P_M(X, 1)$ est un élément de $\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$, et $P_M \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. Donc on a $\mathbb{P}(M)$. Comme $\dim M \leq m$, le théorème est vrai lorsque $m = 0$. Supposons que le théorème soit vrai pour les modules bigradués sur les A-algèbres de polynômes à au plus $m-1$ variables ($m \geq 1$). Soit $f = (f_1, f_2) : \{1, \cdots, m\} \to \mathbb{N}^2$ une application telle que $f_1 \equiv 1$ et soit M un $A[f] = A[T_1, \cdots, T_m]$-module bigradué de type fini tel que $M_{(n,d)}$ soit de longueur finie sur A pour tout $(n, d) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que $f_2(m) = d$.

On commence un autre procédé de récurrence en $(\dim M, c(M))$. On a déjà démontré $\mathbb{P}(M)$ pour $\dim M \leq 0$. Supposons que l'on a prouvé $\mathbb{P}(M)$ pour $(\dim M, c(M)) < (r, s)$, où $0 < r \leq m$, $s > 0$. Dans la suite, on démontre $\mathbb{P}(M)$ pour le cas où $(\dim M, c(M)) = (r, s)$. On considère l'homothétie

$$T_m : M(-1, -d) \longrightarrow M,$$

qui est un homomorphisme de $A[f]$-modules bigradués. On désigne par f' la restriction de f à $\{1, \cdots, m-1\}$. Soit N_1 le noyau de T_m (vu comme un sous-$A[f]$-module bigradué). C'est un $A[f']$-module bigradué de type fini. D'après l'hypothèse de récurrence on a $\mathbb{P}(N_1)$. Soit $M_1 = M/N_1$. D'après le lemme 6.3.11 3), pour démontrer $\mathbb{P}(M)$, il suffit de démontrer $\mathbb{P}(M_1)$. Si $\dim N_1 = \dim N$, alors ou bien $\dim M_1 < \dim M$, ou bien $\dim M_1 = \dim M$ et

$$c(M_1) = c(M) - c(N_1) < c(M).$$

Donc on a toujours $(\dim M_1, c(M_1)) < (\dim M, c(M))$. D'après l'hypothèse de récurrence on a $\mathbb{P}(M_1)$. Sinon on a $\dim N_1 < \dim N$ et $(\dim M_1, c(M_1)) = (\dim M, c(M))$. Si $\mathbb{P}(M)$ n'était pas vrai, en itérant le procédé ci-dessus on obtiendrait une suite croissante de sous-modules homogènes

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots N_j \subset N_{j+1} \subset \cdots \tag{6.15}$$

de M telle que (on définit $M_0 = M$)

i) $N_j = \operatorname{Ker} T_m^j$,

ii) $\dim N_j < \dim M$,

iii) $M_j := M/N_j$ ne satisfait pas à la condition $\mathbb{P}$, et

$$(\dim M_j, c(M_j)) = (\dim M, c(M)).$$

Comme $A[f]$ est un anneau noethérien, la suite (6.15) est stationnaire. Autrement dit, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $M_j = M_{j+1}$. Comme M_{j+1} s'identifie canoniquement à l'image de M_j par l'homothétie T_m, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_j(-1, -d) \xrightarrow{T_m} M_j \longrightarrow M_j/T_m M_j \longrightarrow 0$$

On note $N' = M_j/T_m M_j$. C'est en fait un $A[f']$-module de type fini. D'après l'hypothèse de récurrence on a $\mathbb{P}(N')$. Enfin, comme

$$(1 - XY^d) P_{M_j}(X, Y) = P_{N'}(X, Y),$$

on a $\mathbb{P}(M_j)$. Cela est absurde. Donc on a forcément $\mathbb{P}(M)$.

$\square$

Définition 6.3.12 Soit P une série formelle dans $\mathbb{Z}[\![X,Y]\!][X^{-1},Y^{-1}]$ à coefficients positifs. Alors P s'écrit sous la forme

$$P(X,Y)=\sum_{(n,d)\in\mathbb{Z}^2}a_{n,d}(P)X^nY^d.$$

On note pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$S_n(P)=\sum_{d\in\mathbb{Z}}a_{n,d}(P),$$

et $\lambda_{n,P}$ la mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\lambda_{n,P}=\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{a_{n,d}(P)}{S_n(P)}\delta_{d/n}.$$

Si $S_n(P)=0$, alors $\lambda_{n,P}$ est par convention la mesure nulle.

Remarque 6.3.13 On garde les notations du théorème 6.3.8 en supposant que A soit un corps. Si on munit pour tout entier n l'espace vectoriel

$$M_{n,\bullet}:=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}M_{n,d}$$

de la $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$ définie par

$$\mathcal{F}_\lambda M_{n,\bullet}=\bigoplus_{d\geq\lambda}M_{n,d},$$

alors la mesure $\lambda_{n,P}$ s'identifie à $T_{\frac{1}{n}}\mu_{M_{n,\bullet}}$

Proposition 6.3.14 *Si P est une série dans $\mathbb{Z}[\![X,Y]\!]$ de la forme*

$$P(X,Y)=\prod_{i=1}^m(1-XY^{d_i})^{-1},$$

alors

1) les mesures de Radon $\lambda_{n,P}$ convergent vaguement vers une mesure de Radon λ_P lorsque $n\to+\infty$,

2) la suite de fonctions

$$\left(F_{n,P}:x\longmapsto 1-\int_{\mathbb{R}}1\!\!1_{]-\infty,x]}d\lambda_{n,P}\right)_{n\geq1}$$

converge simplement vers

$$F_P:x\longmapsto 1-\int_{\mathbb{R}}1\!\!1_{]-\infty,x]}d\lambda_P.$$

Démonstration. 1) On a

$$P(X,Y)=\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{n\geq 0}X^nY^{nd_i}\right)$$

$$=\sum_{(n,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}\left(\sum_{\substack{(u_1,\cdots,u_m)\in\mathbb{N}^m\\ u_1+\cdots+u_m=n,\\ u_1d_1+\cdots+u_md_m=d}}1\right)X^nY^d$$

$$=1+\sum_{\substack{(n,d)\in\mathbb{Z}^2\\ n>0}}\left(\sum_{\substack{(\mu_1,\cdots,\mu_m)\in\frac{1}{n}\mathbb{N}^m\\ \mu_1+\cdots+\mu_m=1,\\ \mu_1d_1+\cdots+\mu_md_m=d/n}}1\right)X^nY^d.$$

D'autre part,

$$S_n(P)=\sum_{\substack{(\mu_1,\cdots,\mu_m)\in\frac{1}{n}\mathbb{N}^m\\ \mu_1+\cdots+\mu_m=1}}1.$$

Soient Δ_m le simplexe

$$\Delta_m=\{(\mu_1,\cdots,\mu_m)\in\mathbb{R}_+^m\mid \mu_1+\cdots+\mu_m=1\},$$

$\varphi:\Delta_m\to\mathbb{R}$ l'application qui envoie $(\mu_1,\cdots,\mu_m)$ en $\mu_1d_1+\cdots+\mu_md_m$. Pour tout entier $n>0$ soit $\eta_{n,P}$ la mesure sur Δ_m définie par

$$\eta_{n,P}=\sum_{\mu\in\frac{1}{n}\mathbb{N}^m\cap\Delta_m}\frac{1}{S_n(P)}\delta_\mu.$$

On observe que $\lambda_{n,P}$ est l'image directe de $\eta_{n,P}$ par φ. Par conséquent, $\lambda_{n,P}$ est à support dans $\varphi(\Delta_m)$. Donc pour toute fonction continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f est intégrable pour la mesure $\lambda_{n,P}$. D'après la formule du changement de variables, on a

$$\int_{\mathbb{R}}fd\lambda_{n,P}=\int_{\Delta_m}f\circ\varphi d\eta_{n,P}$$

qui est la $n^{\text{ième}}$ somme de Riemann de la fonction $f\circ\varphi:\Delta_m\to\mathbb{R}$. Donc la suite

$$\int_{\mathbb{R}}fd\lambda_{n,P}$$

converge vers

$$\int_{\Delta_m}f\circ\varphi d\eta=\int_{\mathbb{R}}fd\varphi_*\eta,$$

où η est la mesure de Lebesgue sur Δ_m. On en déduit alors que les mesure $\lambda_{n,P}$ converge vaguement vers la mesure $\lambda_P=\varphi_*\eta$.

2) L'application φ peut être prolongée à une application affine Φ de

$$\{(\mu_1,\cdots,\mu_m)\in\mathbb{R}^m\mid \mu_1+\cdots+\mu_m=1\}$$

vers $\mathbb{R}$ en posant simplement

$$\Phi(\mu_1, \cdots, \mu_m) = \mu_1 d_1 + \cdots \mu_m d_m.$$

Si $d_1 = d_2 = \cdots = d_m = d$, alors $P(X,Y) = (1 - XY^d)^{-m}$. Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, $\lambda_{n,P} = \lambda_P = \delta_d$. L'assertion est donc évidente. Sinon l'image de Φ est l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier. Ceci étant, pour tout point $x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(x)$ (et $\Phi^{-1}(x)$) est un sous-ensemble de mesure nulle de Δ_m pour la mesure de Lebesgue. Par conséquent, l'ensemble ponctuel $\{x\}$ est négligeable pour la mesure λ_P. D'après [15] chap. IV §5, $n°12$ Proposition 22, comme x est le seul point de discontinuité de la fonction $1\!\!1_{]-\infty,x]}$, on obtient que

$$\text{la suite } \left(\int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{]-\infty,x]} d\lambda_{n,P}\right)_{n\geq 1} \text{ converge vers } \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{]-\infty,x]} d\lambda_P.$$

□

Corollaire 6.3.15 *Si Q est une série non-nulle dans $\mathbb{Z}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$ à coefficients positifs, et si $P \in \mathbb{Z}[\![X,Y]\!][X^{-1},Y^{-1}]$ est de la forme*

$$P(X,Y) = \prod_{i=1}^{m} (1 - XY^{d_i})^{-1} Q(X,Y),$$

alors

1) les mesures de Radon $\lambda_{n,P}$ convergent vaguement vers une mesure de Radon λ_P lorsque $n \to +\infty$;

2) on définit des fonctions

$$\left(F_{n,P} : x \longmapsto 1 - \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{]-\infty,x]} d\lambda_{n,P}\right)_{n\geq 1},$$

$$F_P : x \longmapsto 1 - \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{]-\infty,x]} d\lambda_P,$$

i) si $d_1 = \cdots = d_n = d$, alors pour tout $x \neq d/n$, la suite $(F_{n,P}(x))_{n\geq 1}$ converge vers $F_P(x)$,

ii) si les d_i ne sont pas identiques, alors la suite de fonctions $(F_{n,P})_{n\geq 1}$ converge simplement vers F_P.

De plus, si on désigne par P' la série

$$P'(X,Y) = \prod_{i=1}^{m} (1 - XY^{d_i})^{-1},$$

alors on a $\lambda_P = \lambda_{P'}$, et donc $F_P = F_{P'}$.

Démonstration. 1) Supposons que Q soit de la forme

$$Q(X,Y) = \sum_{n=e}^{f} \sum_{d=r}^{s} c_{n,d} X^n Y^d,$$

où $c_{n,d} \geq 0$. Comme $P = P'Q$, on obtient que

$$a_{n,d}(P) = \sum_{n'=e}^{f} \sum_{d'=r}^{s} c_{n',d'} a_{n-n',d-d'}(P'),$$

et

$$\begin{aligned} S_n(P) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} a_{n,d}(P) &= \sum_{d \in \mathbb{Z}} \sum_{n'=e}^{f} \sum_{d'=r}^{s} c_{n',d'} a_{n-n',d-d'}(P') \\ &= \sum_{n'=e}^{f} \sum_{d'=r}^{s} \sum_{d \in \mathbb{R}} c_{n',d'} a_{n-n',d-d'}(P') = \sum_{n'=e}^{f} \sum_{d'=r}^{s} c_{n',d'} S_{n-n'}(P'). \end{aligned}$$

Si on note

$$C_n = \sum_{d \in \mathbb{Z}} c_{n,d} = \sum_{d=r}^{s} c_{n,d},$$

alors on a

$$S_n(P) = \sum_{n'=e}^{f} C_{n'} S_{n-n'}(P').$$

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue à support compact, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g d\lambda_{n,P} &= \sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n,d}(P)}{S_n(P)} g(d/n) \\ &= \frac{1}{S_n(P)} \sum_{d \in \mathbb{Z}} \sum_{n'=e}^{f} \sum_{d'=r}^{s} c_{n',d'} a_{n-n',d-d'}(P') g(d/n). \end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{S_n(P)} \sum_{n'=e}^{f} \sum_{d'=r}^{s} \sum_{d \in \mathbb{Z}} c_{n',d'} a_{n-n',d-d'}(P') g\left(\frac{d-d'}{n-n'}\right) \\ &= \frac{1}{S_n(P)} \sum_{n'=e}^{f} \sum_{d'=r}^{s} c_{n',d'} S_{n-n'}(P') \int_{\mathbb{R}} g d\lambda_{n-n',P'} \\ &= \frac{1}{S_n(P)} \sum_{n'=e}^{f} C_{n'} S_{n-n'}(P') \int_{\mathbb{R}} g d\lambda_{n-n',P'} \end{aligned}$$

converge vers $\int_{\mathbb{R}} g d\lambda_{P'}$ puisque $\lambda_{n,P'}$ converge vaguement vers $\lambda_{P'}$ lorsque $n \to \infty$. Enfin, la fonction g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre $\delta > 0$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ de telle sorte que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \varepsilon$ on ait $|g(x) - g(y)| < \delta$. D'autre part, pour tous les entiers d, n tels que[4]

$$|d| > \max_{1 \leq i \leq m} |d_i|(|n| + \max\{|e|, |f|\}) + \max\{|r|, |s|\},$$

[4]Comme

$$P' = \prod_{i=1}^{m} (1 - XY^{d_i})^{-1},$$

on a $a_{n,d}(P') = 0$ si $|d| > |n| \max_{1 \leq i \leq m} |d_i|$.

on a $a_{n-n',d-d'}(P') = 0$ pour tout $n' \in \{e, e+1, \cdots, f\}$ et tout $d' \in \{r, r+1, \cdots, s\}$. Par conséquent, pour tous les entiers $n > \max\{|e|, |f|\}$, $d \in \mathbb{Z}$, $n' \in \{e, e+1, \cdots, f\}$ et $d' \in \{r, r+1, \cdots, s\}$ tels que $a_{n-n',d-d'}(P') \neq 0$, on a forcément

$$\begin{aligned}&\left|\frac{d}{n} - \frac{d-d'}{n-n'}\right| = \left|\frac{d'n - dn'}{n(n-n')}\right| \\ \le\ & \frac{\max\{|r|,|s|\}}{n-n'} + \max\{|e|,|f|\}\frac{\max|d_i|(n+\max\{|e|,|f|\}) + \max\{|r|,|s|\}}{n(n-n')}.\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe un entier $N > 0$ tel que pour tous entiers $n > N$, $d \in \mathbb{Z}$, $n' \in \{e, e+1, \cdots, f\}$ et $d' \in \{r, r+1, \cdots, s\}$, on a ou bien $a_{n-n',d-d'}(P') = 0$, ou bien

$$\left|\frac{d}{n} - \frac{d-d'}{n-n'}\right| < \varepsilon.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}} g d\lambda_{n,P} - \frac{1}{S_n(P)}\sum_{n'=e}^{f}\sum_{d'=r}^{s}\sum_{d\in\mathbb{Z}} c_{n',d'}a_{n-n',d-d'}(P')g\left(\frac{d-d'}{n-n'}\right)\right| \\ \le\ & \frac{1}{S_n(P)}\sum_{n'=e}^{f}\sum_{d'=r}^{s}\sum_{d\in\mathbb{Z}} c_{n',d'}a_{n-n',d-d'}(P')\left|g\left(\frac{d}{n}\right) - g\left(\frac{d-d'}{n-n'}\right)\right| \\ \le\ & \frac{\delta}{S_n(P)}\sum_{n'=e}^{f}\sum_{d'=r}^{s}\sum_{d\in\mathbb{Z}} c_{n',d'}a_{n-n',d-d'}(P') \\ =\ & \delta.\end{aligned}$$

On en déduit la convergence vague des $\lambda_{n,P}$ vers $\lambda_{P'}$.

2) Si $d_1 = \cdots = d_m = d$, alors $\lambda_{n,P} = \delta_{d/n}$, donc pour tout $x \neq d/n$, l'ensemble des points de discontinuité de $1\!\!1_{]-\infty,x]}$, i.e., $\{x\}$, est négligeable pour la mesure $\lambda_{n,P}$. Donc $\int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{]-\infty,x]} d\lambda_{n,P}$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{]-\infty,x]} d\lambda_{n,P}$. Si les d_i ne sont pas identiques, alors tout sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$ est négligeable pour la mesure λ_P, donc la suite de fonction $(F_{n,P})_{n\ge1}$ converge simplement vers la fonction F_P. □

Définition 6.3.16 Avec les notations du corollaire 6.3.15, on perçoit que la mesure limite λ_P ne dépend que du vecteur $(d_1, \cdots, d_m) \in \mathbb{N}^m$ (ou même de la classe d'équivalence de $(d_1, \cdots, d_m)$ dans $\mathbb{N}^m/\mathfrak{S}_m$). Dans toute la suite, on désigne par $\lambda_{(d_1,\cdots,d_m)}$ cette mesure. En fait, c'est une mesure de probabilité lorsque $m > 0$. Pour $m = 0$, $\lambda_\emptyset$ est la mesure nulle.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du corollaire 6.3.15.

Théorème 6.3.17 *Soient* $(d_1, \cdots, d_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ *et*

$$P(X,Y) = \sum_{r=0}^{h}\sum_{\substack{\alpha\subset\{1,\cdots,m\}\\ \operatorname{card}\alpha = r}} I_\alpha(X,Y)\prod_{i\in\alpha}(1 - XY^{d_i})^{-1}$$

une série dans $\mathbb{Z}[\![X,Y]\!][X^{-1},Y^{-1}]$ *où*

a) P *est à coefficients positifs,*

b) $I_\alpha \in \mathbb{Z}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$,

c) pour tout $\alpha \subset \{1, \cdots, m\}$ *de cardinal* h, I_α *est à coefficients positifs,*

d) il existe au moins un $\alpha \subset \{1, \cdots, m\}$ *de cardinal* h *tel que* $I_\alpha \neq 0$.

Alors,

1) les mesures de Radon $\lambda_{n,P}$ *converge vaguement vers une mesure de Radon* λ_P *lorsque* $n \to +\infty$,

2) il existe un sous-ensemble fini Ω *de* $\mathbb{R}$ *tel que la suite de fonctions*

$$\left(F_{n,P} : x \longmapsto 1 - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]-\infty,x]} d\lambda_{n,P}\right)_{n \geq 1}$$

converge ponctuellement sur $\mathbb{R} \setminus \Omega$ *vers la fonction*

$$F_P : x \longmapsto 1 - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]-\infty,x]} d\lambda_P.$$

De plus, si pour tout $\alpha = \{i_1 < \cdots < i_h\}$ *on note* $d_\alpha = (d_{i_1}, \cdots, d_{i_h})$, *alors la mesure limite* λ_P *est égale à*

$$\sum_{\substack{\alpha \subset \{1, \cdots, m\} \\ \operatorname{card} \alpha = h}} \frac{I_\alpha(1,1)}{S} \lambda_{d_\alpha},$$

où

$$S = \sum_{\substack{\alpha \subset \{1, \cdots, m\} \\ \operatorname{card} \alpha = h}} I_\alpha(1,1).$$

Donc λ_P *est une mesure de probabilité lorsque* $h > 0$. *Si* $h = 0$, *alors* λ_P *est la mesure nulle.*

6.3.2 Convergence des polygones

Soient A un anneau. On désigne par $\mathcal{C}$ la catégorie des A-modules $\mathbb{Z}$-gradués qui sont de longueur fini sur A et par $\mathcal{E}$ la classe des suites exactes de A-modules $\mathbb{Z}$-gradués dans $\mathcal{C}$. Le couple $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ est une sous-catégorie exacte de la catégorie des A-modules gradués. On a deux homomorphismes de $K_0(\mathcal{C})$ vers $\mathbb{Z}$:

1) l'homomorphisme long qui envoie $[M]$ vers la longueur de M sur A ;

2) l'homomorphisme deg qui envoie $[M]$ vers

$$\deg(M) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \operatorname{long}(M_n).$$

Si M est un A-module non-nul dans $\mathcal{C}$, alors la longueur de M sur A est non-nulle. On désigne par $\mu(M)$ le quotient $\deg(M)/\operatorname{long}(M)$, appelé la *pente* de M. Evidemment un élément M dans $\mathcal{C}$ est semi-stable pour la fonction μ si et seulement s'il existe n tel que $M = M_n$. On vérifie donc que $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \operatorname{long}, \deg)$ est en fait une catégorie de Harder-Narasimhan. Si M est un A-module dans $\mathcal{C}$, la filtration de Harder-Narasimhan est simplement donnée par la formule

$$\mathcal{F}_\lambda^{\mathrm{HN}} M = \bigoplus_{n \geq \lambda} M_n.$$

Si M est non-nul, alors la mesure de probabilité associée est

$$\nu_M = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\mathrm{long}(M_n)}{\mathrm{long}(M)}\delta_n.$$

Les résultats que l'on a obtenus dans le sous-paragraphe, notamment le théorème 6.3.8 et le théorème 6.3.17, montrent aussitôt le théorème suivant :

Théorème 6.3.18 *Soient $f : \{1,\cdots,m\} \to \mathbb{N}^2$ une application telle que $f_1 \equiv 1$ et M un $A[f]$-module bigradué dont les composantes homogènes sont des A-modules de longueur finie. Si pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par ν_n la mesure de Harder-Narasimhan du A-module gradué*

$$M_{n,\bullet} := \bigoplus_{d\geq 1} M_{n,d}$$

alors la suite de mesures de Radon $T_{\frac{1}{n}}\nu_n$ converge vaguement vers une mesure de Randon ν sur $\mathbb{R}$. Si de plus $M_{n,\bullet}$ est non-nul pour n suffisamment grand, la mesure limite ν est une mesure de probabilité, et les polygones associés aux $T_{\frac{1}{n}}\nu_n$ convergent uniformément vers une courbe concave définie sur $[0,1]$.

Remarque 6.3.19 Soient K un corps et B une K-algèbre graduée et $\mathbb{N}$-filtrée (c'est-à-dire que le lieu de saut de la filtration est contenu dans $\mathbb{N}$) qui est de type fini sur K et engendrée comme K-algèbre par B_1. On peut fabriquer une K-algèbre bigraduée $\widetilde{B}$ en posant

$$\widetilde{B}_{n,d} = \mathcal{F}_d B_n / \mathcal{F}_{d+1} B_n.$$

On remarque que $\widetilde{B}_{n,\bullet}$ et B_n ont le même polygone de Harder-Narasimhan. Par conséquent, si $\widetilde{B}$ est une algèbre de type fini sur B et engendrée par $\widetilde{B}_{1,\bullet}$, alors le théorème précédent montre que les polygones de Harder-Narasimhan normalisés des B_n convergent uniformément. Mais cette condition n'est pas vraie en général, on peut par exemple considérer l'algèbre de polynômes $B = K[X]$ munie de la graduation usuelle et la filtration telle que $\lambda(X^n) = n-1$ pour tout $n \geq 1$. Alors B est une algèbre graduée filtrée puisque

$$\lambda(X^{n+m}) = n+m-1 > n-1+m-1 = \lambda(X^n) + \lambda(X^m).$$

Par ailleurs, l'algèbre bigraduée $\widetilde{B}$ s'identifie à l'algèbre $K[T_1,\cdots,T_n,\cdots]$, où le bidegré de T_n est $(n, n-1)$, modulo l'idéal homogène engendré par les éléments de la forme T_nT_m. Ce n'est pas une algèbre de type fini sur K.

6.3.3 Un calcul de la limite des polygones de Harder-Narasimhan

Dans ce sous-paragraphe, On désigne par k un corps, et par C une courbe algébrique lisse sur k. Soit K le corps des fonctions rationnelles sur C. Soit $(E_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille finie de $\mathcal{O}_C$-modules localement libres de rang fini semi-stables. On suppose de plus que pour toute famille $(n_i)_{1\leq i\leq m}$ d'entiers positifs, le $\mathcal{O}_C$-module

$$S^{n_1}E_1 \otimes \cdots \otimes S^{n_m}E_m$$

soit semi-stable. Cette condition est satisfaite notamment si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1) les $\mathcal{O}_C$-modules $E_1,\cdots,E_m$ sont tous de rang 1 ;

2) C est un espace projectif $\mathbb{P}^1$;

3) C est une courbe elliptique sur k (cf. [5]) ;

4) k est un corps de caractéristique 0.

Soit E le $\mathcal{O}_C$-module somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$. Soit $\mathscr{B}$ la $\mathcal{O}_C$-algèbre graduée l'algèbre symétrique de E. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\mathscr{B}_n = S^n E = \bigoplus_{\substack{(d_i)_{1\leq i\leq m}\in\mathbb{N}^m \\ d_1+\cdots+d_m=n}} \Big(S^{d_1}E_1 \otimes \cdots \otimes S^{d_m}E_m\Big)^{\oplus \frac{n!}{d_1!\cdots d_m!}}.$$

On désigne par B l'algèbre graduée sur K telle que $B_n = \mathscr{B}_{n,K}$. Pour tout entier $1 \leq i \leq m$ on désigne par r_i le rang de E_i et par λ_i sa pente, et on prend une base $\mathbf{u}_i = (u_{i,j})_{1\leq i\leq r_j}$ de $E_{i,K}$. On note $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \amalg \cdots \amalg \mathbf{u}_m$ et $r = r_1 + \cdots + r_m$ le rang de E. L'algèbre B s'identifie donc à l'algèbre des polynômes $K[\mathbf{u}]$. Si $\alpha : \mathbf{u} \to \mathbb{R}$ est une application, on désigne par $|\alpha|$ la somme

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i} \alpha(u_{ij}).$$

Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par μ_n la mesure de Harder-Narasimhan de $\mathscr{B}_n$ et on note $\nu_n = T_{\frac{1}{n}}\mu_n$.

On a

$$\begin{aligned}\mu_n &= \sum_{\substack{(d_i)_{1\leq i\leq m}\in\mathbb{N}^m \\ d_1+\cdots+d_m=n}} \frac{n!}{d_1!\cdots d_m!}\frac{\mathrm{rg}(S^{d_1}E_1\otimes\cdots\otimes S^{d_m}E_m)}{\mathrm{rg}(S^nE)}\delta_{d_1\lambda_1+\cdots+d_m\lambda_m} \\ &= \sum_{\substack{\alpha:\mathbf{u}\to\mathbb{N} \\ |\alpha|=n}} \frac{1}{\mathrm{rg}(S^nE)}\delta_{\sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^{r_i}\alpha(u_{ij})}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\nu_n = \sum_{\substack{\beta:\mathbf{u}\to\frac{1}{n}\mathbb{N} \\ |\beta|=1}} \frac{1}{\mathrm{rg}(S^nE)}\delta_{\sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^{r_i}\beta(u_{ij})}.$$

On désigne par Δ le simplexe de dimension $r-1$ dans $\mathbb{R}^r$ (considéré comme l'espace des fonctions de $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{R}$) défini par la relation

$$\Delta := \{x : \mathbf{u} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid |x| = 1\}.$$

et par $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $(x : \mathbf{u} \to \mathbb{R}) \in \mathbb{R}^r$ en

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{r_i} x(u_{ij}).$$

C'est une application continue. Pour tout entier $n \geq 1$ soit $\Delta^{(n)}$ le sous-ensemble de Δ des fonctions à valeurs dans $n^{-1}\mathbb{N}$. Alors ν_n est l'image directe par $\Phi|_{\Delta^{(n)}}$ de la mesure équiprobable w_n sur $\Delta^{(n)}$. Par abus de langage on utilise encore l'expression w_n pour désigner l'image directe de w_n par l'application d'inclusion de $\Delta^{(n)}$ dans Δ. On a alors $\nu_n = \Phi_*(w_n)$. Comme la suite de mesures $(w_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers la mesure uniforme sur Δ, la limite vague ν de la suite de mesures $(\nu_n)_{n\geq 1}$ existe et est égale à l'image directe de la mesure uniforme sur Δ par l'application Φ. Ainsi la limite uniforme des polygones associés aux ν_n existe et est égale au "polygone" (c'est en fait une courbe concave) associé à la mesure limite ν.

Exemple 6.3.20 On suppose que E soit la somme directe de deux faisceaux inversibles L_1 et L_2. On note $\lambda_1 = \deg(L_1)$ et $\lambda_2 = \deg(L_2)$ et on suppose que $\lambda_1 < \lambda_2$. Dans ce cas-là, $\Delta = \{(x, 1-x) \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ est paramétré par $[0,1]$. L'application $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ envoie $(x, 1-x)$ en $\lambda_1 x + \lambda_2(1-x)$. Par conséquent, la mesure limite ν est la mesure équiprobable sur $[\lambda_1, \lambda_2]$. Soit f la fonction définie par $f(t) = \mathbb{E}^{\nu}[\mathbb{1}_{\{x>t\}}]$. Alors on a

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big((\lambda_2 - x)_+ - (\lambda_1 - x)_+\Big).$$

La quasi-inverse de f est donc

$$f^*(t) = \lambda_1 t + \lambda_2(1-t).$$

Enfin, la limite des polygones de Harder-Narasimhan (normalisés) des $S^n E$ est donnée par la courbe quadratique

$$\lambda_2 x - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} x^2.$$

Bibliographie

[1] A. Abbes and T. Bouche. «Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique" ». *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier*, 45(2) :375–401, 1995.

[2] Yvette Amice. *Les nombres p-adiques.* Presses Universitaires de France, Paris, 1975. Préface de Ch. Pisot, Collection SUP : Le Mathématicien, No. 14.

[3] Yves André. *G-functions and geometry.* Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn. Aspects of Mathematics, 13. Wiesbaden etc. : Friedr. Vieweg &amp ; Sohn. xii, 229 p. DM 48.00 , 1989.

[4] M. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi. «On the heat equation and the index theorem ». *Inventiones Mathematicae*, 19 :279–330, 1973.

[5] M. F. Atiyah. «Vector bundles over an elliptic curve ». *Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series*, 7 :414–452, 1957.

[6] Charles M. Barton. «Tensor products of ample vector bundles in characteristic p ». *American Journal of Mathematics*, 93 :429–438, 1971.

[7] Jean-Benoît Bost. «Semi-stability and heights of cycles ». *Inventiones Mathematicae*, 118(2) :223–253, 1994.

[8] Jean-Benoît Bost. «Périodes et isogenies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz) ». *Astérisque*, (237) :Exp. No. 795, 4, 115–161, 1996. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/1995.

[9] Jean-Benoît Bost. «Hermitian vector bundle and stability ». Exposé à Obervolfach, Conférence "Algebraische Zahlentheorie", le 24 juillet, 1997.

[10] Jean-Benoît Bost. «Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields ». *Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques*, (93) :161–221, 2001.

[11] Jean-Benoît Bost. Germs of analytic varieties in algebraic varieties : canonical metrics and arithmetic algebraization theorems. In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, pages 371–418. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.

[12] Jean-Benoît Bost. «Evaluation maps, slopes, and algebraicity criteria [in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Madrid, 2006)*, 537-562, European Mathematical Society] ». In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Madrid, 2006)*, Switzerland, 2007. European Mathematical Society.

[13] Jean-Benoît Bost, Henri Gillet and Christophe Soulé. «Heights of projective varieties ». *Journal of the American Mathematical Society*, 7(4) :903–1027, October 1994.

[14] Jean-Benoît Bost and Klaus Künnemann. «Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic varieties ». prépublication, 2006.

[15] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XIII. Livre VI : Intégration. Chapitres 1, 2, 3 et 4 : Inégalités de convexité, Espaces de Riesz, Mesures sur les espaces*

localement compacts, Prolongement d'une mesure, Espaces L^p. Deuxième édition revue et augmentée. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1175. Hermann, Paris, 1965.

[16] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3.* Hermann, Paris, 1970.

[17] Nicolas Bourbaki. *Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5.* Masson, Paris, new edition, 1981. Éléments de mathématique. [Elements of mathematics].

[18] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique.* Masson, Paris, 1983. Algèbre commutative. Chapitre 8. Dimension. Chapitre 9. Anneaux locaux noethériens complets. [Commutative algebra. Chapter 8. Dimension. Chapter 9. Complete Noetherian local rings].

[19] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique.* Masson, Paris, 1985. Algèbre commutative. Chapitre 1. Modules plats. Chapitre 2. Localisation. Chapitre 3. Graduations, filtrations et topologies. Chaptire 4. Idéaux premiers associés et décomposition primaire.

[20] Michel Brion. Lectures on the geometry of flag varieties. In *Topics in cohomological studies of algebraic varieties*, Trends Math., pages 33–85. Birkhäuser, Basel, 2005.

[21] Antoine Chambert-Loir. «Théorèmes d'algébricité en géométrie diophantienne (d'après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky) ». *Astérisque*, (282) :Exp. No. 886, viii, 175–209, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

[22] Michael Commichau and Hans Grauert. Das formale Prinzip für kompakte komplexe Untermannigfaltigkeiten mit 1-positivem Normalenbündel. volume 100 of *Annals of Mathematics Studies*, pages 101–126. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.

[23] Maurizio Cornalba and Joe Harris. «Divisor classes associated to families of stable varieties, with applications to the moduli space of curves ». *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 21(3) :455–475, 1988.

[24] Ehud de Shalit. «F-isocrystals ». note de cours.

[25] Ehud de Shalit and Ori Parzan. «On tensor products of semistable lattices ». Prépublication, 2006.

[26] Jean-Pierre Demailly. «Complex analytic and differential geometry ». preprint, 1997.

[27] Michel Demazure and Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs.* Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970. Avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.

[28] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[29] Gerd Faltings. «Mumford-Stabilität in der algebraischen Geometrie ». In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 648–655, Basel, 1995. Birkhäuser.

[30] Gerd Faltings and Gisbert Wüstholz. «Diophantine approximations on projective spaces ». *Inventiones Mathematicae*, 116(1-3) :109–138, 1994.

[31] M. Fekete. «Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten ». *Mathematische Zeitschrift*, 17(1) :228–249, 1923.

[32] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[33] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[34] David GIESEKER. «p-ample bundles and their Chern classes ». *Nagoya Mathematical Journal*, 43 :91–116, 1971.

[35] David GIESEKER. «Stable vector bundles and the Frobenius morphism ». *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 6 :95–101, 1973.

[36] David GIESEKER. «Global moduli for surfaces of general type ». *Inventiones Mathematicae*, 43(3) :233–282, 1977.

[37] David GIESEKER. «On two theorems of Griffiths about embeddings with ample normal bundle ». *American Journal of Mathematics*, 99(6) :1137–1150, 1977.

[38] Henri GILLET and Christophe SOULÉ. «An arithmetic Riemann-Roch theorem ». *Inventiones Mathematicae*, 110(3) :473–543, 1992.

[39] Roger GODEMENT. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, 1958.

[40] Philippe GRAFTIEAUX. «Formal groups and the isogeny theorem ». *Duke Mathematical Journal*, 106(1) :81–121, 2000.

[41] Hans GRAUERT. *Selected papers. Vol. I, II*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. With commentary by Y. T. Siu et al.

[42] Daniel GRAYSON. Higher algebraic K-theory II (after Daniel Quillen). In *Algebraic K-theory (Proceedings of the Conference held at Northwestern University, 1976)*, pages 217–240. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 551. Springer, Berlin, 1976.

[43] Phillip A. GRIFFITHS. «The extension problem in complex analysis. II. Embeddings with positive normal bundle ». *American Journal of Mathematics*, 88 :366–446, 1966.

[44] Alexander GROTHENDIECK and Jean DIEUDONNÉ. «Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas ». *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, (4) :228, 1960.

[45] Alexander GROTHENDIECK and Jean DIEUDONNÉ. «Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes ». *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, (8) :222, 1961.

[46] Alexander GROTHENDIECK and Jean DIEUDONNÉ. «Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I ». *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, (11) :167, 1961.

[47] Alexander GROTHENDIECK and Jean DIEUDONNÉ. «Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I ». *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, (20) :259, 1964.

[48] Alexander GROTHENDIECK and Jean DIEUDONNÉ. «Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II ». *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, (24) :231, 1965.

[49] Alexander GROTHENDIECK and Jean DIEUDONNÉ. «Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV ». *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, (32) :361, 1967.

[50] Alexander GROTHENDIECK and Jean DIEUDONNÉ. *Éléments de géométrie algébrique*, volume 166 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[51] G. HARDER and M. S. NARASIMHAN. «On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves ». *Mathematische Annalen*, 212 :215–248, 1974/1975.

[52] Robin HARTSHORNE. «Ample vector bundles ». *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, (29) :63–94, 1966.

[53] Robin HARTSHORNE. «Cohomological dimension of algebraic varieties ». *Annals of Mathematics. Second Series*, 88 :403–450, 1968.

[54] Robin HARTSHORNE. *Ample subvarieties of algebraic varieties.* Notes written in collaboration with C. Musili. Lecture Notes in Mathematics, Volume 156. Spring-Verlag, Berlin, 1970.

[55] André HIRSCHOWITZ. «On the convergence of formal equivalence between embeddings ». *Annals of Mathematics. Second Series*, 113(3) :501–514, 1981.

[56] Lars HÖRMANDER. *An introduction to complex analysis in several variables*, volume 7 of *North-Holland Mathematical Library.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[57] Lars HÖRMANDER. *Notions of convexity*, volume 127 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

[58] Daniel HUYBRECHTS and Manfred LEHN. *The geometry of moduli spaces of sheaves.* Aspects of Mathematics, E31. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.

[59] Nathan JACOBSON. *Basic algebra. II.* W. H. Freeman and Company, New York, second edition, 1989.

[60] Olav KALLENBERG. *Foundations of modern probability.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1997.

[61] George R. KEMPF. «Instability in invariant theory ». *Annals of Mathematics*, (108) :299–316, 1978.

[62] G. M. KHENKIN, editor. *Several complex variables. IV*, volume 10 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 1990. Algebraic aspects of complex analysis, A translation of Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya, Tom 10, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1986 [MR0894261 (87m :32003)], Translation by J. Leiterer and J. Nunemacher, Translation edited by S. G. Gindikin and G. M. Khenkin.

[63] Steven L. KLEIMAN. «Misconceptions about K_x ». *L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. IIe Série*, 25(3-4) :203–206 (1980), 1979.

[64] Ernst KUNZ. *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the German by Michael Ackerman, With a preface by David Mumford.

[65] Serge LANG. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[66] Robert LAZARSFELD. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.

[67] Joseph LE POTIER. *Lectures on vector bundles*, volume 54 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Translated by A. Maciocia.

[68] Saunders MAC LANE. *Categories for the working mathematician.* Springer-Verlag, New York, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[69] Masaki MARUYAMA. «The theorem of Grauert-Mülich-Spindler ». *Mathematische Annalen*, 255(3) :317–333, 1981.

[70] Hideyuki MATSUMURA. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[71] D. Mumford. «On the equations defining abelian varieties. I ». *Inventiones Mathematicae*, 1 :287–354, 1966.

[72] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.

[73] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri. «Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface ». *Annals of Mathematics. Second Series*, 82 :540–567, 1965.

[74] L. Nirenberg and D. C. Spencer. On rigidity of holomorphic imbeddings. In *Contributions to function theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)*, pages 133–137. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

[75] Richard S. Pierce. *Associative algebras*, volume 88 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1982. Studies in the History of Modern Science, 9.

[76] Daniel Quillen. Higher algebraic K-theory, I. In *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proceedings of the Conference held at the Seattle Resarch Center of the Battelle Memorial Institute, 1972)*, pages 85–147. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.

[77] S. Ramanan and A. Ramanathan. «Some remarks on the instability flag ». *The Tohoku Mathematical Journal. Second Series*, 36(2) :269–291, 1984.

[78] Hugues Randriambololona. «Hauteurs pour les sous-schémas et exemples d'utilisation de méthodes arakeloviennes en théorie de l'approximation diophantienne ». Thèse de l'Université Paris XI, UFR Scientifique d'Orsay, Janvier 2002.

[79] Hugues Randriambololona. «Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les faisceaux cohérents ». *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 590 :67–88, 2006.

[80] M. Raynaud. Fibrés vectoriels instables—applications aux surfaces (d'après Bogomolov). In *Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78)*, volume 868 of *Lecture Notes in Math.*, pages 293–314. Springer, Berlin, 1981.

[81] Guy Rousseau. «Immeubles sphériques et théorie des invariants ». *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 286(5) :A247–A250, 1978.

[82] Robert Rumely, Chi Fong Lau and Robert Varley. «Existence of the sectional capacity ». *Memoirs of the American Mathematical Society*, 145(690) :viii+130, 2000.

[83] Stephen S. Shatz. «The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles ». *Compositio Mathematica*, 35(2) :163–187, 1977.

[84] C. Soulé, D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer. *Lectures on Arakelov Geometry*, volume 33 of *Cambridge studies in advanced mathematics.* Cambridge University Press, 1992.

[85] Ulrich Stuhler. «Eine Bemerkung zur Reduktionstheorie quadratischer Formen ». *Archiv der Mathematik*, 27(6) :604–610, 1976.

[86] Burt Totaro. «Tensor products in p-adic Hodge theory ». *Duke Mathematical Journal*, 83(1) :79–104, 1996.

[87] Jacob Towber. «Two new functors from modules to algebras ». *Journal of Algebra*, 47(1) :80–104, 1977.

[88] Jacob Towber. «Young symmetry, the flag manifold, and representations of $\mathrm{GL}(n)$ ». *Journal of Algebra*, 61(2) :414–462, 1979.

[89] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, volume 10 of *Cours Spécialisés.* Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[90] Hermann Weyl. *The classical groups*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Their invariants and representations, Fifteenth printing, Princeton Paperbacks.

[91] Shouwu Zhang. «Positive line bundles on arithmetic varieties ». *Journal of the American Mathematical Society*, 8(1) :187–221, January 1995.

Index

Table des matières